ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

IX Всеукраїнської науково-практичної конференції курсантів та студентів

МАТЕМАТИКА, ЩО НАС ОТОЧУЄ: МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ, МАЙБУТНЄ

Львів 2022

ОРГАНІЗАТОР ТА ВИДАВЕЦЬ — Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ: — ЛДУ БЖД, вул. Клепарівська, 35
м. Львів, 79007

контактні телефони: — (032)233-24-79
тел/факс 2330088

Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє:
Зб. наук.праць ІХ Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. – Львів: ЛДУ БЖД, 2022 -163с

Збірник сформовано за матеріалами ІХ Всеукраїнської конференці курсантів та студентів **«Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє».**

Збірник містить матеріали таких тематичних секцій:

- Математичні відкриття, що змінили світ
- Прикладні задачі в математиці
- Історія математики
- Математика і сучасність

Здано в набір 20.05.2022. Підписано до друку 25.05.2022. Формат 60x841/3. Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7. Гарнітура Times New Roman. Друк на різографі. Наклад: 100 прим. Друк: ЛДУ БЖД вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79007.
ldubzh.lviv@mns.gov.ua

СЕКЦІЯ 1. Математичні відкриття, що змінили світ

О.С. Костина
Херсонський аграрно-економічний університет
Науковий керівник ***Н.Д. Худік****, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій*

ІСТОРІЯ БЛЕЗА ПАСКАЛЯ – ВИНАХІДНИКА КАЛЬКУЛЯТОРА 17 СТОЛІТТЯ

Винахідник із Франції Блез Паскаль (19 червня 1623 – 19 серпня 1662) був одним із найвідоміших математиків та фізиків свого часу; та й досі його ім'я залишається відомим. Йому приписують винахід одного з перших калькуляторів, дивовижно просунутого для свого часу, під назвою Паскалін.

Блез Паскаль з'явився на світ в Клермоні 19 червня 1623, він був другим з трьох дітей Етьєна і Антуанетти Бегон Паскаля. Етьєн Паскаль був місцевим магістратом і збирачем податків у Клермоні. Він мав репутацію науковця. Етьєн Паскаль належав до аристократичного та професійного класу Франції, відомого як noblesse de robe.

Старша сестра Блеза Жільберта була його першим біографом, а молодша – Жаклін здобула визнання як письменник і драматург, згодом ставши монахинею.

Мати хлопчика померла, коли йому було п'ять років. Тоді Етьєн прийняв рішення перевезти сім'ю до Парижа в 1631 році, по-перше, для продовження проведення своїх наукових вивчень, а, по-друге, для подальшої освіти свого єдиного сина, що вже почав виявляти виняткові здібності в різних сферах. Блеза Паскаля утримували вдома, щоб бути цілковито впевненими в тому, що хлопчик не буде занадто перевантажений роботою та навчанням.

Етьєн наказав, щоб освіта сина спочатку обмежувалася лише вивченням і розумінням мов. За проханням батька було заборонено вводити математику до тих пір, доки Блезові не виповниться хоча б п'ятнадцять років. Це беззаперечно збудило цікавість хлопчика, і одного разу, у дванадцятирічному віці, він запитав, що таке геометрія. Його наставник розповів, що це наука побудови фігур та визначення пропорцій між їхніми частинами. Блез Паскаль, відповідно, беручи до уваги заборону на читання, присвятив свій ігровий час вивченню незнайомої науки і вже через кілька тижнів відкрив для себе багато властивостей фігур, і зокрема теорему про те, що сума кутів трикутника дорівнює двом прямим кутам. Геній з малих років, Блез Паскаль написав трактат про передачу звуків у віці дванадцяти років, а вже в шістнадцять років юнак написав трактат про конічні перерізи. Можна звернути увагу на те, що у чотирнадцять років Паскаль був допущений до щотижневих зборів Роберваля, Мерсенна, Мідоржа та інших французьких геометрів, які згодом входили до складу Французької Академії.

У 1641 році, коли хлопцю виповнилося вісімнадцять, він змайстрував і продемонстрував свою першу арифметичну машину, винахід, який через вісім років модернізував, покращивши його роботу, і назвав Паскаліном. Доказом цього є його листування з Ферма приблизно в цей час, що показує, що Блез звернув увагу на аналітичну геометрію та фізику. Він повторив експерименти також відомого Торрічеллі, за допомогою яких тиск атмосфери можна було оцінити як вагу, і підтвердив свою теорію про причину барометричних змін, отримавши миттєві показники на різних висотах на пагорбі Пюї-де-Дом.

Взагалі саму ідею застосування машин для розв’язання математичних задач можна простежити щонайменше ще на самому початку 17 століття. Серед математиків, які розробили та впровадили калькулятори, що здатні виконувати такі дії, як додавання, віднімання, множення та ділення, були також Вільгельм Шікхард та Готфрід Лейбніц. Паскаль винайшов свій числовий калькулятор під назвою Паскалін, щоб допомогти з розрахунками своєму татові, який став на той час французьким збирачем податків. Pascaline мав вісім рухомих циферблатів, які складалися з восьмизначних довгих сум та застосовували за основу десять. Коли перша шкала (стовпець одиниць) перемістилася на десять розділів, друга шкала зрушила на одну позначку, щоб подати показник десять у стовпці десятків. Коли друга шкала перемістилася на десять розділів, третя шкала (колонка сотень) перемістилася на одну позначку, щоб уявити сотню, і так далі.

Паскаль все життя був містиком і вважав особливим закликом залишити світ. Він написав звіт про певну подію на маленькому шматку пергаменту, який потім все життя носив поруч із серцем, щоб постійно пам’ятати про свій завіт. Незабаром після цього він переїхав до Порт-Роялю, де продовжував жити до самої загибелі, що сталася у Парижі 19 серпня 1662 року. Достеменно невідомо що сприяло смерті Блеза Паскаля, сучасні вчені досі намагаються з’ясувати можливу причину.

Проте ця людина залишила після себе в спадок ще багато винаходів (серед яких є рулетка та наручний годинник), якими людство користується і буде користуватися ще багато років. Варто відмітити, що вклад Блеза Паскаля в обчислювальну техніку було визнано відомим комп’ютерним ученим Ніклаусом Віртом, який у 1972 році назвав свою новостворену комп’ютерну мову Паскаль і наполіг на тому, щоб його писали Паскаль, а не ПАСКАЛЬ. Також Паскаль (Па) – це одиниця виміру атмосферного тиску, названа на честь Блеза Паскаля, чиї експерименти значно розширили знання про атмосферу. Крім цього Паскаль – це сила в один ньютон, що діє на площу один квадратний метр. Це одиниця виміру тиску, встановлена Міжнародною системою. 100000 Па = 1000 мбар або 1 бар.

Література:

1. О’Коннелл, Марвін Річард. Блез Паскаль: причины сердца. Гранд-Рапідс, Мічіган: Видавництво William B. Eerdmans Publishing Company, 1997.
2. O'Коннор, Джей Джей, Робертсон Э. Ф. Блез Паскаль. Школа математики та статистики Університету Сент-Эндрюс, Шотландія, 1996.
3. Паскаль, Блез. Пенсе. Пер. WF Trotter. 1958. Вступ. Т. С. Эліот. Мінеола, Нью-Йорк: Довер, 2003.
4. Сімпсон, Дэвід. Блез Паскаль (1623–1662). *Інтернет-енциклопедія філософії*, 2013. URL:

Д.А. Бабич
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТІР

Евклідів простір — скінченновимірний дійсний векторний простір зі скалярним добутком. Названий на честь давньогрецького математика Евкліда із Александрії. Розширює двовимірну евклідову площину до тривимірного простору і є поняттям евклідової геометрії. Термін "евклідовий" дозволяє відрізняти ці простори від інших типів просторів, що можуть розглядатися в сучасній геометрії. Евклідів простір також узагальнюють і до більшої кількості вимірів.

В класичній давньогрецькій геометрії існує визначення евклідової площини і тривимірного евклідового простору, що ґрунтується на певних постулатах, в той час як інші властивості цих просторів виведені як теореми. Також використовувалися геометричні побудови для визначення раціональних чисел, що є відношеннями співмірних довжин. Коли алгебра і математичний аналіз набули достатнього розвитку, цей зв'язок зберігся і тепер більш загальним стало визначення Евклідового простору на основі векторних просторів, що дозволяють використовувати декартові координати і методи алгебри та диференціального та інтегрального числення.

Це означає, що точки визначають за допомогою трійок дійсних чисел, які називаються координатними векторами, а геометричні фігури описують рівняннями і нерівностями, що визначають співвідношення цих координат. Евклідів простір визначено за допомогою аксіом, які не вказують як саме мають бути представлені точки цього простору. Евклідів простір може бути побудований за допомогою декартової системи координат, як один із можливих способів його представлення. В такому випадку, Евклідів простір моделюють застосовуючи дійсний простір координат (R^n), що має таку ж розмірність. Для одного виміру це була б шкала дійсних чисел; для двох вимірів, він представляється декартовою системою координат на площині; і для більшої кількості вимірів, це є координатний простір із трьома або більше координатами, що представлені дійсними числами. Математики позначають n-вимірний Евклідів простір як E^n, якщо вони хочуть підкреслити його природу та властивості, але також використовують позначення R^n, оскільки ці дві структури мають подібні властивості і їх як правило не розрізняють. Евклідові простори мають скінченну кількість вимірів.

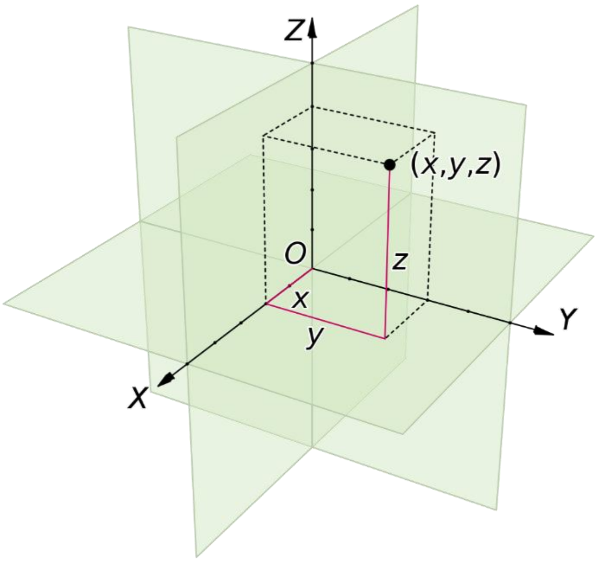
Евклідова метрика

Нехай декартові координати в тривимірному просторі такі, що якщо точці P відповідають три її координати (x_1, x_2, x_3), а точці Q — координати (y_1, y_2, y_3).

Тоді, якщо квадрат довжини прямолінійного відрізку, що з'єднує P та Q дорівнює:

$$l^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2$$

то такий простір називають евклідовим простором, а декартові координати з такими властивостями називають евклідовими координатами.



Узагальнюючи на випадок n вимірів, отримаємо:

$$l^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots(x_n-y_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$$

Функція відстані між двома точками має назву метрики, а наведений вище вид такої функції для евклідового простору має назву евклідової метрики.

З точками евклідового простору зручно зіставити вектори. Назвемо вектор, направлений від початку координат у точку P радіус-вектором цієї точки. Декартові координати (x_1, x_2, x_3) точки P будемо називати координатами радіус-вектора. Два вектори, які направлені з початку координат до точок P та Q з координатами $p=(x_1, x_2, x_3)$ та $q=(y_1, y_2, y_3)$ можна складати покоординатно. Тобто отримати вектор $p+q$ з координатами $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$.

Можна також помножити вектор на число (скаляр). Одиничні вектори e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1) мають довжину, яка дорівнює 1, а самі вектори взаємно перпендикулярні.

Будь-який вектор $v=(x_1, x_2, x_3)$ може бути розкладений по одиничних векторах:

$$v=(e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3)$$

Тут простір тривимірний. Для n-вимірного простору все аналогічно. Тому евклідів простір визначається також як лінійний (векторний) простір, в якому квадрат відстані між точками (кінцями радіус-векторів) визначається за формулою:

$$l^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$$

Література:

1. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
2. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.
3. *Тацій Р.М., Чмир О.Ю., Карабин О.О.* Схема дослідження поздовжніх коливань стрижня з чотирьох кусків кусково-сталого перерізу Збірник наукових праць ДОРОГИ І МОСТИ. – 2019. – № 19. – С. 151 – 166.

Є.Є. Шило
Херсонський аграрно-економічний університет
*Науковий керівник **Т.П. Білоусова**, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій*

ІСТОРІЯ ПЕРШОГО В СВІТІ ПРОГРАМІСТА АДИ ЛАВЛЕЙС

У грудні спільнота програмістів відзначає день народження Ади Лавлейс, яка в першій половині XIX століття в Англії зробила опис обчислювальної машини. Цей перший прототип був розроблений математиком Чарльзом Беббіджем. Ада Лавлейс склала першу в світі комп'ютерну програму і нащадки назвали її «першою програмісткою».

Народжена 10 грудня 1815 року, Ада Лавлейс була єдиною дитиною англійського поета Джорджа Байрона і його дружини Анни Ізабелли Байрон. Анна Ізабелла Байрон у кращі дні свого сімейного життя за своє захоплення математикою отримала від чоловіка прізвисько "Королева Паралелограмів". Мати Ади Лавлейс розлучилася з Байроном через місяць після народження дівчинки. Нянечці маленької Ади заборонялося розповідати їй казки та історії, щоб дитина не забивала голову фантазіями. Мати, захоплена математикою, прищеплювала дитині любов до науки. Головною пристрастю всього життя Ади була «мати всіх наук» – математика. Вона з раннього віку навчалася у відомих шотландських математиків: Августа де Моргана та Мері Сомервілль.

У віці сімнадцяти років Ада познайомилася з Чарльзом Беббіджем, що позначилося на її подальшій науковій діяльності. У той час він був професором кафедри математики Кембриджського університету. Вона відвідувала його майстерню, де знайомилася з роботою над обчислювальними машинами. Чарльз Беббідж щиро полюбив цю дівчину, він знаходив у ній головне, що цінував у людях – гостроту розуму. Вчений стежив за науковими заняттями Ади, посилав їй статті та книги, що становили інтерес, та знайомив зі своїми роботами. Дуже виразна автохарактеристика, дана Адою в одному з листів Беббіджу: «Мій мозок – щось більше, ніж просто смертна субстанція; я сподіваюся, час покаже це. Клянуся дияволом, що не пройде й десяти років, як я висмокчу деяку кількість життєвої крові зі загадок всесвіту, причому так, як цього не змогли б зробити звичайні смертні губи й уми. Ніхто не знає, які жахливі енергія та сила лежать ще невикористаними в моїй маленькій гнучкій істоті.» Після отримання перших коректур вона пише Беббіджу: «Я хочу вставити в одне з моїх приміток дещо про числа Бернуллі як приклад того, як неявна функція може бути обчислена машиною без того, щоб попередньо бути розв'язаною за допомогою голови і рук людини. Надішліть мені необхідні дані та формули». На її прохання Беббідж надіслав всі необхідні відомості та, бажаючи позбавити Аду труднощів, сам склав алгоритм для знаходження цих чисел. Але припустився дуже грубої помилки в складанні алгоритму, і Ада відразу ж це виявила. Вона самостійно написала програму для обчислення чисел Бернуллі. Ця програма представляла винятковий інтерес, оскільки величина, складність та математична постановка даної задачі не йшли в жодне порівняння з елементарними прикладами. Цей приклад дозволив Лавлейс повною мірою показати методику програмування на аналітичній машині і ті переваги, які дає остання при відповідному методі обчислень. Передбачаючи «етапи» комп'ютерного програмування, Ада Лавлейс, як і сучасні математики, починає з постановки задачі, потім вибирає метод обчислення, зручний для програмування, і лише тоді переходить до складання програми. Ця програма викликала захоплення Беббіджа, він не шкодував хвалебних слів для її автора, і вони були цілком заслуженими.

Успіхи давалися їй з великою напругою і не без шкоди здоров'ю, на що вона неодноразово скаржиться в листах Беббіджу. Їй хотілося, щоб ця та подальші роботи, про які вона мріяла, могли якось зв'язуватися з її ім'ям. Тому Ада вирішує під кожною приміткою поставити свої ініціали. «Примітки» Лавлейс заклали основи сучасного програмування, що базується на тих ідеях та принципах, які були нею висловлені. Одним з найважливіших понять програмування є поняття циклу. Ада повністю усвідомила значення циклу – використання циклічних обчислювальних методів є одним із найпростіших та найефективніших методів, що полегшують використання обчислювальних машин. Тому вона приділяла багато уваги циклам у своїй роботі. Їй належить визначення циклу: «Під циклом операцій слід розуміти будь-яку групу операцій, яка повторюється більше одного разу». Організація циклів у програмі значно скорочує її обсяг. Без такого скорочення практичне використання аналітичної машини було б нереальним, тому що вона працювала з перфокартами, тому була б потрібна величезна їх кількість для кожної розв'язуваної задачі.

Вона казала: «Машина може виконати все те, що ми зможемо їй наказати. Вона може наслідувати аналізу, але вона не може передбачити будь-які аналітичні залежності або істини. Функції машини полягають у тому, щоб допомогти нам отримати те, з чим ми вже знайомі». У своєму описі машини Ада Лавлейс також вказала, що «в майбутньому вона створюватиме алгебраїчні формули, зможе писати музику, малювати картини та покаже науці такі шляхи, які нам і не снилися».

На жаль, у віці 36 років Ада померла. Вона не встигла опублікувати інші визначні роботи. У житті винахідника Беббіджа теж не все йшло гладко: до старості він намагався добудувати свою машину, але так і не зміг. Перші комп'ютери з'явилися лише через ціле століття! Але Ада не пішла безслідно. 1975 року Міністерство оборони США ухвалило рішення про початок розробки універсальної мови програмування. Проект отримав назву «Ада».

Література:

1. Menabrea, Luigi Federico, Lovelace, Ada. Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage... with Notes by the Translator. [Translated by Ada Lovelace]. URL:https://books.google.com.ua/books/about/Sketch_of_the_Analytical_Engine_invented.html?id=hPRmnQEACAAJ&redir_esc=y
2. Lovelace, Ada. Site of the MacTutor History of Mathematics University of St Andrews, School of Mathematics and Statistics, Scotland. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

А.С. Шаповалова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Е.Васильєва****, доктор технічних наук,професор кафедри ПМіМ*

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Первісним поняттям в теорії ймовірностей є поняття події (thevent). Події настають (відбуваються, з'являються) при виконанні певної сукупності умов. Для того, щоб подія відбулась, необхідне виконання певного комплексу умов.

Якщо, наприклад, дослід полягає в киданні монети, то поява герба (або цифри) є подією: якщо виготовлення підшипника даного типу – дослід, то відповідність підшипника стандарту – подія; якщо дослід – кидання гральної кістки (кубика), на гранях якої поставлені цифри (очки) від 1 до 6, то випадання будь-якої цифри - подія. Випадковість події полягає в неможливості передбачити результат досліду чи спостереження в масових явищах. Якщо ж при здійсненні комплексу умов подія не відбудеться ніколи, то така подія є неможливою. Будь-яку складену подію можна подати як сукупність елементарних подій.

Уявлення про випадковість зародилися при найперших спробах усвідомлення людиною свого буття і стали неминучими при поясненні поведінки людини, її долі. З поняттям випадковості пов'язане питання про свободу, волю людини. Заперечення випадковості неминуче призводило до фаталізму, уявлення про зумовленість всього, що відбувається у світі. Ще на зорі європейської науки Демокріт вважав, що причину має все, і що випадковість люди ввели, "щоб виправдати свою дурість". Однак він же поклав в основу своєї натурфілософії безладний рух атомів, через якого явища доводиться фактично розглядати як випадкові. Очевидно, що випадковість немає існування без математики.

Література

1. Джордан Еленберг. Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення. – К.: Наш формат, 2017 – 408с
2. Гісь О. Продуктивне мислення / О. Гісь // – 2014. – № 2. – С. 7−9.
3. D. Kahneman and A. Tversky, «On the Psychology of Prediction», Psychological Review 80 (2003): 237–251
4. W. Edwards, «Conservatism in Human Information Processing», in Formal Representation of Human Judgment, ed. B. Kleinmuntz (New York: Wiley, 1998): 17–52.
5. D. Kahneman and A. Tversky, «Subjective Probabilit Келлі Макгонігал. Сила волі. Шлях до влади над собою. – К.: Наш формат,2017. – 264с

П.Р Барабах

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

Теорема Піфагора (Пітаго́ра) — одна із засадничих теорем евклідової геометрії, яка встановлює співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Уважається, що її довів грецький математик Піфагор, на чию честь її й названо (є й інші версії, зокрема думка, що цю теорему в загальному вигляді було сформульовано математиком-піфагорійцем Гіппасом).

***Формулювання*:**

Теорема звучить так:

У прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.

Позначивши довжину гіпотенузи трикутника як $\boldsymbol{c}$, а довжини катетів як $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, отримаємо такі формули:

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2,$$

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} = \boldsymbol{c}^2.$$

Отже, теорема Піфагора встановлює співвідношення, яке дає змогу визначити довжину сторони прямокутного трикутника, знаючи довжини двох інших. Відповідно, в алгебраїчній інтерпретації теорему можна сформулювати так:

У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

Теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, яка визначає співвідношення між сторонами довільного трикутника.

Доведено також зворотне твердження (називають також зворотною до теореми Піфагора):

Для будь-яких трьох додатних чисел a, b і c, для яких виконується рівняння $a^2 + b^2 = c^2$, існує прямокутний трикутник з катетами a та b і гіпотенузою c.

Доведення використовуючи диференціали:

До теореми Піфагора можна прийти розглядом залежності величини гіпотенузи від приросту сторони, застосувавши невелике обчислення.

У результаті приросту сторони $\boldsymbol{a}$ з подібних трикутників для нескінченно малих приростів:

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a}.$$

Застосуємо розділення змінних.

$$c\,dc = a\,cd$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$c^2 = a^2 + const.$$

Якщо $a = 0$ тоді $c = b$, тож «константа» — b^2. Тоді

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Як можна побачити, квадрати отримано завдяки пропорції між приростами та сторонами, тоді як сума є результатом незалежного внеску приростів сторін, що не очевидно з геометричних доведень. У цих рівняннях da і dc, відповідно, — нескінченно малі прирости сторін a і b. Але замість них ми використовуємо Δa і Δc, тоді границя їхнього відношення, якщо вони прямують до нуля, дорівнює $\frac{da}{dc}$ (похідній) і також дорівнює $a\ /\ c$ (відношенню довжин сторін трикутників), в результаті чого отримуємо диференціальне рівняння.

Література:

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: АСК., 2001. – 648с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Збірник задач. – К.: АСК., 2001. – 479с.
3. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
4. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Збірник задач. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
5. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
6. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

М.Р. Городечний

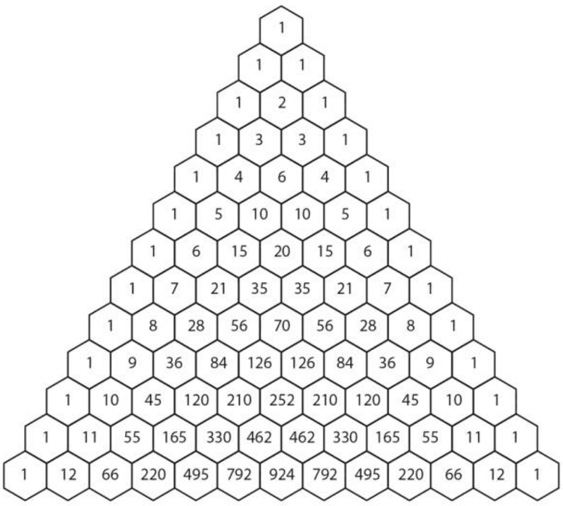
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *, кандитат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ТРИКУТНИК ПАСКАЛЯ

Блез Паска́ль — французький філософ, письменник, фізик і математик. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий також відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями. На честь Паскаля названа одиниця вимірювання тиску (Паскаль), а також популярна мова програмування Pascal.

Кожен з нас з раннього дитинства чудово знайомий з такою простою і, на перший погляд, зрозумілою фігурою, як трикутник. Однак не всі знають, що існує ще й абсолютно дивовижний трикутник, не схожий на все, що нам доводилося бачити раніше, – трикутник Паскаля, названий так на честь великого французького математика і філософа Блеза Паскаля, який описав його в 1653 році в своєму «Трактаті про арифметичний трикутник ». Незважаючи на те, що перші відомості про трикутник Паскаля відносяться до незапам’ятних часів (Омар Хайям, який займався не тільки філософією, а й математикою, описав його на початку XII століття з посиланням на запозичення з джерел, датованих більш раннім часом), саме Б. Паскаль був першим, хто зміг науково описати його властивості.

Трикутник Паскаля – іншими словами, нескінченна числова таблиця, виконана у формі трикутника, – простий, витончений і великий, як все геніальне: кожне число його дорівнює сумі двох чисел, які розташовані над ним. Неважко здогадатися, що цей трикутник може бути яким завгодно великим – його можна продовжувати безмежно.



n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	... ...

Перший ряд чисел (якщо вважати своєрідні «діагоналі» від вершини) – це одиниці.

Другий ряд містить натуральні числа, що відповідають номеру рядка розташування числа.

Всі числа третього ряду – 1, 3, 6, 10, 15, 21,28, 36, 45 і т.д. є трикутними числами, які показують, яка саме кількість предметів (подібно кулям в більярді) можуть в сукупності утворити трикутник. Цей ряд чудовий ще й тим, що кожне його число є сумою натурального ряду чисел, наприклад: 45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 або 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 і т.д.

Четвертий ряд чисел трикутника Паскаля (1, 4, 10, 20, 35, 56 і т.д.) містить тетраедричні (пірамідальні) числа, які беруть участь в уявному «будівництві» тетраедра: на три вже наявних кулі кладеться ще один шар і виходить – 4 і т.д.

П'ятий ряд трикутника, освічений гіпертетраедрічеськімі числами 1, 5, 15, 35, 70 і т.д., допоможе отримати в уяві (оскільки можливий тільки в чотиривимірному просторі) гіпертетраедр: одна куля об'єднується з чотирма, а ті – з десятьма і т.д.

Ще більш неймовірний пятивимірний тетраедр «вибудовується» за допомогою чисел шостого ряду трикутника Паскаля: 1, 6, 21, 56, 126 і т.д.

Що стосується горизонтальних ліній, то всі числа цих рядків є біноміальними коефіцієнтами, що мають неоціненне значення для комбінаторики, теорії ймовірностей, родоначальником якої в «співавторстві» з Ферма став Б. Паскаль, і інших математичних областей.

Одним із загадкових властивостей трикутника Паскаля є швидкість знаходження суми чисел ряду від початку до потрібного нам числа. Для цього необхідно, знайшовши останній доданок, звернути увагу на число, яке записане знизу і зліва (якщо нумерувати ряди з правого боку) або праворуч (якщо нумерувати ряди з лівого боку) від останнього доданка. Наприклад, щоб дізнатися, що в сумі дадуть нам всі числа четвертого ряду від 1 до 56, досить, знайшовши 56, поглянути, що написано зліва внизу: це число 126. Дивно вірно!

Крім того, не здогадуючись про своє відкриття (це було виявлено тільки в XIX столітті), Паскаль «зашифрував» в трикутнику відомі числа послідовності Фібоначчі: 1, 6, 10, 4; 1, 5, 6, 1 і т.д.

Література:

1. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
2. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.
3. *Герасимчук В.С., Васильченко С.Г., Кравцов В.І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Ч1- Книги України ЛТД. -2010. -470с.

У.І. Дячок
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ТЕОРЕМА БАНАХА ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ

Стефан Банах (1892-1945) - польський та український математик, один з творців сучасного функціонального аналізу та співзасновник львівської школи математиків. Професор університету Яна Казимира у Львові та «Львівської політехніки» (з 1924), декан фізико-математичного факультету Львівського університету (1939-1941), керівник Інституту математики Академії наук (1940-1941), депутат Львівської міської ради (1940-1941). Його відкриття стали золотим фондом математики XX ст. Тому польське математичне товариство заснувало премію ім. С. Банаха. Саме Банах у 1922 році встановив твердження про нерухому точку , тому ця теорема є названа на його честь.

Формулювання теореми

У повному метричному просторі всяке стискаюче відображення має одну і тільки одну нерухому точку, яку можна знайти методом послідовних наближень, починаючи з будь-якої точки цього простору.

Ця теорема є однією з найбільш класичних і фундаментальних теорем функціонального аналізу, а тому її результати використовуються при доведенні багатьох інших тверджень в математиці.

Доведення:

Нехай (X, ρ) - повний метричний простір, x_0- довільна точка повного метричного простору (X, ρ), $A{:}X\to X$ - стискаюче відображення. Розглянемо послідовність точок цього простору $x_1=Ax_0$, $x_2=Ax_1$, ... , $x_n=Ax_{n-1}$, …. Вона має найбільше значення, бо, вважаючи $m>n$, отримуємо:

$$\rho(x_n,x_m)= \rho(Ax_{n-1},Ax_{m-1})\le\alpha\rho(x_{n-1},x_{m-1})\le\ldots\le\alpha^n\rho(x_0,x_{m-n})\le$$
$$\le\alpha^n[\rho(x_0,x_1)+ \rho(x_1,x_2)+\ldots+ \rho(x_{m-n-1},x_{m-n})]\le$$
$$\le\alpha^n[1+\alpha+\ldots+ \alpha^{m-n-1}]\ \rho(x_0,x_1)\le\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\ \rho(x_0,x_1)\to 0$$

при $n\to\infty$. Так як простір повний, то існує границя $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Через неперервність відображення A маємо $Ax=A\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$

Як підсумок, x- нерухома точка відображення A. Вона єдина, бо з рівностей $Ax=x$, $Ay=y$ виходить, що $\rho(x,y)= \rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y)$. При $\alpha<1$ це можливе лише у випадку $\rho(x,y)=0$, тобто $y=x$.

Зауваження 1. Для компактного простору (X, ρ) вимогу стискання можна дещо послабити, замінивши її для всіх $x\neq y$ нерівністю $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$.

Зауваження 2. Для неперервного відображення А достатньо лише вимагати, щоб деякий степінь цього відображення був стискаючим відображенням.

Література:

1. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
2. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.
3. *Герасимчук В.С., Васильченко С.Г., Кравцов В.І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Ч1- Книги України ЛТД. -2010. -470с.

А.С. Шаповалова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КОРОТКА ІСТОРІЯ ЗАДАЧІ ПРО ЧОТИРИ КОЛЬОРИ

Теорема про чотири кольори. Близько 150 років тому кілька математиків почали думати про карти. Не про традиційні проблеми, пов'язані зі створенням точних карт світу й відображенням круглого глобуса на аркуші паперу, а про достатньо туманні питання щодо карт загалом. Зокрема, як зафарбувати землю так, щоб території зі спільним кордоном мали різні кольори. Для деяких карт багато кольорів не треба. Квадрати шахівниці утворюють дуже певну і регулярну карту, і щоб її розфарбувати, достатньо лише двох кольорів: зазвичай чорного й білого. Карти, зроблені з кругів, що перекривають один одного, тож потребують лише двох кольорів. Але коли регіони стають менш правильними, двох кольорів замало. Карта США, де є 50 штатів. Очевидно, що 50 кольорів (по одному кольору на кожен штат) гарантовано вистачить, але можна досягти ліпшого. Спробуйте зафарбувати регіони і подивитися, скільки кольорів для цього знадобиться. З'ясуймо одну технічну деталь: штати, що мають спільну точку, як-от Колорадо та Аризона, можуть за бажання бути забарвлені в один колір. Спільного кордону вони не мають. Карта США ілюструє кілька простих загальних принципів. Аляска й Гаваї не відіграють тут ніякої ролі, бо вони ізольовані від інших штатів, і можемо надати їм будь-який колір на вибір. Куди важливіше те, що нам точно знадобиться щонайменше три кольори.

Задача про чотири кольори виникла 1852 року, коли Френсіс Гатрі, молодий південноафриканський математик і ботанік, розфарбовував різними способами графства на карті Англії. Чотирьох кольорів завжди виявлялося достатньо, тому він спитав свого брата Фредерика: чи це відомий факт? Фредерик, своєю чергою, запитав видатного, але ексцентричного математика Авґустуса де Моргана, однак той не жодного уявлення, а тому написав ще відомішому математику серові Вільяму Ровену Гамільтону. Але й Гамільтон не знав і, відверто кажучи, не надто цим і цікався. У 1889 році адвокат Алфред Кемпе опублікував, як він вважав, доведення те, що чотирьох кольорів достатньо, але 1889 року Персі Гівуд виявив, що Кемпе помилився. Гівуд зазначив : метод Кемпе доводить лише, що достатньо п’яти кольорів, і справа спинилася на столітті гаком. Відповідь була або чотири, або п'ять, однак ніхто не знає, скільки саме. Інші математики слідом за Кемпе намагалися використати такі ж стратегії, та дуже скоро з’ясувалося, що цей метод вимагає багатьох громіздких обчислень. Нарешті, 1976 року Вольфганг Гакен і Кеннет Аппелл розв'язали задачу, використовуючи комп'ютер. Виявилося, що чотирьох кольорів завжди достатньо. Після цієї новаторської роботи математики звикли до допомоги комп'ютера. Вони все ще дають переваги доведенням, які спираються винятком на силу людського мозку, але більшість з них уже не висувають такої вимоги. Утім, ще в 1990-х роках доведення Аппелла-Гакена приймали з обережністю, тож 1994 року Ніл Робертсон, Деніел Сендерз, Пол Сімор і Робін Томас вирішили повторити все доведення, використовуючи таку ж основну стратегію, але спростивши структуру. Теперішні комп’ютери такі швидкі, що все доведення можна перевірити на домашньому комп’ютері за кілька годин.

Література

1. Книга: Іен Стюарт «Неймовірні числа професора Стюарта»

Р.С. Лизун
Національний університет «Львівська політехніка»
Науковий керівник ***О.Я. Бродяк,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

ФУНКЦІЇ У МАТЕМАТИЦІ ТА У ЖИТТІ

Сучасна математика знає безліч функцій. У кожної з них неповторний вигляд, як і неповторний вигляд кожного з мільярдів людей, що живуть на Землі. Однак, незважаючи на несхожість однієї людини на іншу, у кожної є руки і голова, вуха і рот. Аналогічно вигляд кожної функції можна подати за допомогою набору характерних деталей. Функції – це математичні портрети закономірностей, які пізнаються людиною.

У математику поняття «функціональна залежність» ввів Рене Декарт. У 1637 році у книзі «Геометрія» він вводить поняття змінної величини і функції, що назвали «поворотним пунктом у математиці». Ввівши прямокутну систему координат в широке застосування, він поклав початок розвиткові важливої математичної науки – аналітичної геометрії, без якої сьогодні неможливо розв’язати важливих практичних задач артилерії, авіації тощо.

Сам термін «функція», що в перекладі з латинської мови означає «виконання, здійснення», Р. Декарт не вживав. Вперше він зустрічається в листі німецького математика Г. Лейбніца до голландського математика Х. Гюйгенса в 1694 році. У загальне вживання цей термін введено на початку 18 століття Йоганном Бернуллі. З цього часу починає розвиватись ціла теорія функцій: з’явилось вчення про тригонометричні функції, яке набуло сучасного вигляду в працях Леонарда Ейлера, почалось ґрунтовне дослідження показникових й логарифмічних функцій.

Найзагальніше сучасне означення функції сформульовано в працях Ніколя Бурбакі. Це псевдонім, під яким велика група французьких математиків друкувала свої праці в 1937 – 1968 рр.

На початку 19 століття ученим довелося досліджувати явища, які було зручніше описувати мовою недиференційованих функцій. Так, надзвичайно нерегулярні траєкторії частинок у броунівському русі нагадують неперервні криві без похідних. Виявилося, що поняття неперервності й розривності функцій мають безліч прообразів у природі і відображають істотні моменти руху різних матеріальних утворень. Народження і смерть живого організму, спалах наднової зірки, вибух ядра галактики, розпускання бутона, зміна агрегатного стану речовини та безліч інших явищ живої і неживої природи являють собою якісний стрибок, для вивчення кількісних характеристик якого і служать розривні функції. Розвинута пізніше теорії функцій комплексної змінної дала можливість розв’язати багато задач аеро- і гідродинаміки, теорії пружності, радіотехніки тощо. Сьогодні ж бурхливо розвивається теорія катастроф – математичний апарат для вивчення стрибкоподібних змін у русі певних систем, порушення неперервності якогось процесу.

Я.Я. Присакар
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
*Науковий керівник **М.І. Сорокатий**, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ВІЙСЬКОВУ ТЕМАТИКУ

У загальноосвітній програмі вищих військових навчальних закладів математика є важливою компонентною. Військове спрямування викладання цієї дисципліни передбачає: військово-орієнтований зміст і структуру курсу, розв'язування прикладних задач в ході навчання та методологічний зв'язок математики з предметами військового циклу. Важливим засобом для реалізації такого комплексного підходу викладання математики є військова інтерпретація основних математичних понять та задач. При цьому не завжди вдається провести висвітлення основних математичних понять із використанням військового контексту, проте при введенні таких понять як похідна, функціональна залежність, інтеграл, а тим більше при побудові та розв'язуванні диференціальних рівнянь зробити це можливо. Такий підхід дає змогу курсантам одночасно з засвоєнням математичних понять та методів поглиблювати свої знання у військовій справі.

У відповідності до сучасних вимог підготовки військових фахівців для кращого засвоєння курсу вищої математики у Національній академії сухопутних військ рекомендовано використовувати нові навчальні посібники, а саме: «Збірник військово-прикладних задач з вищої математики» та «Тренажер військово-прикладних задач з вищої математики» з метою наближення навчання до завдань пов'язаних з майбутньою діяльністю військового фахівця.

При вивченні кожного з розділів вищої математики передбачено проведення практичних та самостійних занять, на яких курсанти вчаться розв'язувати практичні задачі, виконуючи завдання за індивідуальними варіантами. Для заохочення та зацікавлення курсантів при виконанні індивідуальних завдань вони розробляються наближеними до задач військової практики. Іноді достатньо сформулювати умови класичних задач, які використовуються у підручниках і задачниках дещо інакше, безпосередньо пов'язуючи з військовими проблемами. Причому для курсантів різних спеціальностей ці умови можуть бути різними і містити задачі, що зустрічаються при виконанні обов'язків фахівців саме цієї спеціальності.

Наведемо кілька прикладів застосування матеріалів деяких розділів, що прив'язані до задач, які можуть виникати у майбутніх офіцерів.

Приклад 1. Куля пробиває перешкоду із постійним від'ємним прискоренням a і початковою швидкістю v_0 за час t. Знайти швидкість після пробиття перешкоди.

Розв'язання.

Залежність шляху від часу має такий вигляд

$$S(t) = -\frac{at^2}{2} + v_0 t$$

Нехай задано такі початкові дані:

$$\alpha = 450000\frac{м}{c^2}; v_0 = 300\frac{v}{c^2}; t = \frac{1}{3000}c.$$

Знайдемо швидкість

$$v(t) = s'(t) = -at + v_0.$$

Звідси швидкість після пробиття перешкоди буде такою

$$v(t) = -450000 \cdot \frac{1}{3000} + 300 = -150 + 300 = 150(\frac{м}{c}).$$

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 2. При підготовці до екзамену курсант за t днів вивчає $\frac{t}{t+k} - y$ частину курсу, а забуває $\alpha t - y$ частину. Скільки днів потрібно витратити на підготовку, щоб була вивчена максимальна частина курсу, якщо $k = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{49}$? Зауважимо, що значення цих параметрів отримуються експериментально і для кожного курсанта вони можуть бути різними.

Розв’язання.

Складемо функцію $f(t) = \frac{t}{t+k} - \alpha t$ і знайдемо її екстремум.

$$f'(t) = \frac{t+k-t}{(t+k)^2} - \alpha = \frac{-\alpha t^2 - 2\alpha kt + k - \alpha k^2}{(t+k)^2}.$$

Підставимо замість k і α відповідні значення і прирівняємо похідну до нуля.

$$-\frac{2}{49}t^2 - 2 \cdot \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} - \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{4} = 0;$$

$$t^2 + t - 12 = 0; (t+4)(t-3) = 0.$$

Критичними точками є $t = -4$ і $t = 3$. Легко встановити, що максимум досягається при $t = 3$. Таким чином, оптимальний результат буде отримано при підготовці до екзамену протягом трьох днів.

Питання адаптації вищої математики, до військового навчання є важливим, причому деякі розділи допускають вивчення основних принципів та методів математики крізь призму воєнної спрямованості світогляду. До таких розділів можна віднести розділ «Диференціальне числення», який може бути ілюстрований математичними моделями конкретних військових ситуацій. Цей розділ використовують для розв’язаннння задач на знаходження: швидкості кулі після пробиття перешкоди; кінетичної енергії снаряду; кутової швидкості колеса бойової машини; швидкості снаряду в початковий момент часу; прискорення руху снаряду; оптимальних розмірів циліндричного бака з пальним. Отже, вивчення цього розділу є важливою частиною для майбутніх офіцерів-командирів.

СЕКЦІЯ 2. Прикладні задачі в математиці

Бережной В.Д.
НТУ «ХПІ», м. Харків
Науковий керівник: **Тулученко Г.Я.,** *д.т.н., професор*

МЕТОД ФРОБЕНІУСА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ

Як відомо, метод Фробеніуса дозволяє знайти принаймні один степеневий ряд (що також носить ім'я Фробеніуса):

$$x^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k , \qquad (1)$$

який є розв'язком звичайного диференціального рівняння виду:

$$t^2 u''(t) + p(t) \cdot t \cdot u'(t) + q(t) u(t) = 0 , \qquad (2)$$

де $u(t)$ – шукана функція; відомі функції $p(t)$ та $q(t)$ є аналітичними в точці t=0 або є аналітичними в усіх інших точках, а в точці t=0 мають скінченну границю.

На кількість лінійно незалежних розв'язків рівняння (2) у вигляді степеневих рядів впливають корені його характеристичного рівняння. Наприклад, за наявності в характеристичного рівняння двох однакових коренів або коренів, які відрізняються на ціле число, крім, розв'язку виду (1) існує другий незалежний розв'язок виду:

$$x^{r_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + C \ln x \cdot x^{r_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Іншим німецьким математиком Лазарем Імануїлом Фуксом була розвинута теорія лінійних диференціальних рівнянь, яка визначає різні види особливих точок коефіцієнтів вказаних рівнянь та співвідношень між ними.

У точці без особливостей в однорідного лінійного диференціального рівняння порядку n існує фундаментальна система з n лінійного незалежних розв'язків у вигляді степеневих рядів. В особливій точці максимальна кількість лінійного незалежних розв'язків у вигляді степеневих рядів може бути меншою за порядок диференціального рівняння.

Широко відомим диференціальним рівнянням, до розв'язання якого застосовується метод Фробеніуса, є рівняння Бесселя [1]:

$$t^2 u''(t) + p(t) \cdot t \cdot u'(t) + \left(t^2 - \alpha^2\right) u(t) = 0 , \qquad (3)$$

де α – параметр. Рівняння Бесселя (3) виникає при переході до циліндричних або сферичних координат у рівнянні Лапласа та рівнянні Гельмгольца. Тобто вони застосовуються при моделюванні процесів поширення хвиль, розподілу статичних потенціалів. Наприклад, при моделюванні електромагнітних хвиль в циліндричному хвилеводі; процесів розповсюдження тепла в циліндричних тілах; коливань тонкої круглої мембрани; розподілу швидкостей частинок в заповненому рідиною циліндрі, що обертається навколо своєї осі тощо.

Іншим прикладом диференціального рівняння, до розв'язання якого застосовується метод Фробеніуса, є рівняння Матьє [2]. За допомогою рівнянь Матьє моделюють рух рідини в ємностях циліндричної форми з еліптичним перерізом.

Безпосередньому застосуванню методу Фробеніуса передує ланцюжок тотожних перетворень двовимірного хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0. \tag{4}$$

У рівнянні (4) переходять до еліптичних координат і застосовують метод відокремлення змінних, що, в свою чергу, приводить до двох рівнянь Матьє. До отриманих рівнянь Матьє застосовують тригонометричні підстановки, наприклад:

$$x = \sin^2 t \quad \text{або} \quad x = \cos^2 t.$$

І вже до розв'язання останнього рівняння залучають метод Фробеніуса.

Українській науковиці, професору КНУ Латишевій К.Я. (1897–1956) вдалося в загальному вигляді знайти та довести умови існування нормальних розв'язків виду:

$$x^\alpha \cdot \exp\left(Q(x)\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{x^\nu},$$

де $Q(x)$ – цілий многочлен, –

у лінійних диференціальних рівнянь типу Фукса довільного порядку *n*.

Також Латишева К.Я. узагальнила метод Фробеніуса для розв'язування систем диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Література

1. Torabi Asadullah (2020). Frobenius Method for Solving Second-Order Ordinary Differential Equations. Journal of Applied Mathematics and Physics. **8**, 1269–1277.
2. Тасмамбетов Ж. Н. (2013). О построении решения уравнения Матье методом Фробениуса-Латышевой. *Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика*. **3**(8), 76–86.
3. Латышева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С. (1974). Нормально-регулярные решения и их приложения. К.: Вища школа.

М.С. Батальщиков
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Р.А. Ковальчук****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ВИЗНАЧЕННЯ ЗВЕДЕНИХ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ДВОПОРШНЕВИХ НАСОСІВ МЕХАНІЗМІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Дослідження динаміки насосних агрегатів поршневих насосів безпосередньо пов'язане з визначенням їх зведених моментів інерції як функцій кутів повороту корінних валів. Розглянемо задачу визначення зведеного моменту інерції поршневого насоса з двома кривошипно-повзунними механізмами. Дана задача розв'язується з урахуванням взаємного кутового зміщення кривошипів, положення центрів мас рухомих ланок, а також інерційних властивостей усіх елементів механізмів.

Розглянемо схему кривошипно-повзунного механізму поршневого насоса, зображену на рис.1. Тут S_1 і S_2 – центри мас ланок OA та AB. Центр маси поршня розміщений у точці B. Розміри елементів механізму позначено як $OS_1=a_1$, $AS_2=a_2$, $OA=l_1$, $AB=l_2$; маси ланок OA, AB і поршня – як m_1, m_2, m_3.

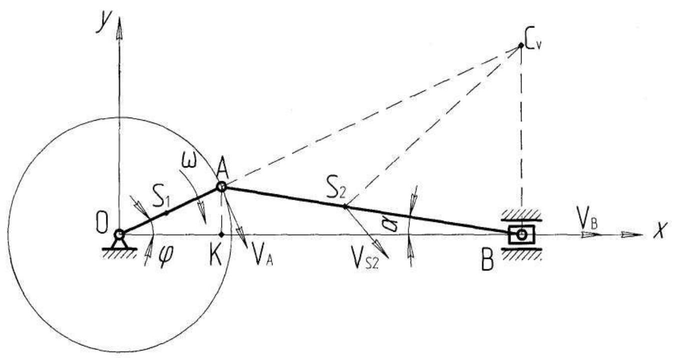


Рис.1. Схема кривошипно-повзунного механізму насоса

Запишемо вираз кінетичної енергії механізму у вигляді

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (1)$$

де T_1, T_2, T_3 – кінетичні енергії ланок OA, AB і повзуна,

$$T_1 = \frac{m_1 v_{S1}^2}{2} + \frac{J_{S1}\omega_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} + \frac{J_{S2}\omega_2^2}{2},\ T_3 = \frac{m_3 v_{S3}^2}{2}$$

(2)

причому, J_{S1}, J_{S2}, ω_1, ω_2 – центральні моменти інерції і кутові швидкості ланок OA і AB; v_{S1}, v_{S2}, v_{S3} – швидкості поступального руху центрів мас відповідних ланок (зауважимо, що $v_{S3}= v_B$).

Беручи до уваги, що швидкість центра маси кривошипа становить

$$v_{S1} = \omega_1 a_1,$$

кінетичну енергію першої ланки подаємо як

$$T_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2}, \qquad (3)$$

де $J_1=J_{S1}+m_1a_2^2$ – момент інерції кривошипа відносно його осі обертання.

З урахуванням (1)–(3) кінетичну енергію механізму записуємо у вигляді

$$T_2 = \frac{J_1 \omega_1^{\;2}}{2} + \frac{m_2 v_{S2}^{\;2}}{2} + \frac{J_{S2} \omega_2^{\;2}}{2} + \frac{m_3 v_{S3}^{\;2}}{2}. \tag{4}$$

Замінюючи кривошипно-повзунний механізм однією ланкою зі змінним моментом інерції, кінетичну енергію механізму подаємо як

$$T = \frac{J_{ЗВ} \omega_1^{\;2}}{2}, \tag{5}$$

де $J_{ЗВ}$ – зведений до ланки *OA* момент інерції механізму.

З урахуванням формули (4), (5) отримуємо залежність зведеного моменту інерції механізму від кута повороту кривошипа,

$$J_{ЗВ} = J_1 + m_2 \left(\frac{v_{S2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_{S3}}{\omega_1} \right)^2. \tag{6}$$

Величини v_{S2}, ω_2 та v_{S3}, що фігурують у формулі (6), необхідно виразити через кут повороту ланки зведення φ та кутову швидкість ω_1.

Кути повороту ведучих ланок кривошипно-повзунних механізмів двопоршневого насоса зв’язані з кутом повороту корінного вала насоса φ таким чином:

для двоциліндрового насоса односторонньої дії

$$\varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = \varphi + \pi;$$

для двоциліндрового насоса двосторонньої дії

$$\varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Одержана загальна формула для визначення зведеного моменту інерції насоса дає можливість оцінювати вплив мінливості інерційної характеристики на перебіг перехідних та усталених режимів роботи насосних агрегатів спеціальних машин.

М.С. Дуда
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Х.І. Ліщинська****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗПОДІЛІ ЗАСОБІВ УРАЖЕННЯ СЕРЕД ЦІЛЕЙ ПРОТИВНИКА

Важливу роль відіграє математика у вирішенні військово-прикладних завдань, де дуже часто зустрічаються задачі, які прийнято називати задачами розподілу. Це перш за все задачі розподілу засобів підсилення, цілерозподілу і транспортні задачі, задачі вибору оптимального поєднання різноманітних бойових засобів в підрозділах, побудови оптимальної оборони, вибору оптимальної системи озброєння. В задачах розподілу необхідно виконати певні операції за обмеженої кількості ресурсів, достатньої для їх виконання, причому деякі операції можна виконувати різними способами, використовуючи різні кількості і комбінації ресурсів. Основним завданням є вибір такого розподілу ресурсів, за якого або мінімізуються загальні витрати, або максимізується певна міра ефективності.

Серед математичних методів розв’язування задач, які передбачають знаходження оптимального розв’язку, важливе місце займає метод динамічного програмування, який застосовується для розв’язання найрізноманітніших військових, технічних і економічних задач. Однією з них, надзвичайно важливою при плануванні та управлінні бойовими операціями, є задача оптимального розподілу засобів ураження серед різних цілей ворога. Її розв’язок можливо отримати за допомогою так званого методу максимального елемента.

Постановка задачі. Угрупування ворожих військ *А* веде наступ. Бойове завдання угрупування *А* полягає в прориві оборони угрупування *В*. Угрупування *В* веде оборону маючи за завдання нанесення противнику максимальних втрат, недопущення можливості прориву своїх позицій і їх втримання.

Виходячи з постановки задачі та тактичної обстановки необхідно побудувати математичну модель, що описувала б бойові дії між ворогуючими угрупуваннями. Максимум втрат, які б мав понести противник, а саме максимум математичного сподівання, виступатиме у якості показника ефективності.

Нехай M – число різних засобів ураження, що є в наявності в угрупування *В*; N – число цілей угрупування *А*, які повинні бути уражені. Відомі ймовірності P_{ij} ураження j-ої цілі i-ою гарматою, що задаються у вигляді матриці $P=\left\|P_{ij}\right\|$ $\left(i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}\right)$. Також задана важливість кожної цілі C_j.

Випадкова подія A_j передбачає, що деякі з M гармат, що були спрямовані в j-ту ціль, уразили її, тобто справедливою є хоча б одна з випадкових подій A_{ij} $\left(i=\overline{1,M}\right)$. Протилежними є наступні події: j-та ціль уражена принаймі одною з гармат та жодна з гармат не уразила j-ту ціль. Тоді матимемо

$P(A_j)+P(\overline{A_{1j}}\,\overline{A_{2j}}\dots\overline{A_{Nj}})=1$. Відповідно до теореми множення двох взаємно незалежних подій отримаємо $P(A_j)=1-\prod_{i=1}^{M}P(\overline{A_{ij}})$. Це можна записати як $p_j=1-\prod_{i=1}^{M}(1-p_{ij})^{x_{ij}}$, де $x_{ij}=1$ для тих i-их гармат, що направлені в j-ту ціль і $x_{ij}=0$ для тих i-их гармат, що в неї не направлені.

Цільова функція (математичне сподівання втрат, які будуть нанесені противникові) визначатиметься як $\Phi(X)=\sum_{j=1}^{N}C_j p_j$. З урахуванням того, що максимум втрат розподілиться тільки по S цілям із N наявних, матимемо математичну модель у вигляді функції $\Phi(X)=\sum_{j=1}^{S}C_j\left(1-\prod_{i=1}^{M}(1-p_{ij})^{x_{ij}}\right)$, що визначає протидію угрупувань A і B.

Отже, необхідно отримати такий розподіл, тобто матрицю-вектор $X^*=\left\|x_{ij}^*\right\|$ розмірності N, при якому функція $\Phi(X)$ досягає максимуму за умови $\sum_{j=1}^{S}\sum_{i=1}^{M}x_{ij}\le M$ і додаткових умовах: $0\le(q_{ij}=1-p_{ij})\le 1$, $K_j>0$, $j=\overline{1,S}$, $i=\overline{1,M}$.

Для знаходження оптимального розв'язку задачі використано метод максимального елементу коли на довільному кроці процесу розподіленою є лише одна одиниця з ресурсу, тобто це означає, що на певному кроці одиничний приріст надається тільки одному елементу шуканої матриці $X^*=\left\|x_{ij}^*\right\|$. Тобто після усіх кроків алгоритму, число яких рівне M, увесь ресурс буде розподіленим і задача буде розв'язаною.

Як приклад, розглянута задача про протидію двох угрупувань, де ураженню підлягають $N=6$ цілей угрупування A, при цьому угрупування B має у своєму складі $M=6$ засобів ураження. Вважалося, що серед усіх цілей $S=3$ є найбільш важливими з відповідними коефіцієнтами важливості 0,5, 0,3 та 0,2. Визначено значення цільової функції $\Phi\approx 59{,}1$, яке для даної задачі можна вважати реалістичним з урахуванням вибраних у ній засобів ураження.

Розглянута у роботі задача відіграє важливу роль при плануванні і управлінні бойовими операціями при протистоянні воюючих сторін. Це вказує на необхідність широкого застосування математичних методів у військовій справі.

Література

1. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. Для студ. Вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов, В.Р. Кулян, О.О. Юнькова; За ред. О.О. Юнькової. – К.: МАУП, 2006. – 184 с.

М.І. Птах
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
*Науковий керівник: **Л.Д. Величко**, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ВОДОЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВІЙСЬКОВИХ ПІДРОЗДІЛІВ

Водопостачання військ у місцях постійної дислокації або у польових умовах є надзвичайно важливою справою. Воно об'єднує комплекс заходів, за допомогою яких задовольняються потреби військовослужбовців у будь яких умовах. Щоб реалізувати водопостачання необхідне поєднання декількох заходів – добування води, очищення та обеззараження її, транспортування води до місць дислокації військ, розподіл її між споживачами та створення системи водовідведення.

Спрага, є нормальною реакцією організму на брак рідини в організмі. Неможливість вгамувати спрагу стає великою перешкодою в діяльності людини. Відсутність води і наявність спраги в людини суттєво впливає на її емоційний стан. Бажання вгамувати спрагу може викликати в людини марево. Якщо втрати води в організмі перевищать 10% від початкової маси тіла, то появляться перші ознаки зневоднення – слабне зір і слух, пересихає в горлі, людина періодично втрачає свідомість. З подальшою відсутністю води різко розбалансовується центральна нервова система, відбувається згущення крові, порушується серцева діяльність, все це приводить до летального наслідку людини. Необхідно відмітити, що при низьких температурах ступінь обезводнення, яка приводить до летального наслідку, може досягати 25%.

У роботі досліджується динаміка руху бурової колони, яка поєднує привідний механізм, шнек і буровий наконечник (гвинтовий або лопатний). Моделюється бурова колона двох масовою механічною системою з пружним елементом.

Розглядається динаміка механічної системи, яка складається з привідного механізму, пружного елементу та бурового наконечника. Для опису динамічних процесів використовується рівняння Лагранжа другого роду.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ \left(i = \overline{1,n}\right).$$

С. А. Саган
Городоцький НВК №2 І-ІІІ ступенів «ЗЗСО І ступеня- гімназія»
Науковий керівник вчитель ***М.Л. Канафоцька***

ЗАДАЧА МОНОТОННОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

У літературі з обробки експериментальних даних під монотонним згладжуванням розуміються дві різні процедури. В результаті виконання першої процедури отримують залежність, яка зберігає проміжки монотонності експериментальної залежності; а в результаті виконання другої процедури – залежність, яка ігнорує порушення монотонності експериментальної залежності.

У даному дослідженні увагу приділено процедурі монотонного згладжування відповідно до другого підходу.

Відзначимо, що найбільш відомі процедури згладжування на основі: різних модифікацій ковзного середнього, ковзаючої медіани, кумулятивної суми і т.д. – не дають бажаного ефекту, оскільки не забезпечують монотонність результуючої послідовності.

Апроксимація експериментальних залежностей функціями, які є лінійними комбінаціями монотонних (на досліджуваному проміжку) функцій, не призводить до бажаного результату. Навіть якщо базисні функції самі по собі зберігають монотонність на даному проміжку, важко запобігти таким значенням коефіцієнтів їх лінійної комбінації, які б не призводили до порушення бажаної монотонності.

У роботах [1–2] для побудови монотонної апроксимуючої функції пропонується такий підхід.

Припустимо, що $W(t)$ – це звичайна апроксимуюча функція, на яку не накладено жодних обмежень, крім $W(t_0) = 0$, де t_0 – початкова точка проміжку згладжування. Ця вимога не є обтяжливою, оскільки її виконання легко досягається перетворенням зсуву експериментальної послідовності.

Складна функція $\exp(W(t))$ є завідомо додатною функцією. Інтеграл зі змінною верхньою границею від додатної функції є, в свою чергу, функцією, яка зростає. Визначимо функцію монотонного згладжування $m(t)$ як

$$m(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \int_{t_0}^{t} W(u)\,\mathrm{d}u, \tag{1}$$

де β_0 та β_1 –константи, які оцінюються в результаті розв’язання задачі мінімізації похибки апроксимації.

Крім цих двох констант, необхідно також оцінити коефіцієнти функції, яка визначає лінійну комбінацію базисних функцій. За базисні функції часто обирають функції базису B-сплайна.

Оцінка всіх коефіцієнтів апроксимуючої функції (1) включає чисельну оптимізацію критерію підбору і, отже, вимагає значно більших об’ємів обчислень, ніж звичайний процес згладжування даних.

Описаний алгоритм реалізований у програмному модулі fda [1–2], який має адаптовану версію для використання у складі СКМ MATLAB.

Прикладом задачі, яка потребує виконання монотонної апроксимації експериментальної залежності, є задача аналітичного опису кривих титрування. Криві титруванні відображають залежність pH розчину, що титрується, від об’єму долитого розчину, називають кривими титрування. Криві титрування мають характерний сходинкоподібний профіль. Вони є графіками монотонних функцій.

Точки перегину таких графіків є точками еквівалентності. Кількість точок еквівалентності дорівнює числу основності кислот (кислотності лугів) або сумі чисел основності суміші кислот (кислотності суміші лугів).

З математичної точки зору необхідно розв’язати таку задачу апроксимації: наблизити монотонною функцією емпіричну залежність $\left(V_i;\, pH_i\right)$, $i=\overline{1;N}$, N – кількість експериментальних точок.

Методи монотонної апроксимації можуть також застосовуватися для моделювання логістичним залежностей показників соціально-економічних систем. Під логістичним характером зміни показника розуміють випадок, коли показник проходить у своєму розвитку кілька стадій. Аргументом логістичної залежності найчастіше є час. Ще однією сферою застосування логістичних кривих є опис процесів, які відбуваються під час розвитку технологій. Логістичний характер носить і динаміка розвитку інфраструктури та промисловості.

Найчастіше розглядають лише дві моделі логістичної динаміки Ферхюльста та Гомпертца. Для параметричної ідентифікації цих моделей зазвичай рекомендують використовувати методи, які передбачають апріорне експертне призначення деяких параметрів (зазвичай рівня насичення або спаду).

Зазначені методи ідентифікації, однак, не задовольняють сучасним вимогам щодо точності моделювання. Симетричні логістичні тренди більшою мірою характерні для явищ і процесів неживої природи та техніки, а асиметрія переважно відноситься до живої природи, до соціальних явищ та процесів. Отже, при дослідженні таких процесів доцільним є застосування методів монотонної апроксимації складних монотонних кривих.

Література

1. Ramsay J. O., Silverman B. W. (2005). Functional Data Analysis. Springer.
2. Ramsay J. O., Silverman B. W. (2002). Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies. Springer.
3. Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю. Я. Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології. К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», ТОВ «Фірма «Періодика»». 2004. 220 с.

В.С. Глухова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Е. Васильєва****, доктор технічних наук, професор кафедри ПМіМ*

РЕГРЕСІЯ ДО СЕРЕДНЬОГО В ПОЖЕЖНО-РЯТУВАЛЬНІЙ СПРАВІ

З вищої математики нам відомо, що регресія до середнього–це статистичне поняття щодо будь-якого явища, коли після отримання екстремальних значень у першому вимірюванні, у другому через випадковість, значення вже наближаються ближче до середніх. Існують три основні задачі регресивного аналізу: визначення ступеня детермінованості варіації критеріальної (залежної) змінної предикаторами (незалежними змінними); прогнозування значення залежної змінної за допомогою незалежної; визначення окремих незалежних змінних уваріацію. Регресійний аналіз не можна використовувати для визначення наявності зв'язку між змінними, оскільки наявність такого зв'язку і є передумовою для застосування аналізу.

Нехай прикладом буде заняття з дисципліни «Підготовка пожежного рятувальника» по само рятуванню з вікна четвертого поверху навчальної башти за допомогою рятувальної мотузки. Пожежник-рятувальник закріплює кінець рятувальної мотузки за конструкцію будівлі. Після цього він хапає лівою рукою карабін, а правою – закріпленим кінцем мотузки робить два оберти від себе. Після чого надягає краги та закріплений кінець мотузки тримає лівою рукою, а вільний - правою. Не випускаючи з рук мотузки, обережно вилазить з вікна і розпочинає повільний спуск. Під час спуску ногами відштовхується від стіни, оминаючи віконні прорізи або обходить їх з боків. Швидкість спуску регулюється притисканням мотузки до себе. Зазвичай викладач-інструктор ділить навчальну групу на дві і працює з ними по черзі. Перша група, нехай А, Друга група – В.

Під час роботи з групою А інструктор-викладач робить зауваження й покарання у вигляді 10 присідань. А при роботі з групою В - не зважає на невдачі і хвалить за виконання завдань.

На наступному занятті групи обмінюються місцями. Після кожного спуску їх результати занотовують у журнал. Згідно цих данихбудують діаграми. Отже, за результатами, які отримані з даного експерименту, ми можемо розрахувати регресію до середнього. Тобто суть експерименту полягає у відсутності впливу на результат як похвали, так і покарання. На фоні даного прикладу за допомогою математики ми відслідковуємо відсутність залежності від психологічного навантаження щодо виконання поставленої задачі.

Література

1. ДжорданЕленберг. Як ніколи не помилятися. Сила математичногомислення. – К.: Наш формат, 2017 – 408с
2. Гісь О. Продуктивнемислення / О. Гісь // – 2014. – № 2. – С. 7−9.
3. D. Kahneman and A. Tversky, «On the Psychology of Prediction», Psychological Review 80 (2003): 237–251
4. W. Edwards, «Conservatism in Human Information Processing», in Formal Representation of Human Judgment, ed. B. Kleinmuntz (New York: Wiley, 1998): 17–52.
5. D. Kahneman and A. Tversky, «Subjective Probability
6. КеллiМакгонiгал. Сила волі. Шлях до влади над собою. – К.: Наш формат,2017. – 264с

Б.В. Тягай
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***О.В. Білаш****, кандидат економічних наук, доцент*

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Інтегральне числення – це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються інтеграли, їх властивості, методи обчислення та застосування. Цей розділ виник із необхідності розв'язання таких двох основних задач: задачі про визначення шляху, який пройде тіло за заданий проміжок часу, коли відомо змінну швидкість руху; задачі на обчислення площі та об'єму геометричних фігур. Варто зазначити, що вивчають визначений і невизначений інтеграл, причому останній був відкритий значно пізніше і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. В цей час було встановлено зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Розділ інтегрального числення набув широкого використання і при розв'язуванні військово-прикладних задач. Наведемо декілька задач військового спрямування розв'язування яких передбачає використання інтегрального числення.

Задача 1. Снаряд рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=12t-3t^2$. Визначити закон руху тіла, якщо $s(3)=5$.

Розв'язання.

Враховуючи, що $s(t)=\int v(t)dt$, отримаємо

$$s(t)=\int v(t)dt=\int\left(12t-3t^2\right)dt=6t^2-t^3+C\,.$$

Для визначення сталої C скористаємось початковою умовою $s(3)=5$. Підставляючи у формулу шляху значення $t=3$ та $s=5$, визначаємо $C=-22$. Отже, закон руху тіла буде мати вид

$$s(t)=6t^2-t^3-22\,.$$

Ця задача приводить до поняття первісної і розкриває зміст довільної сталої C у загальному вигляді первісної.

Задача 2. Водій бойового транспортного засобу загальмував у той момент, коли швидкість транспортного засобу дорівнювала 36 $км/год$. Знайдіть шлях, який проїде автомобіль за час від $t_1=3с$ до $t_1=10с$, якщо при ввімкнених гальмах транспортний засіб рухається із прискоренням $a=5м/с^2$.

Розв'язання.

Під час розв'язання цієї задачі необхідно використати формулу швидкості $v(t)=v_0+at$. Окрім того, переведемо 36 $км/год$ в $м/с$:

$$36\frac{км}{год}=\frac{36\cdot 1000}{3600}\frac{м}{с}=10\frac{м}{с}.$$

Тоді визначимо

$$v(t)=10-0{,}5t\ \ \frac{м}{c}.$$

Враховуючи, що $s(t)=\int v(t)dt$, отримаємо

$$s(t)=\int\limits_4^{10}(10-0{,}5t)dt=10t-\frac{t^2}{4}\Bigg|_4^{10}=100-25-40+4=39(м).$$

Застосування інтегрального числення включають матеріал, пов'язаний із обчисленням довжин кривих, площ плоских фігур, об’ємів тіл обертання, маси і центра маси розподіленої вздовж матеріальної дуги кривої чи на матеріальній пластині.

Задача 3. Війська противника знаходяться на території, яка має площу фігури, обмеженої лініями $y=x$, $y=x^2-3x$. Знайти цю площу.

Розв’язання.

Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв’яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y=x^2-3x \\ y=x \end{cases}$,

$x^2-3x=x\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x_1=0, x_2=4$.

Оскільки $x>x^2-3x$ на відрізку $[0;4]$, то

$$S=\int\limits_0^4\left(x-\left(x^2-3x\right)\right)dx=\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)dx=\int\limits_0^4 4xdx-\int\limits_0^4 x^2dx=4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4+$$

$$+2\left(4^2-0\right)-\frac{1}{3}\left(4^3-0\right)=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

Задача 4. Башта конденсатора, висота якої $H=48\ \ м$. Обчисліть об’єм башти, утвореного поворотом навколо осі Ox заштрихованої області S площини, яка обмежена графіками функцій $f(x)=12\sqrt{1+\frac{x^2}{12^2}}$, $x=-36$, $x=12$ і віссю Ox.

Розв’язання.

$$V=\pi\int\limits_{-36}^{12}f^2(x)dx=\pi\int\limits_{-36}^{12}144\left(1+\frac{x^2}{24^2}\right)dx=144\pi\left(x+\frac{1}{24^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-36}^{12}=$$

$$=144\pi\left(x+\frac{x^3}{1728}\right)\Bigg|_{-36}^{12}=1444\pi\cdot 76=10944\pi\ \text{(куб.од.)}.$$

Отже, інтегральне числення є важливим розділом математичного аналізу, який використовується для розв’язання військово-прикладних задач. Вивчення інтегрального числення дає змогу обґрунтовано приймати рішення при виконанні бойового завдання, використовуючи при цьому кількісні співвідношення між різними показниками, приймати ефективні рішення, які сприятимуть максимальному використанню ресурсів і мінімізації витрат.

Б.А. Романик
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИКОРИСТАННЯ РІВНІВ ФІБОНАЧЧІ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗВИТКУ ЕКОНОМІК ОКРЕМИХ КРАЇН

Відомий італійський математик епохи Відродження Л. Фібоначчі дослідив послідовність чисел, в яких кожний член, починаючи з другого, представляє собою суму двох попередніх її членів. Пізніше цей ряд чисел був названий на його честь послідовністю Фібоначчі. Між собою числа Фібоначчі пов'язані «золотою пропорцією», або «золотим перерізом». Це ірраціональний коефіцієнт 0,618. Починаючи з четвертого члена, кожне попереднє число менше за наступне у 0,618 разів. Якщо будь-який член ряду Фібоначчі розділити не на наступне число, а на число через один, то отримаємо співвідношення, наближене до 0,382. А якщо візьмемо третій член ряду після вихідного, то співвідношення між ними буде приблизно 0,236.

Ми розглянемо можливі варіанти зростання чи спадання рівня розвитку національної економіки за допомогою чисел і рядів Фібоначчі.

Методика прогнозних розрахунків з використанням чисел Фібоначчі будується на тому, що чисельне співвідношення руху і відкату повинно давати коефіцієнти «золотого перерізу», тобто при русі – 1,618; 2,618; 4,236, при відкаті – 0,618; 0,382; 0,236. Ці числові значення і формують ті важливі рівні, про які ринок «згадує» в процесі зміни цін. Числа Фібоначчі використовуються при розрахунку рівня відкату або відскоку. Оскільки ціни не можуть безперервно зростати або падати, після кожної їх зміни існує відкат тієї або іншої величини в протилежну сторону (рівні корекції).

Для прогнозування змін у розвитку національної економіки за допомогою фібо-рівнів взято узагальнюючий індикатор ланцюгового зростання ВВП, що широко застосовується в економічному аналізі та статистиці. Саме зростання, а не обсяг ВВП, є визначальним критерієм для побудови рівнів, оскільки відображає відносні коливання в економіці та дозволяє використовувати відсоткову шкалу, як і у випадку з фібо-рівнями. Валовий внутрішній продукт як економічна категорія є одним з найбільш зручних об'єктів наведеного нижче аналізу, оскільки цій категорії притаманні основні особливості (або складові) її динаміки, а саме: - використання лінії тренду (або довгострокової тенденції зміни ВВП, що відображає динаміку ділової активності в суспільстві); - річні коливання та їх природне й антропогенне походження, а також іррегулярні коливання, що виникають унаслідок ролі випадковості в економічному розвитку; - наявність точок біфуркації за наявності неоднозначних чинників впливу; - циклічні коливання (цикли у декілька років, на основі яких можливо зробити річний прогноз або прогноз на декілька років)

Для порівняльного результату на основі використання фібо-рівнів доцільно провести аналіз й побудувати прогнозні лінії декількох країн, зокрема України та кризової Іспанії, а також деяких країн, що входять до «великої двадцятки» (G-20) (3).

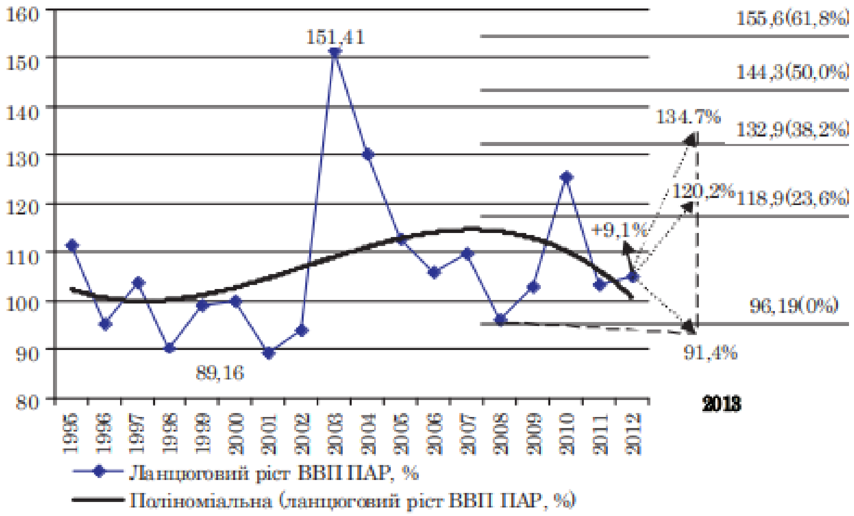


Рис. 1. Зміна зростання ВВП ПАР та прогнози зростання і падіння відносних показників ВВП на 2012 рік, розроблено за даними

Прогноз доцільно робити, спираючись на положення крайньої точки економічного циклу, яка на графіку є точкою виходу штрихованої прогнозної лінії зростання (2008 р.). Процес розрахунку положення певної точки на графіку з урахуванням рядів Фібоначчі для циклу 2001–2003 рр. виглядає так:
Значення 2003 року/Значення 2001 року – 1 = 151,41/89,16 – 1= 1,698=0,698=69,8%. За класичною схемою поведінки графіка при перетині рівня 61,8%, він змінює свій напрям, розвертаючись і розпочинаючи новий напрям руху, тобто економічний цикл

Рівні Фібоначчі дали змогу по-новому представити прогнозні тенденції зростання ВВП різних країн, враховуючи дані попередніх економічних циклів, починаючи з 1994–1996 років. Рівні Фібоначчі демонструють конкретні цифри зростання та падіння з огляду на ті особливості, які лежать в основі їх розрахунку. Однак, незважаючи на більш розширений, порівняно із загальноприйнятим трендовим, аналіз, представлені прогнози можна вдосконалювати та пролонговувати з урахуванням поведінки попередніх циклів та їхнього впливу на ситуацію завтрашнього дня.

Література:

1. Лукашевич В.О. «Все про фінансові ринки» - 2001
2. Соціально-економічний розвиток України за 2011 рік / Держкомстат України. – К., 2012 // www.ukrstat.gov.ua

3. Рівні Фібоначчі // Статтья про математику для трейдинга, 2012 // lib.stepenko.com
4. Gately, E. (1998). Forecasting Profits Using Price and Time. New Jersey, Wiley

Р.О. Хміляр
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник ***Б.І. Сокіл****, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ЗАХИСНИХ СПОРУД ПІД ДІЄЮ ВИБУХОВОЇ ДІЇ

З метою захисту особового складу, техніки від вибухових та ударних дій снарядів застосовують різного роду захисні споруди. Ефективність їх захисної спроможності залежить від багатьох чинників: матеріалу з якого виготовлені елементи споруди, їх компоновка, форми, способи закріплення та ін. З метою підвищення захисної спроможності захисних споруд, зменшуючи при цьому матеріальні затрати, в останнє десятиліття почали використовувати “багатошарові захисні” споруди. У таких конструкціях окремі “шари” взаємодіють між собою за допомогою пружних прошарків. Таким чином, ударна дія вибуху за певним законом розподіляється між окремими шарами, зменшуючи ефективну дію на конструкцію в цілому. З метою оцінки захисної спроможності такої багатошарової конструкції у роботі на прикладі найпростішої її двоелементної моделі:

а) за умови що елементи захисної споруди можна моделювати одновимірними пружними тілами незмінного поперечного перерізу, побудовано математичну модель динамічного процесу у захисних елементах;

б) за фізично обґрунтованих припущень побудовано аналітичний її розв’язок;

в) проведено оцінку впливу вибухової дії на елемент захисної споруди.

Щодо математичної моделі динамічного процесу елементу захисної споруди від вибухової дії, то вона являє собою крайову задачу для диференціального рівняння Брезертона із нерегулярною правою частиною. Саме нерегулярність враховує ударну вибухову дію. Вона змодельована за допомогою дельта-функцій.

Для випадку шарнірного закріплення кінців захисного елементу отримано:

- власні частоти коливань підкріпленого елементу;
- співвідношення для оцінки прогину підкріпленого елементу у залежності від величини вибухової дії та місця її дії;
- з умови міцності – площу поперечного перерізу для неруйнівної дії вибуху.

Показано, що найбільш небезпечними діями вибуху на захисні елементи є ті, які діють ближче до середини захисної конструкції, а отже, захисні конструкції бажано виготовляти змінного поперечного перерізу.

Д.С. Кірюшин
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Е. Васильєва*** *, доктор технічних наук, професор кафедри ПМіМ*

МАТЕМАТИКА ЯК БАЗА ДО ВИВЧЕННЯ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ

Я часто зустрічав людей, які казали: «Навіщо мені та математика? Мені знання алгебри, геометрії не знадобляться по життю». Математика - це не просто набір формул, чисел та задач. Математика перш за все вчить нас мисленню. Як це відбувається? При поглибленому вивченні математичних наук наш мозок сам по собі налаштовується саме на аналітичний тип мислення, що на мою думку є неймовірною базою для вихованню в себі критичного мислення.

А. Я. Хінчин, відомий математик, що глибоко цікавився проблемами навчання математиці, вказав на **чотири характерні ознаки математичного мислення:**

- 1. "доведене до межі домінування логічної схеми судження...";
- 2. "... лаконізм, свідоме прагнення завжди знаходити найкоротший, ведучий до даної цілі логічний шлях, безжалісне відкидання всього, що не є абсолютно необхідним для бездоганної аргументації";
- 3. "…чітка розчленованість ходу аргументації";
- 4. чітка точність символіки. Воно виховує в нас таку якість як гнучкість мислення, тобто цілеспрямовано змінювати способи розв'язування пізнавальної проблеми, легкість переходу від одного шляху вирішення проблеми до іншого, вміння виходити за межі звичного способу дій, знаходити нові способи та методи при зміні заданих умов.

Література:

1. https://ru.osvita.ua/vnz/reports/psychology/29227/

2. W. Edwards, «Conservatism in Human Information Processing», in Formal Representation of Human Judgment, ed. B. Kleinmuntz (New York: Wiley, 1998): 17–52.

3. Джордан Еленберг. Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення. – К.: Наш формат, 2017 – 408с

Р.Ю. Чорнозуб
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: ***Н.М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

НАЙПРОСТІШІ ДИФЕРЕНЦІЛЬНІ РІВНЯННЯ У ВІЙСЬКОВО ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Теорія диференціальних рівнянь займає важливе місце серед інших розділів математики. Поєднання математичного та прикладного аспектів робить її привабливою не лише для теоретиків, але й для тих, хто займається застосуванням математики в різних галузях знань. Теоретична механіка, опір матеріалів, гідравліка, теорії механізмів та машин, економіка, біологія, медицина – далеко не повний перелік наук, де використовуються диференціальні рівняння. Різні типи диференціальних рівнянь застосовуються й при розв'язуванні військово-прикладних задач. У роботі наведено приклад задачі, математичною моделлю якої є задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Приклад. У дні циліндричного повного резервуара, в якому зберігаються запаси дизельного палива військового підрозділу, внаслідок влучання осколка від снаряда утворилася щілина. Швидкість витікання палива пропорційна висоті його рівня в резервуарі. Визначити час витікання половини палива, якщо впродовж перших 30 хв витекло 15 % від того, що містилося в резервуарі.

Розв'язання

Нехай R – радіус резервуара, h – його висота, x – висота рівня палива в резервуарі через t годин після утворення щілини. Тоді об'єм палива в резервуарі в момент t становить $\pi R^2 x$, а швидкість зміни цього об'єму – $\pi R^2 \frac{dx}{dt}$. За умовою задачі вона пропорційна до kx, де k – коефіцієнт пропорційності, тому диференціальне рівняння задачі

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx.$$

Отримано диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розділивши їх, приходимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\pi R^2 \frac{dx}{x} = kdt.$$

Застосовуючи метод безпосереднього інтегрування, знаходимо

$$\pi R^2 \ln x = kt + C.$$

За умовою задачі у початковий момент часу резервуар був повністю заповнений, тому $x(0) = h.$ Використовуючи цю умову, одержимо $\pi R^2 \ln h = k \cdot 0 + C,$ звідки $C = \pi R^2 \ln h.$ Це означає, що висота рівня палива в резервуарі змінюється за законом $\pi R^2 \ln x = kt + \pi R^2 \ln h$ або

$$\pi R^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

За умовою задачі впродовж перших 30 хв витекло 15 % від того, що містилося в резервуарі, тому висота рівня палива в резервуарі через перших 0,5 год становить 85 % від початкового рівня, тобто $x(0,5) = 0,85h.$ Використовуючи цю умову в рівнянні для рівня висоти палива в резервуарі, отримаємо $\pi R^2 \ln \frac{0,85h}{h} = k \cdot 0,5.$ Це означає, що $k = 2\pi R^2 \ln 0,85.$

Час t_0 витікання половини палива визначаємо з умови $x(t_0) = \frac{h}{2}.$ Тоді $\pi R^2 \ln \frac{x(t_0)}{h} = t_0 \cdot 2\pi R^2 \ln 0,85$ або

$$t_0 = \frac{\pi R^2 \ln 0,5}{2\pi R^2 \ln 0,85} = \frac{\ln 0,5}{2 \ln 0,85} = \frac{0,69}{2 \cdot 0,16} = 2,16\ \textit{год} \approx 2\ \textit{год} 10\ \textit{хв}.$$

Отже, половина палива витече з резервуара за 2 *год* 10 *хв*.

Розв’язання задач такого плану є основою для аналізу реальних ситуацій, для прийняття ефективних управлінських рішень, збереження числа особового складу тощо.

Л.В. Варунок
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Е. Васильєва****,доктор технічних наук, доцент, професор кафедри прикладної математики та механіки*

РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ УРОКІВ МАЕМАТИКИ

Для того щоб зрозуміти як поєднується математика і критичне мислення, спочатку розглянемо поняття «мислення» і «критичне мислення».

Мислення –процес перетворення фактів, інформації, емоцій тощо на цілісне й упорядковане знання.

Критичне мислення – це наукове мислення, суть якого є в ухваленні ретельно обміркованих рішеннях. Йому притаманні такі властивості як усвідомленість та самовдосконалення. Навички критичного мислення дають змогу не розгубитися у перенасиченом уінформацією середовищі й не піддаватися маніпуляціям.

Критичне мислення і математика тісно пов’язані. Починаючи від методів у критичному мислені, як от «метод якорування», де за допомогою чисел людину прив’язують до певного числа, до розвитку критичного мислення у дітей для становлення їх особистості як усвідомленої та мислячої, а допомогою для уроків математики. Критичне мислення формується та розвивається під час опрацювання інформації, розв’язання задач та проблем, оцінювання ситуації, вибору раціональних способів діяльності. Тому уроки математики створюють плідні умови для формування та розвитку критичного мислення.

Для цього викладачі використовують різні методи. Наприклад, для розв’язання певної задачі пропонується така система вирішення «подумай – доведи – порівняй – відгадай – зроби висновки». На уроках з теми «Додавання та віднімання раціональних дробів з різними знаменниками» учні заповнюють таблицю «ЗХД», тобто З – це те що вони знають по цій темі, Х – що вони хочуть знати і Д – це те, що вони дізнались. На уроках геометрії можна створити таблицю для вивчення фігур і їх властивостей, де за допомогою критичного мислення учні зможуть заповнити які саме властивості підходять тій чи іншій фігурі.

Також є безліч прийомів у критичному мисленні, які використовуються для вивчення математики, тому обидві науки завжди будуть тісно пов’язані.

Література:

1. Деніел Канеман. Мислення швидке і повільне – К. Наш формат, 2017. – 480с.
2. ДжорданЕленберг. Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення – К. Наш формат, 2017. – 480с.
3. Вукіна Н.В. Критичне мислення: як цього навчати / Н.В. Вукіна, Н.П. Дементієвська – Х. :Основа, 2007. – 108 с.

4. Макаренко В.М. Як опанувати технологію формування критичного мислення. / В.М. Макаренко, О.О. Туманцова – Х. :Основа, 2008. – 96 с.
5. Гісь О. Продуктивне мислення. / О. Гісь// - 2014. - №2. – С. 7-9.

Н. Васильчук
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОСТОРУ СТАНІВ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Традиційний метод [1] дослідження динаміки систем автоматичного управління (САУ) полягає у тому, що по рівняннях ланок системи складається загальна структурна схема системи та визначається загальна передавальна функція замкненої системи, що пов'язує вхідну та вихідну величини. З передавальної функції можна одержати одне загальне диференційне рівняння замкненої системи n-го порядку. Проте поведінку системи у часі можна характеризувати не тільки вихідною величиною системи, але й проміжними змінними у ланцюзі системи, число яких дорівнює порядку системи n. Ці проміжні змінні треба обирати так, щоб після задання початкових значень цим n змінним ми могли б визначити значення змінної виходу у будь-який подальший момент часу, тобто визначити стан системи у будь-який момент часу. Цей n-мірний вектор змінних є вектором стану системи, вся сукупність можливих значень цього вектору складає простір станів системи. В просторі станів властивості системи управління описуються не одним диференційним рівнянням n-го порядку, а системою з n диференційних рівнянь 1-го порядку у нормальній формі. Вибрати змінні стану та перейти до системи рівнянь у нормальній формі можна різними способами. Оберемо такий: нехай загальне диференційне рівняння замкненої системи має вид:

$$(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0)y = (\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \ldots. + \beta_1 p + \beta_0)u, \qquad (1)$$

де y - вихідна величина , а u - вхідний вплив. Тут прийнята зворотна нумерація коефіцієнтів рівняння, в порівнянні до загально прийнятої, для зручності запису подальших формул, а також враховано, що якщо дійсний порядок m правої частини (1) менше порядку лівої частини n ($m<n$), то всі коефіцієнти $\beta_i=0$ при $i=n-m+1,\ldots,n$. Введемо змінні станів x_1, ..., x_n наступним чином:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \\ x_2 = px_1 - b_1 u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = px_{n-1} - b_{n-1}u \end{cases}, \qquad (2)$$

де b_i- деякі сталі коефіцієнти. Тоді рівняння (1) набере вигляд:

$$\begin{cases} y = x_1 + \beta_n u \\ px_1 = x_2 + b_1 u \\ px_2 = x_3 + b_2 u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ px_{n-1} = x_n + b_{n-1} u \\ px_n = -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \ldots - \alpha_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + b_n u \end{cases} \qquad (3)$$

Можна довести, що розв’язок системи (3) буде збігатися з розв’язком рівняння (1), якщо коефіцієнти b_i будуть обчислені за рекурентними формулами:

$b_1=\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n,$

$b_2=\beta_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_n - \alpha_{n-1}b_1,$

$b_3=\beta_{n-3} - \alpha_{n-3}\beta_n - \alpha_{n-1}b_2 - \alpha_{n-2}b_1,$

....

$b_n=\beta_0 - \alpha_0\beta_n - \alpha_{n-1}b_{n-1} - \alpha_{n-2}b_{n-2} - \ldots - \alpha_2 b_2 - \alpha_1 b_1$, а початковими умовами будуть:

$x_1(0)=y(0) - \beta_n u(0);$

$x_2(0)=py(0) - \beta_n pu(0) - b_1 u(0);$

....

$x_n(0)=p^{n-1}y(0) - \beta_0 p^{n-1}u(0) - b_1 p^{n-2}u(0) - \ldots - b_{n-2} pu(0) - b_{n-1} u(0),$

де $p^k y(0) = \left.\dfrac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0}$ і $p^k u(0) = \left.\dfrac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=0}$.

У матричній формі система (3) буде мати вид:

$$p\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u. \qquad (4)$$

Вибір змінних стану згідно формул (2) можна застосувати при розв’язанні ряду задач оптимального управління [2].

Література

1. Ладанюк, А. П. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами : навч. посіб. / А.П.Ладанюк, К. С. Архангельська , Л. О. Власенко – К.: НУХТ, 2014. – 274 с.
2. J.I . Fedyshyn, T.V. Hembara, G.J. Bodnar, T.J. Fedyshyn. Optimal control of systems with distributed parameters for axysymetric problems sterilization. Scientific Messenger of LNU of Veterinary Medicine and Biotechnologies. - 17.4 – 2015 – pp. 201-208.

Д. Миськов
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ СИЛИ ОПОРУ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА У СЕРЕДОВИЩІ

Теорія подібності [1] спирається на вчення про розмірність фізичних величин і служить основою математичного моделювання фізичних процесів. Предметом теорії подібності є встановлення подібності критеріїв різних фізичних явищ і вивчення за допомогою цих критеріїв властивостей самих явищ. Фізичні явища, процеси або системи подібні, якщо в подібні моменти часу в подібних точках простору значення змінних величин, що характеризують стан однієї системи, пропорційні відповідним величинам іншої системи. Коефіцієнт пропорційності для кожної з величин називається коефіцієнтом подібності. Розглянемо тіло з певною формою поверхні, розміри якого визначає деякий характерний відрізок d, наприклад циліндричне тіло, поперечним перерізом якого є коло діаметром d, рухається зі швидкістю v у рідині з коефіцієнтом динамічної в'язкості μ і густиною ρ. Необхідно встановити силу лобового опору

$$F = f(d, v, \mu, \rho),$$

який зазнає тіло.

Розмірності вказаних $n=5$ визначальних величин у системі СІ є такими:

$$[F]=LMT^{-2},\ [d]=L,\ [v]=LT^{-1},$$
$$[\mu]=L^{-1}MT^{-1},\ [\rho]=L^{-3}M.$$

Оскільки необхідно знайти залежність F від d, v, μ, ρ у явному вигляді, то F приймемо за величину із залежною розмірністю і знайдемо

$$[F]=[\rho][v]^2[d]^2. \tag{1}$$

Іншою величиною із залежною розмірністю є μ. Для неї отримаємо

$$[\mu]=[\rho][v][d]. \tag{2}$$

Таким чином, $k=3,\ m=n-k=5-3=2$ і два критерії подібності згідно з (1) і (2) будуть

$$\pi_1=\frac{F}{\rho v^2 d^2},\ \ \pi_2=\frac{\mu}{\rho v d}.$$

Якщо прийняти за величини із залежними розмірностями F і ρ, то отримаємо

$$\pi_1'=\frac{F}{\mu v d},\ \pi_2'=\frac{\rho v d}{\mu}.$$

Якщо за величини із залежними розмірностями прийняти F і v, то матимемо

$$\pi_1''=\frac{F\rho}{\mu^2},\ \pi_2''=\frac{\rho v d}{\mu}.$$

Такий самий результат дає випадок, коли величинами із залежними розмірностями вибираються F і d. Таким чином, у всіх розглянутих варіантах другий критерій подібності залишається практично незмінним.

Безрозмірний степеневий комплекс $\frac{1}{\pi_2}$ зустрічається в багатьох задачах гідромеханіки й має певний фізичний зміст: його числове значення характеризує співвідношення між силами інерції й силами тертя в потоці в'язкої рідини. Цей комплекс називається критерієм або числом Рейнольдса і позначається

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}.$$

Із трьох критеріїв π_1, π_1', π_1'' певний фізичний зміст має тільки один критерій π_1. Він характеризує відношення лобового опору до сили, яка виникає внаслідок тиску рідини на лобову поверхню. Якщо вибрати цей критерій, то отримаємо критеріальне рівняння $F = f(d, v, \mu, \rho)$ у вигляді $\pi_1 = \psi(\frac{1}{\pi_2})$, звідки $F = \rho v^2 d^2 \psi(\mathrm{Re})$.

Із цього виразу перед усім випливає, що вплив в'язкості рідини виявляється тільки через число Рейнольдса. Чим більша в'язкість μ, тим менше Re і більше F. Значить, при зменшенні Re функція (3) має зростати. Зі зменшенням в'язкості μ число Re збільшується. Функція ψ із зростанням Re має прямувати до деякої межі при $\mu = 0$, що відповідає ідеальній рідині. При русі тіла в ідеальній рідині лобовий опір є пропорційним густині ρ рідини, квадрату швидкості v руху тіла й площі s його лобової поверхні. Для в'язкої рідини такий закон зберігається наближено при достатньо великих значеннях Re. Важливим є те, що для всіх значень Re, менших за деяке критичне значення Re^*, потік залишається ламінарним і стійким по відношенню до зовнішніх збурень. Як тільки Re стає більшим від Re^*, найменше збурення призводить до того, що потік стає турбулентним, це підтверджує і чисельний розрахунок [2].В такому потоці передбачити рух частинок рідини на певний достатньо великий проміжок часу практично неможливо на відміну від випадку ламінарного руху.

Література

1. Сердюк Л.І. Теорія розмірностей, подібності та математичне моделювання: навчальний посібник для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів /– Полтава: ПНТУ, 2008. – 160 с.
2. Гембара Т. Чисельне моделювання процесів розвитку пожеж із врахуванням гідродинаміки тепломасопереносу. Комп'ютерне моделювання та програмне забезпечення інформаційних систем і технологій»: збірник наукових праць III Всеукраїнської науково-практичної конф., м. Рівне, 28 вересня – 30 вересня 2017 р.- с.63-65.

Д. Шаповал
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Л. Дзюба,*** *доктор технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ОБГРУНТУВАННЯ ВИБОРУ АЛЬФА РОЗПОДІЛУ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ ВІДМОВ

Величина напрацювання (в часі) T до параметричної відмови машини за критерієм точності є функцією двох випадкових аргументів – зміни розміру та швидкості зношування. Для знаходження функції розподілу часу напрацювання у літературі вважають, що випадкові величини аргументів (зміна розмірів та швидкість зношування) розподілені за нормальним законом. Таке припущення дає змогу аналітично відшукати інтеграл згортки цих двох випадкових величин для визначення часу напрацювання, яке є функцією двох випадкових аргументів. Отже, нормальні закони розподілу аргументів прийнято через те, що не для всіх законів розподілу аналітично можна обчислити інтеграл згортки для функції двох випадкових аргументів.

Напрацювання в часі до параметричної відмови складників конструкцій машин унаслідок зношування не завжди розподілено за нормальним законом. Необхідною умовою нормального закону розподілу напрацювання до відмови є незначний розмах значень швидкостей зношування складників конструкції машини. Наприклад, для верстатів характерним є висока швидкість зношування різального інструмента порівняно зі швидкістю зношування інших складників конструкцій. Експериментально отримані розподіли напрацювання до відмови унаслідок зношування деталей та складників конструкцій машин зазвичай бувають асиметричними модальними. Тому нормальний розподіл не відображає реальної ситуації зі зношуванням, а є певним припущенням.

Отже, для опису напрацювання до відмови машини за критерієм точності доцільно приймати асиметричний модальний альфа розподіл, диференціальна функція якого має вигляд

$$f(t)=\frac{\beta\cdot c}{t^2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t}-\alpha\right)^2\right], \tag{1}$$

Залежність (1) є три параметричним α- розподілом випадкової величини напрацювання T, де β, α та c - параметри розподілу. Параметр β має розмірність напрацювання до відмови (часу) та є відносним запасом довговічності машини за критерієм точності. Параметри α та c є безрозмірними величинами. Величину параметра α вважають середньою швидкістю розрегулювання машини, тобто відносною середньою швидкістю зміни випадкової величини X, що характеризує точність. Нормуючий множник c визначають за функціями Лапласа. Зазвичай, коли параметр $\alpha=2$ та може набувати більших значень, нормуючий множник дорівнює одиниці ($c=1$). На рис. 1 показано типову криву α - розподілу, де прийнято позначення: $t_{\text{п}}$ – напрацювання машини до початку масових відмов за параметричною точністю, $t_{\text{м}}$ – мода розподілу, θ – характеристичний час зміни випадкової величини X .

За напрацювання $t = t_{\text{п}}$ розпочинається швидке зростання густини розподілу напрацювання на параметричну відмову верстата за критерієм точності. Тому доцільно, щоб міжрегулювальний період напрацювання для деревообробного верстата не перевищував значення $t_{\text{п}}$.

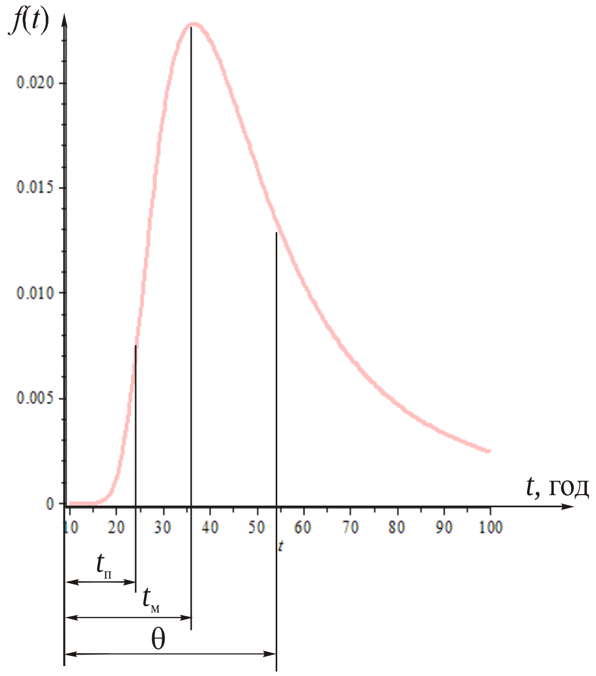


Рисунок 1 – Графік функції густини відмов α - розподілу

Перевагами альфа розподілу є те, що: 1) розподіл володіє додатною асиметрією, помітно збільшеною порівняно з іншими розподілами. (Наприклад, нормальний розподіл є симетричним); 2) параметри α - розподілу, як імовірнісно-фізичної моделі відмов, мають фізичну інтерпретацію і можуть бути оцінені на підставі статистики відмов. Для оцінки параметрів α - розподілу використовують коефіцієнти варіації, отримані за результатами досліджень технологічної точності робочої машини.

Література

1. Дзюба, Л. Ф. Основи надійності машин. Навчальний посібник / Л. Ф. Дзюба, Є. М. Лютий, Ю. В. Зима – Львів: Логос, 2003. – 204 с.

2. Дзюба, Л. Ф. Надійність технічних систем і техногенний ризик [Текст] : Навч. посібник для ВНЗ / Л. Ф. Дзюба, М. І. Кусій, О. В. Меньшикова. – Львів: Вид-цтво ЛДУ БЖД, 2018. – 144 с.

3. Pylypchuk M., Dziuba L., Chmyr O., Rebezniuk I., Burdiak M. «Modelling Parametric Failures of Woodworking Machines According to the Technological Precision Criterion» Advanced Manufacturing Processes III. Selected Papers from the 3rd Grabchenko's International Conference on Advanced Manufacturing Processes (InterPartner-2021), September 7-10, 2021. Odesa, Ukraine. P 119 – 126. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_12

Ю. Сташек
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ В ОПЕРАТОРНІЙ ФОРМІ

Для систем автоматичного управління (САУ) основним режимом є динамічний, який характеризується зміною регулювальних координат *X* за часом *t*. Система управління постійно перебуває під впливом збурень або змінюваного сигналу [1] . Вид перехідного процесу залежить від сигналів, які його викликали, а також від властивостей об’єкта та регулятора. Таким чином, при розв’язанні задач аналізу та синтезу системи регулювання необхідно мати математичні моделі елементів і систем в цілому, а в першу чергу – їх динамічні характеристики. Для цієї мети в теорії автоматичного управління використовуються: диференціальні рівняння, передаточні функції, частотні характеристики, часові характеристики. Розглянемо САУ, яка знаходиться в сталому режимі, що характеризується значенням вихідної величини $y = y_0$. Нехай у момент t = 0 на об'єкт впливав який - або збурюючий чинник, відхиливши значення регульованої величини. Через деякий час регулятор поверне САУ до первинного стану (з урахуванням статичної точності). Якщо регульована величина змінюється в часі за аперіодичним законом, то процес регулювання називається аперіодичним. Таким чином, основним режимом роботи САУ вважається динамічний режим, що характеризується протіканням в ній перехідних процесів. Тому другим основним завданням при розробці САУ є аналіз динамічних режимів роботи САУ.

Поведінка САУ або будь-якої її ланки в динамічних режимах описується рівнянням динаміки y(t) = F(u, z, t). Як правило, це диференціальне рівняння або система диференціальних рівнянь. Порядок диференціальних рівнянь може бути досить високим, тобто залежністю пов'язані як самі вхідні і вихідні величини u(t), z(t), y(t), так і швидкості їх зміни, прискорення і так далі. Тому рівняння динаміки в загальному вигляді можна записати наступним чином:

$$F(y, y', y'',.., y(n), u, u', u'',.., u(m), z, z', z'',.., z(k)) = 0. \quad (1)$$

В теорії автоматичного управління [2] зручно використати операторну форму запису диференціальних рівнянь. При цьому вводиться поняття диференціального оператора p = d/dt так, що, dy/dt = py, а pn = dn/dtn. Це лише інше позначення операції диференціювання. Зворотна диференціюванню операція записується як 1/p. У операторній формі початкове диференціальне рівняння записується як алгебраїчне:

$$a_0p^{(n)}y + a_1p^{(n-1)}y + \dots + a_ny = (a_0p^{(n)} + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_n)y = \quad (2)$$
$$=(b_0p^{(m)} + b_1p^{(m-1)} + \dots + b_m)u$$

Немає абсолютної відповідності цієї форму запису з операційним численням хоч би тому, що тут використовуються безпосередньо функції часу y(t), u(t) (оригінали), а не їх зображення Y(p), U(p), що отримуються з оригіналів по формулі перетворення Лапласа. В той же час за нульових початкових умов з точністю до позначень запису дійсно дуже схожі. Ця схожість лежить в природі диференціальних рівнянь. Тому деякі правила операційного числення застосовані до операторної форми запису рівняння динаміки. Так оператор p можна розглядати в якості співмножника без права перестановки, тобто $py \neq yp$.

Тому рівняння динаміки можна записати також у виді:

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} u = \frac{K(p)}{D(p)} u = W(p) \cdot u \qquad (3)$$

Диференціальний оператор W(p) тоді буде передатною функцією. Вона визначає відношення вихідної величини ланки до вхідної в кожен момент часу: W(p) = y(t)/u(t), тому її можна прийняти динамічним коефіцієнтом підсилення. У сталому режимі d/dt = 0, тобто p = 0, тому передатна функція перетворюється на коефіцієнт передачі ланки K = b_m/a_n. Знаменник передавальної функції $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n$ є характеристичним поліномом. Його корені, тобто значення p, при яких знаменник D(p) перетворюється на нуль, а W(p) прямує до нескінченності, є полюсами передатної функції. Чисельник $K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m$ буде операторним коефіцієнтом передачі. Його корені, при яких K(p) = 0 і W(p) = 0, є нулями передатної функції.

Література

3. Ладанюк, А. П. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами : навч. посіб. / А.П.Ладанюк, К. С. Архангельська , Л. О. Власенко – К.: НУХТ, 2014. – 274 с.
4. J.I . Fedyshyn, T.V. Hembara, G.J. Bodnar, T.J. Fedyshyn. Optimal control of systems with distributed parameters for axysymetric problems sterilization. Scientific Messenger of LNU of Veterinary Medicine and Biotechnologies. - 17.4 – 2015 – pp. 201-208.

Д. Орлова
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Л. Дзюба,** доктор технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ РИЗИКУ

Аварії у різних галузях людської діяльності мають схожість. Зазвичай аварії передує нагромадження дефектів в обладнанні та відхилення від звиклого перебігу процесів. Цей щабель формування аварії може тривати хвилини, години та навіть роки. Сформовані дефекти чи відхилення ще не викликають аварію, лише готують для неї підґрунтя. Оператори, як правило, не зауважують цього через брак інформації або неуважності до регламенту експлуатації технічної системи. Тому на цій фазі не виникає передчуття небезпеки. На наступному щаблі формування аварії трапляється несподівана або рідкісна подія, яка істотно змінює ситуацію. Оператори намагаються відновити звиклий перебіг процесу, не володіючи повним обсягом інформації, поглиблюючи цим розвиток аварії. На останньому щаблі виникає ще одна несподівана подія, часто незначуща, яка стає поштовхом до того, що технічна система перестає реагувати на дії оператора, виходить з підпорядкування людини і відбувається аварія чи катастрофа. На процес зародження ризику загалом впливає ряд чинників та умов, характерних для технічної системи. На рис. 1 схематично зображена модель розвитку ризику для об’єкта ризику в часі.

Рисунок 1 - Модель розвитку ризику в часі

Виходячи з аксіоми, що будь-яка технічна система є потенційно небезпечною, ризик завжди супроводжує людську діяльність. Отже, необхідними та достатніми умовами виникнення ризику є: існування джерела небезпеки та чинника ризику; наявність небезпечної чи шкідливої дози цього чинника ризику; чутливість об’єкта до чинника ризику.

Література

1. Дзюба, Л. Ф. Основи надійності машин. Навчальний посібник / Л. Ф. Дзюба, Є. М. Лютий, Ю. В. Зима – Львів: Логос, 2003. – 204 с.

2. Дзюба, Л. Ф. Надійність технічних систем і техногенний ризик [Текст] : Навч. посібник для ВНЗ / Л. Ф. Дзюба, М. І. Кусій, О. В. Меньшикова. – Львів: Вид-цтво ЛДУ БЖД, 2018. – 144 с.

3. Березуцький В. В., Адаменко М. І. Небезпечні виробничі ризики та надійність: навчальний посібник для студентів за напрямком підготовки 6.170202 «Цивільна безпека» / В. В. Березуцький, М. І. Адаменко – Харків: ФОП Панов А. М., 2016. – 385 с.

М.О. Доманський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПАРАДОКС ГІЛЬБЕРТА ПРО GRAND HOTEL

У лютому 2010 року Стівен Строгац отримав електронного листа від жінки на ім'я Кім Форбс. Її шестирічний син Бен поставив математичне питання, на яке Кім не змогла відповісти. Зміст цього листа такий: «Сьогодні сотий день мого сина в школі. Бен був дуже щасливий цьому і розповів мені все, що знає про число 100, зокрема що це парне число. Також він сказав мені, що 101 - непарне число і що мільйон парне, і так далі. Потім спитав: «А нескінченність парна чи ні?»». Стівен пояснив Кім, що нескінченність ні парна, ні непарна. Це не число у звичайному сенсі цього слова, воно не підкорюється законам арифметики. Інакше із цього випливали б математичні суперечності. Строгац навів такий приклад: «Якби нескінченність була непарною, то дві нескінченності давали б парне число. Але це все одно була б нескінченність! Тож сама ідея парності і непарності для нескінченності не має сенсу».

Нескінченність буває приголомшливою. Одну з найбільш дивних проявів нескінченності відкрив, у новаторській роботі з теорії множин, Георг Кантор, у кінці 1800-х. Він особливо цікавився нескінченними множинами чисел і точок, подібних до множини {1, 2, 3, 4...} натуральних чисел і множини точок на прямій. Кантор винайшов строгий спосіб порівнювати різні нескінченності й відкрив їхню надзвичайну властивість. Виявляється, одні нескінченності більші за інші. У той час теорію Кантора не просто не прийняли, вона викликала обурення. Один із найкращих математиків того часу Анрі Пуанкаре назвав це «хворобою». Але інший геній, Давид Гільберт, побачив у цьому довгостроковий внесок у науку і проголосив: «Ніхто не зможе вигнати нас із раю, що створив Кантор». Пояснимо це так, як пояснював сам Гільберт. У такий спосіб усю дивакуватість і неймовірність теорії Кантора можна описати, розповівши притчу про великий готель, який сьогодні відомий як готель Гільберта. Він завжди заповнений, але в ньому водночас завжди є й вільні кімнати.

У готелі Гільберта нескінченно багато номерів. Коли заїжджає новий мешканець, менеджер переселяє людину, яка живе в номері 1, у номер 2, а людину з номера 2 - у номер 3, і так далі. Номер 1 звільняється для новоприбулого, і всім вистачає місця. Далі заїжджає нескінченна кількість гостей. Менеджер спокійно переводить гостя з номера 1 у номер 2, з номера 2 — у номер 4, з номера 3 — у номер 6 і т. д. Після цього трюку вільними стають усі непарні номери — нескінченна кількість. Пізніше ввечері в готель заїжджає нескінченна кількість автобусів. У кожному автобусі приїхала нескінченна кількість людей, і вони вимагають, щоб готель відповідав своєму гаслу: «У готелі Гільберта завжди є вільні кімнати».

Менеджер спочатку робить те саме, що й раніше. Він переселяє гостей до парних номерів так, щоб звільнилася нескінченна кількість непарних номерів. Але чи достатньо цього? Тепер номери потрібні такій кількості людей, що її можна назвати нескінченністю у квадраті. (Чому у квадраті? Бо нескінченна кількість людей приїхала в кожному з нескінченної кількості автобусів, отже, це нескінченність, помножена на нескінченність).

Щоб зрозуміти, як менеджер буде розв'язувати цю проблему, краще візуалізувати людей, яких йому потрібно поселити.

Суть у тому, що будь який конкретний пасажир обов'язково з'явиться десь на малюнку, якщо ми зробимо достатньо рядків і стовпців. У цьому сенсі тутураховано кожного пасажира кожного автобуса. Ви називаєте пасажира, і він чи вона обов'язково знайдуться через певну скінченну кількість кроків на схід і південь від кута малюнка. Завдання менеджера придумати схему, як усім гостям призначити по кімнаті так, що кожен отримає її.

Якщо просто завжди рухатися на схід уздовж рядка 1, то завдання не вдасться реалізувати, а якщо рухатися зигзагами по діаграмі, як показано на малюнку, то все вийде.

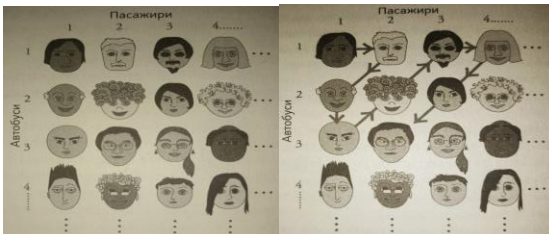


Схема роботи менеджера - рухатися діагоналями - зрозуміла з малюнка вище, і до конкретного пасажира він дійде за скінченну кількість кроків. Тож, як і було сказано в рекламі, у готелі Гільберта завжди знайдуться вільні кімнати.

Доведення, яке викладене вище, - відомий аргумент із теорії нескінченних множин. Кантор використав його, щоб довести, що додатних дробів існує рівно стільки ж, скільки й натуральних чисел. Це набагато сильніша теза, ніж просто сказати, що обидві множини нескінченні. Так ми говоримо, що вони нескінченні точно до тієї самої міри, у тому сенсі, що між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. В кожного додатного дробу є своє натуральне число, і навпаки. Це своєрідна софістика, яка й нажахала Пуанкаре. Тут припускається, що можливо створити повний список усіх додатних дробів, хоча найменшого дробу не існує! І все ж такий список є. Дріб p/q відповідає пасажиру p в автобусі q, і доведення вище показує, що кожен із цих дробів можна поставити в пару з певним натуральним числом 1, 2, 3…, відповідно до номера кімнати пасажира в готелі Гільберта. Смертельний удар у доведенні Кантора — те, що деякі нескінченні множини більші за ці. Зокрема, множина дійсних чисел між 0 і 1є незліченна. Довести це можна методом від супротивного. Припустимо, кожному дійсному числу можна дати кімнату. Тоді список гостей, імена у яких - десяткові дроби і які внесені в список за номерами кімнат, мав би такий вигляд:

Кімнати: (1: 0,6708112345...,2: 0,1918676053..., 3: 0,4372854675...,4: 0,2845635480...). Пам'ятаємо, список повинен бути повний. Кожне дійсне число від 0 до 1 має бути прописане на певному скінченному місці в списку.

Кантор показав, що в будь-якому такому реєстрі частина чисел буде відсутня. Ось це і суперечність. Наприклад, щоб створити число, якого в списку не було, пройдемося по діагоналі й побудуємо нове число з підкреслених цифр, тоді кімнати: (1: 0,6708112345..., 2: 0,1918676053..., 3: 0,4372854675..., 4: 0,2845635480...). Новий дріб — 0,6975...

Але це ще не кінець. Наступний крок - узяти цей дріб і змінити в ньому всі цифри, замінивши кожну з них будь-якою іншою цифрою від 1 до 8. Наприклад, 6 можна поміняти на 3; 9— на 2; 7 — на 5і так далі.

Новий дріб 0,325... – це вже кінець. Він не в кімнаті 1, тому що в нього не така перша цифра, як у числа тут. Він також в кімнаті 2, бо його друга цифра не узгоджується. І загалом він відрізняється від n-го числа цифрою на n-му десятковому місці. Тож у списку його немає!

Висновок: готель Гільберта не може розмістити в себе всі дійсні числа. Їх просто забагато - це нескінченність, більша за нескінченність.

Література:

1. Книга «Екскурсія математикою»
2. https://fima.lidoug.pp.ua ›
3. https://uk.wikipedia.org ›
4. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
5. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

А. Стельмах
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНА ОЦІНКА ПЕРЕШКОД В КАНАЛАХ УПРАВЛІННЯ ТА ВИМІРЮВАННЯ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ

Функціонування систем автоматичного управління (САУ) [1] оцінюють при дії детермінованих сигналів (ступінчаста функція, дельта-функція, гармонійний сигнал) і відповідно встановлюють показники якості перехідних процесів [2]. Для виявлення загальних властивостей САУ та оцінок закономірностей їх функціонування такий підхід виправданий. Для реальних систем зовнішні сигнали (збурення та завдання) є випадковими, значення яких мають ймовірнісний характер. Наприклад, непередбачуваним чином змінюються властивості об’єкта, а також виникають перешкоди, які діють в каналах вимірювання. В теорії автоматичного управління використовують ряд характеристик випадкових сигналів, наприклад, математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, кореляційні функції, спектральні щільності та інші. Приймається також ряд припущень та гіпотез. В першу чергу визначається стаціонарність випадкового сигналу. Тут виникають три взаємозв’язані задачі:

- визначення статистичних характеристик випадкових сигналів при заданій структурі системи та параметрах об’єкта і регулятора;
- визначення оптимальних параметрів регулятора (в загальному вигляді – пристрою управління);
- визначення оптимальної структури системи або пристрою управління при відомих характеристиках зовнішніх сигналів.

Реальні випадкові процеси, які діють на об’єкти управління, мають різні властивості та характеристики. В задачах аналізу та синтезу САУ зручно використовувати типові випадкові сигнали, які мають відомі характеристики. Кореляційні функції і спектральні щільності типових сигналів – достатньо прості функції аргументів τ і ω, а параметри цих функцій можна визначити за даними спостережень. До типових випадкових сигналів відносяться:

- білий шум з обмеженою широтою спектра. Спектральна щільність цього сигналу описується функцією:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_{X_0}, \text{при} \, |\omega| < \omega_C \\ 0, \text{при} \, |\omega| > \omega_C, \end{cases}$$

де S_{X_0} - інтенсивність білого шуму, ω_C - смуга частот.

- сигнал з експоненціальною кореляційною функцією:

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha_x|\tau|}$$

– сигнал з експоненціально-косинусною кореляційною функцією:

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha_x|\tau|} \cos \beta_x \tau \ .$$

Вважатимемо, що в САУ перешкоди можуть бути в двох основних місцях: перешкода в каналі управління (до управління додається перешкода W) і перешкода в каналі виміру (вихідний сигнал вимірюється з перешкодою V). Найбільш загальне завдання фільтрації шуму - максимально можливе пригнічення обох перешкод.

Якщо розглянути шумовий сигнал з нескінченним рівномірним спектром, то йому відповідатиме кореляційна функція у вигляді δ-функції:

$$S(\omega) = \sigma^2 = \text{const}; \ \ K(\tau) = (\sigma^2/2\pi)\ \delta(\tau); \ \ D = K(0) = \infty.$$

Ці три рівняння описують "білий шум" з інтенсивністю σ^2. Зрозуміло, що такий сигнал не може бути фізично реалізований в силу нескінченної потужності. Можна, проте, реалізувати скільки завгодно близький до цього випадковий процес, що називається "рожевим шумом". Формально рожевий шум виходить при пропусканні білого шуму через будь-яку реальну ланку. При цьому обмежується спектр сигналу, оскільки ніяка реальна ланка не може пропускати нескінченну смугу частот. В результаті, у реального рожевого шуму може бути скільки завгодно широкий, але спадний спектр, а його кореляційна функція може дуже швидко спадати, що означає малий зв'язок значень процесу в різні моменти часу. Задачу фільтрації перешкод можна вирішувати як оптимальну, тобто шукати умови найбільшого пригнічення перешкод. Перешкоди вважатимемо випадковими процесами з відомими кореляційними функціями (спектральними характеристиками). Алгоритми управління і фільтрації можуть бути реалізовані окремо, і їх одночасне функціонування в замкнутій системі не заважає один одному. В результаті дійдемо до висновку, що оптимальний фільтр можна розраховувати окремо від регулятора.

Література

1. Ладанюк, А. П. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами : навч. посіб. / А.П.Ладанюк, К. С. Архангельська , Л. О. Власенко – К.: НУХТ, 2014. – 274 с.
2. J.I . Fedyshyn, T.V. Hembara, G.J. Bodnar, T.J. Fedyshyn. Optimal control of systems with distributed parameters for axysymetric problems sterilization. Scientific Messenger of LNU of Veterinary Medicine and Biotechnologies. - 17.4 – 2015 – pp. 201-208.

А.І. Сирота, Ю.В. Щербина
Львівський національний університет імені Івана Франка
Науковий керівник ***Л.Ю.Фірман*** *старший викладач кафедри вищої математики.*

БАЗОВІ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Основні параметри системи масового обслуговування. Розімкнені системи масового обслуговування.

Головним параметром для будь-якої системи масового обслуговування (далі МО) є *кількість каналів обслуговування*, яку ми надалі будемо позначати літерою n. ***Каналом обслуговування***, називають сукупність усіх технічних пристроїв, що забезпечують обслуговування одного замовлення. Наприклад, телефон-автомат є каналом обслуговування. Якщо поруч є n телефонів-автоматів, то їх можна вважати n-канальною системою МО. На шиномонтажній станції самообслуговування канали обслуговування - це місця перевірки тиску в шинах. Якщо на станції n місць перевірки тиску, то її також можна вважати n – канальною системою МО.

Роботу кожного каналу обслуговування характеризують тим часом, який витрачається на обслуговування одного замовлення. В загальному цей час є випадковим. Якщо розглядати найпростішу пуассонівську систему, то час обслуговування T_μ одного замовлення має бути розподілений за показниковим законом з параметром μ. Тоді на виході *неперервно зайнятого* каналу матимемо найпростіший потік обслужених замовлень з параметром μ. Справді, припустимо, що на вході такого каналу завжди є черга з необслужених замовлень. Наприклад, є багато бажаючих зателефонувати біля телефону-автомата. Кожне замовлення незалежно від інших обслуговується випадковий час T_μ, розподілений за показниковим законом з параметром μ, і замовлення не покидає систему до завершення обслуговування (якщо бажаючий зателефонувати дочекається своєї черги, то він закінчить розмову обов'язково). Отже, на виході такої системи з'явиться потік обслужених замовлень, причому інтервали часу між подіями у цьому потоці будуть незалежними і розподіленими однаково за показниковим законом з параметром μ, тобто потік обслужених замовлень буде найпростішим з інтенсивністю μ. Далі канал обслуговування характеризуватимемо ***інтенсивністю потоку обслуговувань*** $\boldsymbol{\mu}$. Зауважимо, що ми розглядаємо лише такий випадок, коли на вході каналу *завжди* є черга. Якщо ж ця умова не виконується (черга то з’являється, то зникає), то інтенсивність потоку на виході каналу буде меншою від μ.

Загалом параметр потоку обслуговувань може залежати від часу ($\mu(t)$). Тоді на виході неперервно зайнятого каналу буде пуассонівський потік обслужених замовлень з інтенсивністю $\mu(t)$.

Отже, можна уявити собі, що обслуговування відбувається так, ніби на замовлення, яке надійшло в канал, спрямовується потік обслуговувань з інтенсивністю μ. Обслуговування розпочинається рівно з того моменту, коли в цьому потоці обслуговувань з'являється перша подія. Така постановка задачі дуже зручна в методичному плані, передусім тоді, коли потік є пуассонівським.

Надалі припускатимемо, що потік обслуговувань кожного каналу – найпростіший з інтенсивністю μ. Інтенсивність зазвичай визначають через середній час обслуговування одним каналом одного замовлення $\overline{t_s}$, тобто: μ $=1/\overline{t_s}$. Вважатимемо, що всі канали мають однакову інтенсивність потоку обслуговувань μ (іноді величину μ називають інтенсивністю обслуговування). Крім того, вважатимемо, що замовлення може обслуговуватися будь-яким з каналів, тобто будь-який з *n* каналів „доступний" для замовника.

Також важливим параметром системи МО є т ***інтенсивність потоку замовлень*** λ (сам потік замовлень вважаємо найпростішим). Інтенсивність потоку замовлень визначають через середній інтервал часу між надходженням двох замовлень $\overline{t_\lambda}$: $\lambda = 1/\overline{t_\lambda}$.

Крім параметрів *n,* μ, λ, ефективність роботи системи МО також залежить від ***дисципліни (алгоритму) обслуговування***, тобто порядку розподілу замовлень між вільними каналами: поведінки замовлень; закону утворення черги тощо. Наприклад, покупець у великому супермаркеті може довго шукати потрібний відділ, водночас в іншому магазині за умови добре зорганізованої інформаційної служби покупець витрачатиме на це менше часу. Або ж за наявності двох однакових відділів покупець може стояти в черзі в одному з них, водночас інший відділ буде вільним. Покупці можуть покидати магазин, не дочекавшись своєї черги. Деякі покупці намагатимуться купити товар без черги і т.п. Через те, при розв'язуванні задач методами теорії масового обслуговування необхідно чітко уявити собі весь порядок обслуговування.

Потрібно розрізняти ***розімкнені і замкнені*** системи МО. На вхід *розімкненої* системи МО надходить деякий потік замовлень, разом з тим джерела цих замовлень до складу системи не належать і їхні стани аналізу не піддаються. Прикладами розімкненої системи є лічильник Гейгера, який реєструє космічні частинки, або (з деяким наближенням) АТС, на яку надходять виклики. У *замкненій* системі МО кількість джерел замовлень обмежена, а інтенсивність надходження замовлень залежить від станів джерел, зумовлених роботою системи загалом. Класичним прикладом такої системи є робота гаража, в якому є *m* автомобілів і *n* місць ремонту. При умові поломки машини її скеровують на ремонт, отже, інтенсивність потоку замовлень залежить від того, скільки машин у певний проміжок часу експлуатують.

Розглянемо n-канальну розімкнену систему МО з відмовами, на вхід якої надходить найпростіший потік замовлень з інтенсивністю λ. На виході такої системи в стаціонарному режимі (якщо він існує) є два потоки: потік обслужених замовлень з інтенсивністю λ_0 і потік необслужених замовлень з інтенсивністю λ_H. Тут виконуватиметься очевидна рівність, яку називають *рівнянням балансу* для розімкненої

системи: $\lambda = \lambda_0 + \lambda_H$, тобто $\frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda_H}{\lambda} = 1$. Тому, очевидно, $P_{обс} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ – це ***ймовірність обслуговування замовлення*** (імовірність того, що замовлення, яке надійшло на вхід системи, буде обслуженим),

$P_H = \frac{\lambda_H}{\lambda}$ – ймовірність того, що замовлення не буде обслуженим. Іноді λ_0 називають *абсолютною*, а $P_{обс}$– *відносною пропускною здатністю* системи.

Зазначимо, що навіть у випадку найпростішого потоку замовлень потоки обслужених і необслужених замовлень загалом не будуть найпростішими.

Однією з важливих характеристик розімкненої системи в стаціонарному режимі є ***середня кількість зайнятих каналів*** $\bar{k}$. Для системи без „взаємодопомоги" між каналами, коли замовлення може обслуговуватися лише одним каналом, інтенсивність потоку обслужених замовлень визначають за формулою $\lambda_0 = \mu\bar{k}$, де μ інтенсивність потоку обслуговувань.

Для доведення цієї формули міркуємо наступним чином. Нехай у момент часу t зайнята випадкова кількість каналів Y. Тоді миттєва інтенсивність потоку обслужених замовлень дорівнює $Y\mu$, а середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу – $\lambda_0 = E(Y\mu) = \mu EY = \mu\bar{k}$.

Розглянемо довільно вибраний канал і визначимо ймовірність $\pi_{з.к.}$ того, що в довільно вибраний момент часу цей канал буде зайнятим. Оскільки всі канали працюють в однакових умовах, то $\bar{k} = \pi_{з.к.} n$, звідки $\pi_{з.к.} = \bar{k}/n$.

З іншого боку, на основі ергодичної властивості величину $\pi_{з.к.}$ можна отримати з виразу $\pi_{з.к.} = \bar{t}_{з.к.}/(\bar{t}_{з.к.} + \bar{t}_{п.к.})$, де $\bar{t}_{з.к.}$– середній час зайнятості каналу (від моменту, коли замовлення надходить на обслуговування, аж до самого звільнення каналу); $\bar{t}_{п.к.}$– середній час простою каналу (від моменту звільнення до прибуття нового замовлення). З останньої формули маємо:

$$\bar{t}_{з.к.} = \bar{t}_{п.к.} \frac{\pi_{з.к.}}{1-\pi_{з.к.}} \; ; \; \bar{t}_{п.к.} = \bar{t}_{з.к.} \frac{1-\pi_{з.к.}}{\pi_{з.к.}}.$$

Слід зазначити, що отримані формули (починаючи від формули $\bar{k} = \pi_{з.к.} n$) справедливі лише для стаціонарного режиму роботи системи.

Розглянемо питання про середню кількість замовлень, які перебувають у системі за умови, що всі замовлення обслуговуються. Замовлення, що надійшло до системи, перебуває в двох станах: або в черзі, або на обслуговуванні. Переконаємось, що має місце формула $\bar{l} = \bar{s} + \bar{r}$, де $\bar{l}$ – середня кількість замовлень, які надійшли до системи; $\bar{s}$ – середня кількість замовлень, що обслуговуються (у стаціонарному режимі роботи системи); $\overline{r}$ - середня кількість замовлень, що перебувають у черзі. Справді, очевидно, що $\overline{t} = \overline{t}_r + \overline{t}_s$, де $\overline{t}$ - − середній час перебування замовлення в системі; $\overline{t}_r$ − середній час перебування замовлення в черзі; $\overline{t}_s$ − середній час перебування замовлення на обслуговуванні. Оскільки інтенсивність потоку замовлень λ – це середня кількість замовлень, що надходять на вхід системи за одиницю часу, то середню кількість замовлень, які перебувають у системі, можна обчислити як $\overline{l} = \lambda_0 \overline{t}$. Отже,

$\overline{l} = \lambda_0 \overline{t} = \lambda_0 \overline{t}_r + \lambda_0 \overline{t}_s = \overline{r} + \overline{s}$.

Ми розглядали системи МО з відмовами, коли замовлення, заставши всі канали зайнятими, відразу ж отримувало відмову і покидало систему. Особливістю системи МО з очікуванням є те, що замовлення може стати в чергу і очікувати звільнення каналу, який може його обслужити.

Отже, підсумовуючи все наведене можна зменшити наприклад черги в магазинах, відповідно розвантажити логістичні системи і зменшити скупчення людей, а це пряме покращення безпеки життєдіяльності.

А. І. Горпинюк, М. О. Сікиринська
Львівський національний університет імені Івана Франка
*Науковий керівник **Л.Ю.Фірман,** старший викладач кафедра вищої математики механіко-математичного факультету імені Івана Франка*

РОЗРАХУНОК ТОЧКИ БЕЗЗБИТКОВОСТІ

Точкою беззбитковості (позначається як BEP – від англ. Break-evenpoint) називається такий рівень виробництва і одержуваної від продажу виручки, при якому витрати повністю компенсуються доходами, тобто підприємство отримує нульовий прибуток проте й збитки дорівнюють нулю. У разі перевищення BEP компанія починає заробляти, якщо досягти цієї позначки не вдається – зазнає збитків.

ФОРМУЛИ І ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ

Два найважливіших показники, без яких неможливо визначити значення точки беззбитковості – це постійні (перманентні) і змінні витрати. Їх необхідно вміти чітко розмежовувати.

Постійними називаються ті, які не перебувають в залежності від обсягів продукції, що випускається і реалізованої продукції, а також мало схильні до змін з плином часу. Певний вплив на даний вид витрат становлять деякі фактори: збільшення або падіння продуктивності підприємства; запуск нового виробничого цеху або закриття старого; зростання або зниження рівня орендної плати; інфляційні зміни вартості валюти та ін.

Для визначення точки беззбитковості необхідно обчислити, при якому рівні виручки прибуток виявиться нульовим. Діяти методом простого додавання змінних витрат з перманентними в даному випадку не можна, оскільки зниження виручки тягне за собою і зменшення змінних витрат.

Припустивши, що зниження цих показників буде йти прямо пропорційно один одному, скористаємося наступними формулами, де:

- R '– торговельна виручка;
- FC – перманентні витрати;
- K – коефіцієнт покриття.

Загалом одним підприємством випускаються і реалізуються два види товарів (тут: А і В). Розглянемо основні показники діяльності в грошовій одиниці – гривні:

- обсяг валової виручки: по товару А – 18 200, по товару В – 14 800, всього – 33 000;
- сума змінних витрат: по товару А – 14 000, по товару В – 13 600, всього – 27 600;
- сума перманентних витрат – 4 600;

- розмір прибутку – 800.

Для визначення показника проводимо такі розрахунки:

1. Знаходиться сума покриття: 33000 – 27600 = 5400 гривень.
2. Обчислюється коефіцієнт покриття: 5400/33000 = 0,16.
3. Визначається порогова виручка: 4600 / 0,16 = 28 750 гривень.

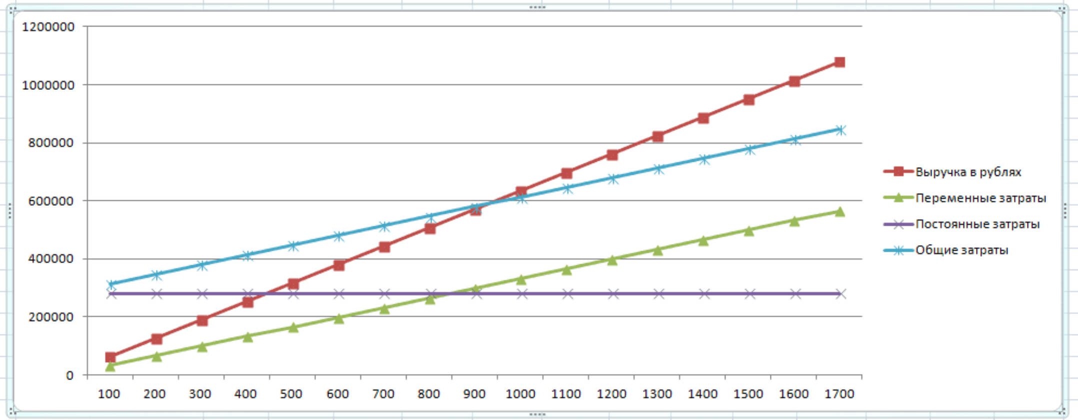
Але ми нагадаємо, що підприємство займається виробництвом товарів двох видів. Для визначення внеску в загальний прибуток кожного з них слід розподілити між ними перманентні витрати.

На практиці розглядають різні підходи в їх розподілі, але в даному випадку вважаємо, що дані витрати знаходяться в прямій залежності від одержуваної за рахунок продажу кожного з товарів виручки. Реалізація товару А приносить 54 відсотки сумарного обсягу виручки, товару В – 46 відсотків. У такому випадку маємо такі показники (в гривнях):

- обсяг валової виручки: по товару А – 18 200, по товару В – 14 800, всього – 33 000;
- сума змінних витрат: по товару А – 14 000, по товару В – 13 600, всього – 27 600;
- сума перманентних витрат: по товару А – 2 484, по товару В – 2 116, всього – 4 600;
- розмір прибутку: по товару А – +1716, по товару В – -916, всього – +800.

РОЗРАХУНОК НА ГРАФІКУ

Одним з найбільш простих способів визначення показника є графік.



Точка беззбитковості передбачає ідеальну ситуацію, при якій товар реалізується в повному обсязі, тобто відсутні будь-які товарні залишки. Розрахунок її значення проводиться для продукції одного виду, в зв'язку з цим при визначенні даного показника щодо кількох різних видів товарів їх структура не повинна зазнавати змін.

ДЛЯ ЧОГО НЕОБХІДНО ОБЧИСЛЕННЯ?
Розрахунок точки беззбитковості показує, за якої виручки прибуток дорівнюватиме нулю й покриває операційні витрати бізнесу. Йдеться саме про прибуток, а не про доходи: виручка мінус витрати — це прибуток.
Існує цілий ряд факторів, що визначають важливість визначення цього показника для підприємства: потенційний обсяг продажів і вартість товару знаходяться в істотній залежності від того, в якому стані перебуває ринок і яка його ємність, наскільки велика купівельна спроможність. Ці факторі необхідно враховувати виробнику, щоб мати чітке уявлення, чи окупляться витрати в майбутньому і чи стане підприємство отримувати прибуток.
Обсяг виручки знаходиться в прямій залежності від двох складових: кількості проданого товару та вартості однієї його одиниці. Визначення точки беззбитковості дає можливість зрозуміти, якою мірою доведеться змінювати одну з цих складових, якщо відбудеться зміна іншої.

Об'єкт функціонує з прибутком, якщо його виручка перевищує показник, відповідний BEP. Чим більше різниця між цими двома значеннями, тим про більшого прибутку можна говорити, а їх порівняння дає можливість зрозуміти, яке зниження виручки є допустимим з точки зору збереження прибутковості.
В цілому, показник значною мірою характеризує те, в якому фінансовому стані перебуває компанія. Так, якщо фіксується зростання показника, то це ймовірно є сигналом про наявність певних проблем, що стосуються отримання прибутку.
Крім того, прибуток модифікується в процесі росту самого підприємства, що пов'язано з більш значним товарообігом, розширенням торгової мережі, зміною цін і іншими факторами.
Інакше кажучи, до того, як точка беззбитковості буде досягнута, бізнес працює в мінус, проте коли бізнес досягає точки беззбитковості – починається зростання і прибутковість.
Розрахунок точки беззбитковості дає розуміння:

- окупності бізнесу, що дає сенс розрахувати точку беззбитковості до запуску бізнесу. ФОП може зробити це самостійно;
- як збільшити обсяг продажів; як визначити допустимий мінімум ціни; яка вартість товарів і послуг є оптимальною для постійного зростання;
- про мінімальний поріг виручки, з яким бізнес не стане збитковим;

Отже, розрахунками точки беззбитковості можна уникнути небезпеки виникнення непередбачуваних та несплановних ризиків, таких як: зайві витрати, збитки, невміння проаналізувати та правильно розподілити дохід, а також неправильна подача товару та некоректне визначення допустимих мінімуму та максимуму цін.

Література

1. Менеджмент і ринок: німецька модель. С. 415.
2. Смирницкий Е. К. Економічні показники бізнесу. М .: Іспит, 2002. С. 465-466.
3. Смирницкий Е. К. Економічні показники бізнесу. С. 465-466.

І. Завадка
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПОБУДОВА ДИСКРЕТНОГО РЯДУ РОЗПОДІЛУ У ЗАДАЧАХ СТАТИСТИКИ ІЗ ЗАСТОСУВАНННЯМ ФУНКЦІЙ ПРОГРАМИ EXCEL

Статистика, як наука, досліджує масові суспільні явища чи процеси, кількісно характеризуючи їх за різними ознаками на основі статистичних показників.

Застосування комп'ютерних технологій створює реальні можливості широкого впровадження методів статистики для ров'язування різного роду економічних задач. Так, наприклад, у програмі Excel існує багато математичних та статистичних функцій, за допомогою яких можна групувати дані, які надходять до дослідника, знаходити певні статистичні показники та робити після цього відповідні висновки.

Розглянемо річний прибуток 24 фірм міста: 20, 26, 26, 26, 23, 27, 26, 26, 27, 28, 26, 25, 26, 28, 26, 24, 26, 27, 26, 24, 25, 27, 27, 23 тис. грн. Побудуємо дискретний ряд розподілу річного прибутку.

Припускаємо, що дані про річний прибуток надійшли у вигляді документу Excel або ці дані можна перенести у програму Excel, сформувавши їх в один стовпець **A2:A25**. Далі відсортовуємо дані у порядку зростання, для цього використовуємо на панелі інструментів клафішу "**Сортування і фільтр**", виділивши весь масив та застосувавши "**Сортування від мінімального до максимального**". У комірці **B2** задаємо найменше значення прибутку, а саме 20, в комірці **B3**, наступне значення – 21. Виділивши ці дві комірки та протягнувши до найбільшого значення прибутку – 28 (комірка **B10**), одержимо стовпець можливих прибутків від 20 тис. грн. до 28 тис. грн.. Виділяємо масив **C2:C10**, і використовуючи на панелі інструментів клавішу f_x (Майстер функцій), у якій ставимо знак "**=**", вибираємо категорію "**Статистичні**" та функцію "**Частота**". У "**Масиві даних**" набираємо діапазон **A2:A25**, а в "**Масиві інтервалів**" – **C2:C10**. Після цього натискаємо комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter** та одержуємо дискретний розподіл річного прибутку (рис. 1).

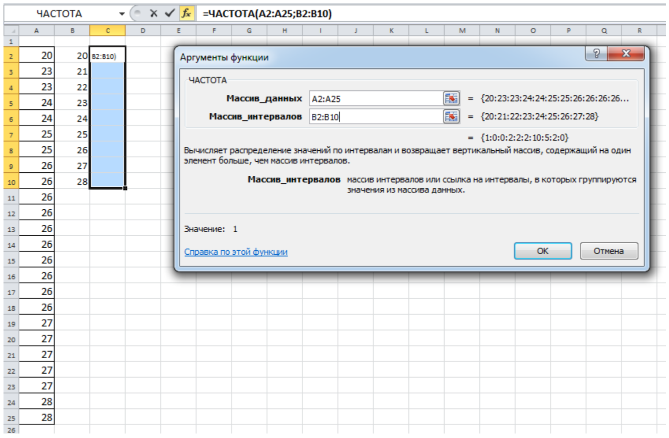


Рис. 1

Зауважимо, що не існує фірм з прибутком 21 та 22 тис. грн. (це відповідає значенню 0). Варто забрати ці дані, оскільки вони є зайвими. Для цього виділяємо масив **C1:C10** та на панелі інструментів знаходимо вкладку “**Дані**”, “**Фільтр**”. У комірці **C1** з’являється у правому куті значок фільтр, натискаємо на нього, вибираємо “**Числові фільтри**” та після цього – “**не рівно**” нулю (0) і натискаємо ОК (рис. 2).

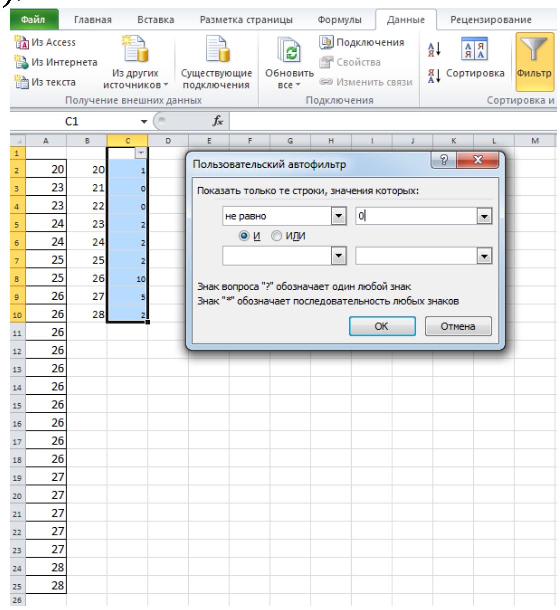


Рис. 2

Таким чином, отримано дискретний ряд розподілу річного прибутку фірм, який можна оформити у вигляді таблиці, позначивши через x_i – річний прибуток i-ої фірми, через n_i – кількість фірм, які мають річний прибуток x_i. Тоді

x_i	20	23	24	25	26	27	28
n_i	1	2	2	2	10	5	2

Література:

1. Кузик А.Д., Меньшикова О.В., Чмир О.Ю. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Львів: ЛДУ БЖД, 2012. – 192 с.

2. Карабин О.О., Чмир О.Ю., Меньшикова О.В. Математичні методи в психології. Лабораторний практикум. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 108 с.
3. Фещур Р.В., Барвінський А.Ф., Кічор В.П. Статистика. Навч. посібник. – Львів: "Інтелект-Захід", 2006. – 256 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.; ЦУЛ, 2002. – 448 с.
5. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Київ.: ВД «Професіонал», 2007. – 558 с.

К. Кріль
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Ю.Чмир,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ MAPLE ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У повсякденному житті існують процеси та явища, які можна описати у вигляді певних математичних моделей, де змінні мають набувати лише цілих значень. Тоді виникають задачі цілочисельного лінійного програмування, які можуть розглядатися як важливий математичний інструмент розробки управлінських рішень. Задачі цілочисельного програмування виникають там, де є неподільні елементи, наприклад, людські ресурси, машини, транспорт тощо.

Для знаходження розв'язку задач цілочисельного програмування можна скористатись певними програмними засобами, які допоможуть уникнути громіздких обчислень при їх розв'язуванні. Програмний пакет аналітичних обчислень Maple є потужним інструментом вирішення математичних завдань. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач цілочисельного лінійного програмування Optimization, який використовує новітні методи оптимізації. Продемонструємо його на задачі [2].

Задача. Торгова мережа складається з 6 точок. У перспективі кожну з цих точок треба розширювати за одним з 6 можливих варіантів розвитку в залежності від попиту на товари та наявності торговельних площ.

Витрати на розширення торгових точок згідно з можливими варіантами розвитку задані наступною матрицею (тис. грн.):

$$\begin{pmatrix} 200 & 140 & 150 & 130 & 150 & 140 \\ 140 & 120 & 180 & 120 & 180 & 120 \\ 150 & 150 & 160 & 100 & 200 & 100 \\ 160 & 180 & 160 & 140 & 210 & 130 \\ 120 & 100 & 150 & 130 & 140 & 140 \\ 160 & 120 & 140 & 120 & 160 & 150 \end{pmatrix}.$$

Скласти оптимальний варіант розвитку торгової мережі за умови використання кожного варіанта розвитку тільки однією точкою торгової мережі. [1]

Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [3].

> $restart;\ with(Optimization):$

> $$c := \begin{bmatrix} 200 & 140 & 150 & 130 & 150 & 140 \\ 140 & 120 & 180 & 120 & 180 & 120 \\ 150 & 150 & 160 & 100 & 200 & 100 \\ 160 & 180 & 160 & 140 & 210 & 130 \\ 120 & 100 & 150 & 130 & 140 & 140 \\ 160 & 120 & 140 & 120 & 160 & 150 \end{bmatrix} : x := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} & m_{2,6} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} \end{bmatrix} :$$

> $$F := \sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{6} \text{"c"}[i,j] \cdot \text{"x"}[i,j] \right) :$$

> $$obmez := \left(\left\{ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,1]=1,\ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,2]=1,\ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,3]=1,\ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,4]=1,\ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,5]=1,\ \sum_{i=1}^{6} \text{'x'}[i,6]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[1,j]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[2,j]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[3,j]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[4,j]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[5,j]=1,\ \sum_{j=1}^{6} \text{'x'}[6,j]=1 \right\} \right) :$$

> $S := LPSolve(F,\ obmez,\ assume = binary);$

$$S := [760, [m_{1,1}=0, m_{1,2}=0, m_{1,3}=0, m_{1,4}=0, m_{1,5}=1, m_{1,6}=0, m_{2,1}=0, m_{2,2}=1, m_{2,3}=0, m_{2,4}=0, m_{2,5}=0, m_{2,6}=0, m_{3,1}=0, m_{3,2}=0, m_{3,3}=0, m_{3,4}=1, m_{3,5}=0, m_{3,6}=0, m_{4,1}=0, m_{4,2}=0, m_{4,3}=0, m_{4,4}=0, m_{4,5}=0, m_{4,6}=1, m_{5,1}=1, m_{5,2}=0, m_{5,3}=0, m_{5,4}=0, m_{5,5}=0, m_{5,6}=0, m_{6,1}=0, m_{6,2}=0, m_{6,3}=1, m_{6,4}=0, m_{6,5}=0, m_{6,6}=0]]$$

Отриманий результат у вигляді таблиці

> $assign(S[2]);$

> $\text{'x'}=x; \text{'F'}=F;$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = 760$$

Розв’язання цієї задачі привело до висновку, що мінімальні витрати на розширення торгових точок мережі становлять F = 760 (тис. грн.). При цьому
1- ша торгова точка буде обслуговуватися п’ятим варіантом розвитку,
2-га торгова точка – другим варіантом розвитку,
3-тя торгова точка – четвертим варіантом розвитку,
4-та торгова точка – шостим варіантом розвитку,
5-та торгова точка – першим варіантом розвитку,
6-та торгова точка – третім варіантом розвитку.

Література:

1. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак – Л.: “Магнолія 2006”, 2007. – 200 с.
2. Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Дослідження операцій в транспортних системах: Навчальний посібник / Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. – Л.: ЛДУ БЖД, 2019. – 196 с.
3. Прохоров Г. В., Леденев М. А., Колбеев В. В. Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев – М.: Компания Петит, 1998. – 198 с.

Д.І. Адольф
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***І.М. Сов'як****, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

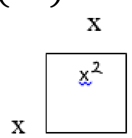
ВІДПРАЦЬОВУЄМО КВАДРАТИ

Над формулою коренів квадратного рівняння почали працювати ще мусульманські математики приблизно у 800 році. Вони базували свої дослідження на працях єгипетських, вавилонських, грецьких та індійських учених. У той час у них був один серйозний мотив - навчитися рахувати спадок згідно з мусульманськими законами.

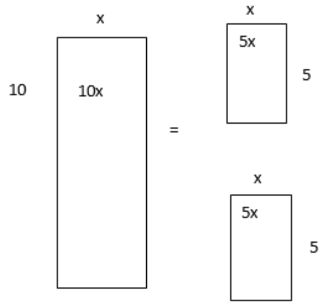
На початку IX століття Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі, математик із Багдада, написав трактат. Аль-Хорезмі розглянув складніший клас рівнянь, які уособлюють зв'язки між трьома типами чисел. Разом із відомими числами й невідомим (x) рівняння містили також квадрат невідомого (x^2). Зараз вони називаються квадратними рівняннями (з латини quadratus - квадрат). Аль-Хорезмі розглядає такий приклад:

$$x^2 + 10x = 39$$

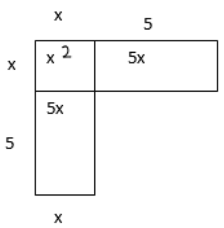
Ідея така: зобразити кожен член рівняння геометрично. Уявімо перший член (x^2) як площу квадрата зі сторонами x і x .



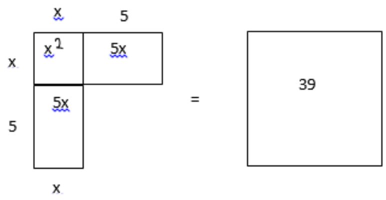
Так само другий член $(10x)$ вважатимемо як площу прямокутника зі сторонами 10 та x, або вчинимо хитріше: двох прямокутників зі сторонами 5 та x. (Якщо розбити прямокутник на два, можна буде зробити основний маневр, відомий як доповнення до квадрата).



Приєднуємо два нові прямокутники до квадрата й отримаємо вигадливу фігуру площею $x^2 + 10x$.

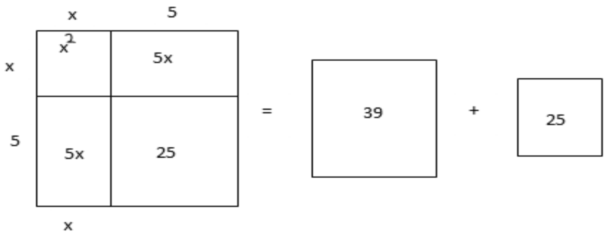


З такого погляду задача аль-Хорезмі зводиться до питання: якщо ця вигадлива фігура займає площу 39 квадратних одиниць, то яким має бути x?



$$x^2 + 10x = 39$$

Сама ця картинка вже підштовхує до наступного кроку. Подивіться на куточок, якого не вистачає. Якби тільки його можна було заповнити, фігура перетворилася б на ідеальний квадрат.



$$(x+5)^2 = 64$$

Ми додаємо квадрат 5×5, якого не вистачає, таким чином додаємо 25 квадратних одиниць до існуючої площі $x^2 + 10x$ і отримуємо разом

$x^2 + 10x + 25$. Цю об’єднану площу можна акуратніше виразити через $(x+5)^{2}$, оскільки довжина кожної сторони доповненого квадрата становить $x + 5$ одиниць.

Головне тут те, що x^2 і $10x$ тепер граційно пересуваються разом, парою, а не наступають одне одному на п’яти - їх об’єднав вираз $(x+5)^{2}$. Це нам незабаром дасть змогу знайти x.

Тим часом, оскільки ми додали 25 до лівої частини рівняння $x^2 + 10x = 39$, то повинні зробити те саме і з правою частиною, щоб рівняння й далі було збалансоване. Оскільки $39 + 25 = 64$, наше рівняння перетворюється на $(x+5)^2 = 64$. Добуваємо квадратний корінь із обох частин рівняння, отримуємо $x + 5 = 8$, отже, $x = 3$.

І раптом, о диво, 3 справді є розв’язком рівняння $x^2 + 10x = 39$. Якщо ми піднесемо 3 до квадрата (це буде 9), потім додамо 3, помножене на 10 (це 30), то сума буде 39, як і потрібно.

Є тільки один нюанс. Учений не сказав, що від’ємне число, $x = -13$, теж підходить. Якщо піднести -13 до квадрата, отримаємо 169; якщо помножити його на 10, буде -130, а разом вони дадуть 39. Зважаючи на такі аргументи, з’ясували, що розв’язки будь-якого квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,$$

де a, b і c - відомі, але довільні числа, а x - невідоме, яке можна виразити формулою коренів квадратного рівняння:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}.$$

У цій формулі дивовижне те, наскільки вона виразно точна й усеосяжна. Ось вона, відповідь для будь-яких a, b і c.

Література

1. Стівен Штрогац. Екскурсії математикою. 2019.

А.І. Моторнюк, А.М. Лаврів
Львівський національний університет імені Івана Франка
*Науковий керівник **Л.Ю.Фірман** старший викладач кафедри вищої математики.*

ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

Задача комівояжера є досить актуальною, оскільки має безліч застосувань у різних галузях, таких як: проектування, автоматизація, виробництво, економіка. Також, можна знайти застосування цієї задачі для знаходження найоптимальніших шляхів евакуації людей з небезпечних споруд чи місцевостей, коли потрібно провести евакуацію з кількох різних точок. Це можливо не лише з точки зору найкоротших шляхів, а також і найбезпечніших: для цього потрібно включати у оцінку частини маршруту не лише довжину, а й ризик (обвалу, загоряння, обстрілів і т.д.). За певної адаптації, застосувати задачу комівояжера, наприклад, можна й для розробки пошукового патерну загублених людей. Знаходження оптимального її вирішення є дуже важливим у цих питаннях, та допомагає значно збільшити продуктивність сконструйованих систем. Проте, знаходженню найкращого вирішення цієї задачі заважає її складність. Оскільки ця задача відноситься до класу NP-повних задач[3], то знаходження найкращого шляху не може бути здійснене за поліноміальний час. Таким чином, вирішення задачі зводиться до пошуку найбільш оптимального шляху за допустимий час. Тому, для кожної окремої задачі потрібно визначити який з двох критеріїв, час чи довжина шляху, пріоритетні, зважаючи на ресурсозатратність.

Задача комівояжера полягає у знаходженні найкоротшого циклу Гамільтона у графі[2]. Оскільки найоптимальніший розв'язок знайти неможливо, то доводиться використовувати апроксимації. На цьому етапі нам потрібно вирішити що нам важливіше: час чи оптимальність? Існують наступні методи вирішення задачі, що дають різноманітні показники оптимальності знайденого маршруту та часу, витраченого на його знаходження:

- Жадібні алгоритми
- Генетичні алгоритми
- Методи дискретної оптимізації[4]

Задача комівояжера (часто вживається абревіатура TSP – Traveling Salesman Problem) полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту, що проходить через всі міста(вершини графа). Загалом критерій "вигідності" обирається залежно від конкретної ситуації – це може бути найкоротший шлях, або ж найдешевший(часто застосовується для авіа перельотів). Зазвичай у задачі вимагається проходити через кожне місто лише раз. Таким чином задача зводиться до пошуку найкоротшого Гамільтонового циклу у зваженому графі. Розв'язання цієї задачі має дуже високу складність, оскільки передбачає перебір усіх варіантів таких циклів. Так, для повного неорієнтованого графа часова складність складає:

$$O\left(\frac{(n-1)!}{2}\right)$$

Що відносить цю задачу до класу складності NP, зокрема ця задача є NP повною. Розглянемо приклад: для 25 міст кількість таких перестановок у графі буде числом настільки великим, що комп'ютеру, який робить мільярд перестановок за секунду, знадобиться 10 мільйонів років, аби розв'язати цю задачу методом повного перебору. Відповідно до умови завдання, способом опису графа є матриця суміжності. Очевидно, що вхідними даними теж має бути матриця суміжності. Розв'язком буде шлях(впорядкований список ребер), який складає оптимальний цикл у графі, та його вартість.

Для розв'язання задачі оберемо "Метод гілок та меж"[1], зокрема його частковий випадок – алгоритм Літла, який передбачає роботу з матрицею суміжності. Для реалізації цього алгоритму як множину потрібно обирати матрицю суміжності[2]. Оцінка знизу передбачає такі дії: знаходження мінімальних елементів усіх рядків, віднімання від усіх рядків мінімального елемента, такі самі дії проводяться і зі стовпцями, після чого за оцінку береться сума усіх мінімальних елементів. Якщо оцінка для поточної підмножини перевищує попередній «рекорд», то подальший розгляд цієї підмножини непотрібний, тому відкидаємо її. Далі проводимо підрахунок штрафів для елементів, що рівні нулю. Штрафом назвемо суму мінімальних елементів рядка і стовпця. Додамо ребро M(i, j) з найбільшим штрафом до шляху. Тоді сформуємо нову матрицю, у якій видалимо рядок i та елемент j. Другою підмножиною буде матриця, що містить ці стовпці, але елемент i, j прирівняємо до «безмежності». Рекурсивно розглянемо обидві підмножини.

Вибраний алгоритм має такий ряд переваг:

1. Коректна робота з ациклічними графами(у деяких випадках можливий довгий перебір)
2. Можливість працювати з орієнтованими графами
3. Можливість працювати як з повним, так і з неповним графом

Отже, підсумовуючи вище наведене, можна сказати, що задача комівояжера є частковим випадком гамільтонової задачі про мандрівника. Суть задачі комівояжера складається у знаходженні сумарної мінімальної характеристики (відстані, вартості проїзду і т. д.). Існують декілька методів рішення задачі комівояжера: жадібні алгоритми, генетичні алгоритми і ще безліч їх узагальнень. Одним з найпоширеніших методів є метод "гілок та меж", він нам дає в результаті саме оптимальне рішення. Задача про комівояжера має безліч узагальнень і методи її рішення в різних виявах використовуються на практиці.

Література

1. Dakin, R. J. (1965). A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. In: The Computer Journal, Volume 8
2. Chartrand, G. Introductory Graph Theory. New York: Dover, 1985.
3. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman (2001). Introduction to Automata Theory, Languages and Computation
4. Томас Кормен, Чарльз Лейзерсон, Рональд Рівест і Кліффорд Штайн. Вступ в алгоритми, 2-ге видання. MIT Press and McGraw-Hill, 2001.

В.Б. Войтович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **І.М. Сов'як**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

УСЕ ПРО ЧИСЛО «е»

Є кілька чисел, які стали настільки знамениті, що за сценічний псевдонім можуть узяти всього одну літеру. Такого не дозволяють собі навіть Мадонна чи Прінс. Найвідоміше з них – π, число, яке раніше було відоме як 3,14159…

На п'яти йому настає i - важлива персона в алгебрі, уявна одиниця. Це персонаж із настільки радикальним характером, що змінив саме уявлення про те, що значить бути числом. Хто там далі у списку знаменитостей?

Скажіть привіт e. Своє ім'я воно отримало за вагому роль в експоненціальному зростанні.

Розглянемо що таке взагалі e? Його числова величина – 2,71828…,але навряд чи у вас після цього настане просвітлення. Я могла б сказати, що e – це число до якого наближається сума

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\cdots,$$

якщо ми беремо дедалі більше членів. Але й це теж не особливо допоможе. Замість цього безпосередньо погляньмо, як e працює.

Уявіть, що ви поклали 1000 доларів на депозит у банку, який виплачує надзвичайно щедрі відсотки – 100 відсотків річних. За рік у вас на рахунку буде дві тисячі доларів: 1000 початкового депозиту плюс 100 відсотків, що дорівнює ще 1000 доларів.

Ви прикидаєтеся дурником і просите банк дати вам ще вигідніші умови: як вони дивляться на те, щоб виплачувати відсотки раз на півроку, тобто після перших шести місяців виплачувати перші 50 відсотків, а в кінці року – другі? Ви однозначно тут виграєте, тому що буде нараховуватися відсоток на відсоток, але наскільки сильно?

Відповідь така. Ваша початкова 1000 доларів за перші півроку помножиться на 1,5, і за другі півроку – ще раз на 1,5. А оскільки 1,5 помножити на 1,5 дорівнює 2,25, то через рік у вас на рахунку буде цілих 2250 доларів – значно більше, ніж ті 2000, які ви отримували на початкових умовах.

А що, коли ви підете ще далі й умовите банк поділити рік на ще більше періодів – на дні, секунди, навіть наносекунди? Ви заробите справжнє багатство?

Щоб результати були красивіші, нехай рік буде поділений на сто рівних періодів, із виплатою один відсоток у кінці кожного (100 відсотків річних поділені на 100 виплат). Гроші у вас будуть множитися на 1,01 в сотому степені, і це буде приблизно 2,70481. Інакше кажучи, ви отримаєте не 2000 і не 2250, а цілі 2704,81 долара.

І нарешті, якщо відсоток буде нараховуватися *нескінченно* часто (це називається неперервною капіталізацією), через рік у вас буде більше грошей, але не набагато: 2718,28. Точна відповідь – 1000 доларів, помножені на e, де e – границя, яка виникає в цьому процесі:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828$$

Це квінтесенція міркувань у численні. Числення від більш ранньої математики відрізняється прагнення використовувати для своїх потреб надзвичайну силу нескінченності. Працюємо ми з границями, похідними, інтегралами – нам завжди так чи інакше потрібно підкрадатися до нескінченності.

У граничному процесі, який вище привів нас до числа e, ми уявляли, як ділимо рік на дедалі більше періодів, часові інтервали стають дедалі тонші, і зрештою ми наближаємося до того, що можна описати тільки як нескінченно багато нескінченно тонких часових інтервалів. (Може, і звучить парадоксально, але насправді це те саме, що вважати коло границею правильного багатокутника, у якого стає дедалі більше сторін, кожна з яких стає дедалі коротшою). Неймовірно тут ось що: що частіше виплачуються відсотки, то повільніше зростає кількість грошей протягом кожного періоду. Але за рік ви все одно одержите значну суму, бо ж її стільки разів множили!

Ось це і є ключ до розуміння того, чому e повсюди. Воно часто показує себе, коли щось змінюється завдяки загальному ефекту від багатьох зовсім не великих подій.

Література

1. Стівен Штрогац. Екскурсії математикою. 2019.

Ю. Сташків
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.Ю. Чмир,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА СПОСОБИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ У ПАКЕТІ MAPLE

Описуючи певні економічні процеси та явища, складається математична модель у вигляді цільової функції та системи обмежень на ресурси, які відображають істотні характеристики досліджуваного об'єкта. Зокрема, якщо функція та обмеження є лінійними, то такого роду моделі зустрічаються в лінійному програмуванні. До розв'язування таких задач використовують загальний метод лінійного програмування – симплекс-метод.

З кожною задачею лінійного програмування пов'язана деяка інша, також цілком визначена задача лінійного програмування. Їх зв'язок взаємний і настільки тісний, що при розв'язуванні однієї з них фактично розв'язується і інша. Таку пару задач називають парою взаємно двоїстих задач лінійного програмування. Теорія двоїстості в лінійному програмуванні вивчає загальні властивості пари тісно пов'язаних між собою так званих двоїстих задач. З цієї теорії можна зробити певні економічні висновки такі, як: оцінка впливу зміни ресурсів на функцію мети, аналіз дефіцитності ресурсів, рентабельність виробництва продукції та доцільність розширення асортименту продукції.

Для знаходження розв'язку таких моделей необхідно оволодіти основними методами математичного моделювання та певними програмними засобами, які допоможуть уникнути громіздких обчислень при розв'язуванні. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач лінійного програмування simplex, який базується на симплекс-методі. Цим пакетом можна знаходити розв'язок двоїстої задачі, але попередньо потрібно пряму задачу записати у стандартній формі. Також існує функція dual у програмі Maple, за допомогою якої складається двоїста задача лінійного програмування. Продемонструємо ці функції на наступній задачі [2].

Задача. Припустимо, що група підприємців, накопичивши певний стартовий капітал, вирішила створити мале підприємство з виготовлення бетону, освоївши для початку технологію виготовлення бетону двох марок М1 та М2. Відомо, що для виготовлення бетону потрібна така сировина: цемент, пісок, гравій і вода. Цю сировину надалі будемо називати ресурсами. Закуплено 10 т. цементу, 10 т. піску і 12 т. гравію. Ці величини прийнято називати запасами ресурсів. Виробництво розміщене біля природного водоймища, тому запаси води не лімітовані. Із замовником узгоджена договірна ціна готової продукції, а також наступна технологія її виготовлення: відповідно цемент, пісок, гравій входять у бетон М1 у пропорції 1:2:2, а у бетон М2 – у пропорції 2:1:2. Після економічних розрахунків одержано, що прибуток (різниця між вирученими і затраченими коштами) від реалізації готової продукції бетону М1, на виробництво якого використано 1т. цементу, 2т. піску і 2т. гравію, становить 50 грн. Одержаний об'єм бетону М1 приймемо за одиницю готової продукції бетону М1. Аналогічно одержано, що прибуток від реалізації готової продукції бетону М2, на виробництво якого використано 2т. цементу, 1т. піску і 2т. гравію, становить 40 грн. Одержаний об'єм бетону М2 приймемо за одиницю готової продукції бетону М2. Скільки одиниць бетону М1 та М2 потрібно запланувати до виготовлення, щоб одержати найвищий прибуток від його реалізації? [1]

Позначимо x_1, x_2 кількість одиниць готової продукції відповідно бетону М1 і бетону М2. Математична модель виробничого процесу має вигляд: знайти найбільше значення прибутку

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

за умови виконання обмежень

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 10, \\ &2x_1 + x_2 \le 10, \\ &2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язання прямої задачі було проведено в [3] з використанням пакету simplex та привело до висновку, що потрібно виготовити чотири одиниці бетону марки М1 і дві одиниці бетону марки М2. При цьому прибуток від реалізації виготовленої продукції буде максимальним і становитиме 280 грн.

Припустимо тепер, що керівництво підприємства, яке займається виготовленням бетону, з певних причин вирішило не виготовляти бетон, а продати на ринку придбані запаси ресурсів – 10 т. цементу, 10 т. піску і 12 т. гравію. Природно, що воно як продавець намагатиметься одержати від продажу ресурсів прибуток, не менший від того, який могло б мати від реалізації бетонів двох марок. Продавець повинен брати до уваги також те, що покупець зацікавлений придбати ресурси за найнижчою ціною. Виникає запитання: за якою ціною потрібно продавати цемент, пісок і гравій, щоб задовольнити інтереси продавця і покупця?

Нехай y_1, y_2, y_3 – ціни 1т. відповідно цементу, піску і гравію. Оскільки на виготовлення одиниці бетону марки М1 витрачається 1т. цементу, 2т. піску і 2т. гравію, то сумарна вартість ресурсів складає $y_1 + 2y_2 + 2y_3$. Зрозуміло, що продавець зацікавлений отримати від продажу тих ресурсів виручку не менше ніж 50 грн. (прибуток від реалізації одиниці бетону марки М1). Таким чином, $y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 50$. Аналогічні міркування стосовно бетону марки М2 приводять до нерівності $2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 40$.

У разі виконання двох останніх нерівностей розпродаж усіх ресурсів (цемент, пісок, гравій) принесе підприємству прибуток, не менший від того, який воно одержало б від реалізації бетону марки М1 і бетону марки М2.

З іншого боку, як зазначалося вище, покупець зацікавлений у тому, щоб його витрати на придбання цих ресурсів $W = 10y_1 + 10y_2 + 12y_3$ були найменшими.

Отже, приходимо до задачі

$$W(y_1, y_2, y_3) = 10y_1 + 10y_2 + 12y_3 \to \min$$

за умови виконання обмежень

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 50,$$
$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 40,$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Ця задача є двоїстою до задачі про виготовлення бетону. Розв'язок задачі знаходимо за допомогою пакету simplex (рис. 1).

```
> restart;
Підключаємо пакет simplex
> with(simplex) :
Задаємо функцію мети W та систему обмежень -- нерівностей ineq
> W := 10·y1 + 10·y2 + 12·y3 : ineq := {y1 + 2·y2 + 2·y3 ≥ 50, 2·y1 + y2 + 2·y3 ≥ 40, 0 ≤ y1, 0 ≤ y2, 0 ≤ y3} :
Знаходимо мінімум функції W при заданій системі обмежень -- нерівностей ineq
> minimize(W, ineq);
                                {y1 = 0, y2 = 10, y3 = 15}
Знаходимо мінімальне значення функції W в оптимальній точці (0;10;15)
> assign(minimize(W, ineq)); W;
                                          280
```

Рис. 1. Розв'язок двоїстої задачі у пакеті Maple.

Задача має розв'язок $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 15$. При цьому $W_{\min} = 280$.

За допомогою функції dual програма Maple складе двоїсту задачу до даної задачі. Далі розв'язок двоїстої задачі знаходимо за допомогою пакету simplex (рис. 2).

```
> restart;
Підключаємо пакет simplex
> with(simplex) :
Задаємо функцію мети F та систему обмежень -- нерівностей ineq
> F := 50·x1 + 40·x2 : ineq := {x1 + 2·x2 ≤ 10, 2·x1 + x2 ≤ 10, 2·x1 + 2·x2 ≤ 12} :
> dual(F, ineq, y);
                  10 y1 + 10 y2 + 12 y3, {40 ≤ 2 y1 + y2 + 2 y3, 50 ≤ y1 + 2 y2 + 2 y3}
> minimize(dual(F, ineq, y), NONNEGATIVE)
                                {y1 = 0, y2 = 10, y3 = 15}
> assign(minimize(dual(F, ineq, y), NONNEGATIVE)); dual(F, ineq, y);
                                280, {40 ≤ 40, 50 ≤ 50}
```

Рис. 2. Запис двоїстої задачі та її розв'язок у пакеті Maple.

Література:

4. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак – Л.: "Магнолія 2006", 2007. – 200 с.

5. Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Дослідження операцій в транспортних системах: Навчальний посібник / Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. – Львів: ЛДУ БЖД, 2019. – 196 с.

6. Лемішко М., Карабин О.О., Чмир О.Ю. Про методи розв'язування задач лінійного програмування. XIII Міжнародна науково-практична конференція молодих вчених, курсантів та студентів "Проблеми та перспективи розвитку системи безпеки життєдіяльності". Зб. наук. праць міжнар. наук. - практ. конф. мол. вч., курс. та студ., 22-23 березня 2018 р. – Львів, 2018. – С. 330 - 332.

СЕКЦІЯ 3. Історія математики

А. Береза
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ІСТОРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Архімед використав метод вичерпування для розрахунку площі під кривою параболи.

В стародавньому періоді з'явилися деякі ідеї, які згодом привели до появи інтегрального числення, але ці ідеї не розвинулися у точну і систематизовану теорію. Розрахунок об'єму і площі, що є однією із задач інтегрального числення, було знайдено у одному з єгипетських математичних папірусів (13-династії, близько 1820 р. до н.е.), але наведені формули є простими інструкціями, без описання методу, і в ньому бракує деяких основних компонент. В епоху давньогрецьких математиків, Евдокс (близько 408–355 р. до н.е.) використовував метод вичерпування.

Обчислення площі кола методом вичерпування. Метод полягав в наступному: для знаходження площі (або об'єму) деякої фігури в цю фігуру вписувалася монотонна послідовність інших фігур і доводилося, що їх площі (об'єми) необмежено наближаються до площі (об'єму) шуканої фігури. Потім обчислювалася границя послідовності площ (об'ємів), для чого висувалася гіпотеза, що вона дорівнює деякому числу і доводилося, що зворотне призводить до протиріччя.
Оскільки загальної теорії границь не було (греки уникали поняття нескінченності), всі ці кроки, включаючи обґрунтування єдиності границь, повторювалися для кожного завдання. Архімед (близько 287–212 до н.е.) розвинув цю ідею далі, і заснував методи евристики, які подібні до методів інтегрального числення. Метод вичерпування згодом незалежно від того було відкрито в Китаї математиком *Лю Хуей* у 3-му столітті н.е. для того, щоб знайти площу кола. В 5-му столітті н.е., Цзу Генчжи, син Цзу Чунчжи, заснував метод для знаходження об'єму сфери, який згодом назвали принципом Кавальєрі.

"Числення було першим досягненням сучасної математики і важко переоцінити його значимість. Воно дає більш однозначні визначення ніж інші, і є початком сучасної математики, системою математичного аналізу, що є логічним розвитком, і як раніше втілює найбільший технічний розвиток точного мислення."—Джон фон Нейман в Європі фундаментальною роботою в цьому напряму був трактат Бонавентура Кавальєрі, який запропонував, що об'єми і площі треба розраховувати як суму об'ємів і площ нескінченно тонких розділених частин. Ідеї були схожими на ідеї Архімеда, але вважають що цей трактат було втрачено в 13-му столітті, і його знову було знайдено на початку 20-го століття, тому Кавальєрі він був не відомим. Роботу Кавальєрі спочатку не набула загального визнання, оскільки його метод міг призвести до неправильних результатів, а нескінченно малі які він запропонував спочатку не сприйняті. Приблизно в той самий час, разом із формальним дослідженням числення нескінченно малих Кавальєрі в Європі розвивалося поняття числення скінченних різниць. П'єр Ферма, стверджуючи що позичив це у Діофанта, запропонував поняття наближеної рівності, що означало рівність до деякої нескінченно малої похибки. Поєднати це змогли Джон Валліс, Ісаак Барроу, і Джеймс Грегорі, які згодом довели другу частину фундаментальної теореми числення близько 1670 р. Ісаак Ньютон дослідив і використав числення у своїй роботі з законів динаміки і гравітації. Такі поняття як правило добутку і ланцюгове правило, нотації похідних вищого порядку і ряди Тейлора, і аналітичні функції були запропоновані Ісааком Ньютоном у вигляді нотації, яку Ньютон використовував для вирішення задач математичної фізики. У своїй роботі, Ньютон перефразував свої ідеї так, щоб вони відповідали математичним ідіомам того часу, замінивши розрахунки нескінченно малих еквівалентними геометричними аргументами, які, як вважалося, були поза сумнівами. Він використав методи числення для вирішення задачі руху планет, форми поверхні рідини, яка обертається, сплющеності Землі, переміщення ваги, що рухається по циклоїді, і для багатьох інших задач, що описав у своїй роботі «Математичні начала натуральної філософії» (1687). Готфрід Вільгельм Лейбніц був першим, хто опублікував свої результати з дослідження методів числення. Готфрід Вільгельм Лейбніц надав чіткий набір правил для роботи із нескінченно малими величинами, що дозволили розраховувати похідні другого і вищих порядків, і сформулював правило добутку і ланцюгове правило, в диференційній і інтегральній формах. На відміну від Ньютона, Лейбніц приділив увагу формалізму, часто витрачаючи на це цілі дні для пошуку правильних позначень для понять. Базовими уявленнями, які сформулювали обидва Ньютон і Лейбніц були правила диференціювання і інтегрування, похідні другого і вищих порядків, і нотації наближення за допомогою поліноміальних рядів. За часів Ньютона фундаментальна теорема числення вже була відома. Із часів Лейбніца і Ньютона, багато математиків зробили свій внесок в розвиток числення.

Одну із перших і більш повних робіт із числення нескінченно малих і інтегрального числення написала Марія Ґаетана Аньєзі в 1748.

Отже кожен метод і кожна теорема має свою історію. Котрі вдосконалювались роками, віками і тисячоліттями. Вони дійшли до нашого часу такими якими ми зараз їх бачим. Але ніхто не знає чи це кінець їх досліджень. Диференціальне числення застосовують у кожній області фізичних наук, математиці, комп'ютерних науках, статистиці, техніці, економіці, бізнесі, медицині, демографії, і інших областях, в яких задачу можна математично змоделювати і необхідно знайти оптимальне рішення. Це дозволяє перейти від (не постійних) швидкостей зміни до загальної зміни чогось і навпаки.

Література:

1. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
2. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Збірник задач. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
3. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
4. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

В. Возна
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ЛОГАРИФМІВ

Історія логарифмів, як поняття алгебри простежується з античних часів. Ідейним джерелом та стимулом застосування логарифмів послужив той факт (відомий ще Архімеду), що при перемноженні степенів з однаковою основою їх показники додаються. Індійський математик VIII століття Вірасена, опублікував таблицю цілісних показників, тобто фактично таблицю логарифмів.

Вирішальний крок було зроблено у середньовічній Європі. Потреба в складних розрахунках у XVI столітті швидко зростала, і значна частина труднощів була пов'язана з множенням та розподілом багатозначних чисел, а також добування кореня із числа.

Наприкінці століття кільком математикам спала на думку ідея: замінити трудомістке множення на просте додавання. Першим цю ідею опублікував у своїй книзі « *Arithmetica integra* » (1544) Міхаель Штіфель , який, втім, не доклав серйозних зусиль для практичної реалізації своєї ідеї. Головною заслугою Штіфеля є перехід від цілих показників степеня до довільних раціональних. У 1614 році шотландський математик - аматор Джон Непер опублікував латинською мовою твір під назвою «*Опис дивовижної таблиці логарифмів*» та «*Побудова дивовижної таблиці логарифмів*». Безпосередньою метою їх розробок було полегшення складних астрологічних розрахунків; саме тому в таблиці були включені лише логарифми тригонометричних функцій.

Лондонський професор Генрі Брігс видав 14-значні таблиці десяткових логарифмів (1617), причому не для тригонометричних функцій, а для довільних цілих чисел до 1000 (7 років по тому Брігс збільшив кількість чисел до 20000). У 1619 році лондонський вчитель математики Джон Спайделл перевидав логарифмічні таблиці Непера, виправлені та доповнені так, що вони фактично стали таблицями натуральних логарифмів. У Спайделла теж були й логарифми самих чисел до 1000.

У 1620 роках Едмунд Уінгейт і Вільям Відред винайшли першу логарифмічну лінійку, що служила незамінним розрахунковим знаряддям інженера. За допомогою цього компактного інструменту можна швидко виконувати всі операції алгебри, в тому числі за участю тригонометричних функцій. Точність розрахунків – близько 3 значущих цифр. До кінця XIX століття загальноприйнятого позначення логарифму було: основа a вказувалася то ліворуч, то вище символу *log*. В кінцевому рахунку математики дійшли висновку, що найбільш зручне місце для основи - нижче рядка, після символу *log*. Короткі позначення найбільш уживаних видів логарифму для десяткового і натурального - з'явилися набагато раніше відразу в кількох авторів і закріпилися остаточно також до кінця XIX століття.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування - як операції, зворотній зведенню в степінь - вперше з'явилося у Валліса (1685) та Йоганна Бернуллі (1694), а остаточно було узаконено Ейлером. У книзі «Вступ до аналізу нескінченних» (1748) Ейлер дав сучасні визначення як показникової, так і логарифмічної функцій.

З властивостей логарифма випливає, що замість трудомісткого множення багатозначних чисел достатньо знайти (по таблицях) і скласти їх логарифми, а потім за тими самими таблицями (розділ « Антилогарифми ») виконати потенціювання, тобто знайти значення результату за його логарифмом. Виконання розподілу відрізняється лише тим, що логарифми віднімаються.

Перші таблиці логарифмів опублікував Джон Непер (1614), і вони містили лише логарифми тригонометричних функцій, причому з помилками. Незалежно від нього свої таблиці опублікував Йост Бюргі , друг Кеплера (1620). В 1617 оксфордський професор математики Генрі Брігс опублікував таблиці, які вже включали десяткові логарифми самих чисел від 1 до 1000, з 8 (пізніше - з 14) знаками. Але й у таблицях Брігса виявилися помилки. Перше безпомилкове видання на основі таблиць Георга Веги (1783) з'явилося лише у 1857 році в Берліні (таблиці Бремікера).

На думку багатьох істориків, поява логарифмів вплинула на багато математичних концепцій, у тому числі:

- Формування та визнання загального поняття ірраціональних та трансцендентних чисел.
- Поява показникової функції та загального поняття числової функції, числа Ейлера, розвиток теорії різницевих рівнянь.
- Початок роботи з нескінченними рядами.
- Загальні методи розв'язання диференціальних рівнянь різних типів.
- Істотний розвиток теорії чисельних методів , потрібних для обчислення точних логарифмічних таблиць.

Література:

1. Гіршвальд Л. Я. Історія відкриття логарифмів. - Харків: Вид-во Харківського університету, 1952. - 33 с.
2. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
3. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.). Математика XIX століття. Геометрія. Теорія аналітичних функций. - М .: Наука, 1981. - Т. II.

А. Гребенніков
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Поняття інтеграла пронизує всю сучасну математику. І не тільки це – в науках фізичного і технічного циклів знаходять застосування різні варіації інтеграла. Варто розкрити будь-яку книгу, що відноситься до точних наук, як зустрінеться знак інтеграла і пропозиції, включаючи слово «інтеграл». Більш того, останнім часом увійшли до ужитку такі терміни, як, наприклад, «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямого відношення до інтеграла не мають, але смислове навантаження зберігають і знаходять широке розповсюдження в літературі і розмовній мові.

Початки інтегральних методів простежуються в працях Архімеда, що користувався ними при вирішенні багатьох геометричних завдань і доведенні теорем. У книгах по історії математики відповідні розділи так і називаються - «Інтегральні методи Архімеда». І в цьому немає ніякого перебільшення, хоча відкриття інтегрального числення, час, коли вперше було вимовлено слово «інтеграл», відокремлюють від робіт Архімеда величезний часовий інтервал в 2000 років. Для переходу від методів Архімеда до алгоритму інтегрального числення, застосовного до обширного класу завдань, математика повинна була пройти довгий шлях, на якому була створена буквенна символіка, побудовано вчення про функціональні залежності, розроблений аналітичний апарат для їх виразу. На цьому шляху до робіт Архімеда зверталися двічі: на арабському середньовічному Сході і в Європі XVI-XVII ст. Але всі спроби значно просунутися вперед кінчалися невдачею. Лише створення букменого числення Вієтом і аналітичній геометрії Декартом і Ферма, а також успіхи фізичних наук Нового часу забезпечили можливість розробки аналізу нескінченно малих. Роль Архімеда в цьому процесі Лейбніц охарактеризував словами: «Уважно читаючи твори Архімеда, перестаєш дивуватися зі всіх новітніх досліджень геометрії». Вдосконалення методів Архімеда і створення інтегрального числення, його розвиток здійснювалися в роботах Кеплера, Кавальєрі, Торрічеллі. Паскаля, Ферма, Валліса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбніца, братів Якоба і Іоганна Бернуллі (І. Бернуллі належить термін «інтегральне числення»; він перший прочитав, курс лекцій з інтегрального числення для маркіза Лоппіталя), Ейлера, Коші, Рімана. І ще одна специфічна деталь. У певний період свого розвитку математика підійшла до такого рубежу, коли назріла необхідність вирішення насущних завдань, пов'язаних з фундаментальними відкриттями. Одними і тими ж завданнями займалися часто багато математиків, і встановити пріоритет, вказати, хто перший зробив те або інше відкриття, скрутно. Тому об’єктом мого дослідження стала історія розвитку математичної науки, а предметом – історія розвитку поняття інтегралу.

Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпання Евдокса (приблизно 370 до н. э.), який намагався знайти площі і об'єми, розриваючи їх на нескінченну безліч частин, для яких площа або об'єм вже відомі. Цей метод був підхоплений і розвинений Архімедом, і використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі круга. Фундаментальний внесок Евдокса в математику складає метод вичерпання, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався стародавніми при доведенні теорем, пов'язаних з обчисленням площ, об'ємів і інших величин. Він вважається першим варіантом теорії меж. Отже, вперше ідею інтегрування ми знаходимо в працях Архімеда. Вона виникла з потреб практики і ніяк не була вільним творінням розуму.

У XVII ст. велика група математиків займалася наступними основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення, і обчисленням квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення. Заслуга Ньютона і Лейбніца полягала у відшуканні внутрішнього зв'язку між цими завданнями, синтез яких і був основою для створення могутнього знаряддя науки і наукового природознавства. Користування теоремою про взаємну оберненість операцій диференціювання і інтегрування і знання похідних багатьох функцій дали Ньютону можливість по флюксіях отримувати флюенти (функції), тобто інтегрувати. Якщо інтеграли безпосередньо не обчислювалися, Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневий ряд і інтегрував його почленно. Введення такого прийому – заслуга Ньютона. Для розкладання функцій в ряди він найчастіше користувався відкритим ним розкладанням степеня бінома, діленням чисельника на знаменник, знаходження кореня.

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні поняття диференціального і інтегрального числення. Він дав загальні правила вирішення завдань на квадратуру і дотичні, встановив зв'язок між завданнями диференціювання і інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася понині. Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому кругу фахівців, які вирішували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, застосовного до широкого круга завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Література:

1. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.). Математика XIX століття. Геометрія. Теорія аналітичних функцій. - М .: Наука, 1981. - Т. II.

Д.В Слободян
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЖИТТЯ ТА ТВОРЧІСТЬ БЛЕЗА ПАСКАЛЯ

Блез Паскаль (1623-1662) - французький математик, фізик, винахідник, письменник і теолог, народився 19 червня 1623 року в регіоні Овернь, що розташований у південно-центральній частині Франції. Його сім'я була шляхетного походження, батька звали Етьєном Паскалем, мати Паскаля, Антуанетта Бегон, родом із забезпеченої буржуазної сім'ї. Його основні внески у науку включають теорему Паскаля, паскалін, існування вакууму або його експерименти з атмосферним тиском.

Теорема Паскаля була опублікована в 1639 році в "*Есе Коніка*". Його теорема, відома як містичний шестикутник Паскаля, пояснює, що "якщо шестикутник вписаний в конічний переріз, то точки перетину пар протилежних сторін колінеарні".

У 1647 році Паскаль вперше продемонстрував існування вакууму. Всупереч думкам Арістотеля і Декарта, Паскаль провів низку експериментів з барометром і ртуттю, продемонструвавши тим самим те, що теоретизував Торрічеллі. Таким чином йому вдалося довести що простір, що існує над рідиною всередині барометра, - це вакуум. Цей експеримент заклав основу для його наступного дослідження атмосферного тиску.

У 1648р Паскаль довів, що коли тиск здійснюється в будь-якій точці обмеженої рідини, цей тиск буде здійснюватися у всіх точках цієї рідини. Цей принцип зробив революцію у світі гідравліки, яка є основою всіх видів механіки, від повітроплавання до рідин. Для перевірки теорії Паскаль провів експеримент і створив шприц для демонстрації тиску, що став попередником шприца, який використовується в сучасній медицині.

Трикутник Паскаля був сформульований у 1653 р., що заклав основи для розвитку теорії ймовірностей, яка з’явилася через рік. Трикутник починається зверху з одиниці, і обидві його сторони є одиницями, сума верхніх чисел приводить до нижніх чисел, і таким чином формується структура трикутника. Оскільки числа нескінченні, так само трикутник. Він широко застосовується в алгебрі, ймовірностях, комбінаториці та інших галузях математики.

Теорія ймовірності виникає в 1654 р. За допомогою трикутника, Паскаль та Ферма з математичною точністю встановили числові ймовірності того, яким може бути результат гри, якби вони змогли її продовжити, щоб справедливо розподілити перемогу. Ця теорія все ще використовується в математиці, криптології та навіть у повсякденному житті.

Паскалін - це попередник сучасних калькуляторів, що створений Паскалем у 1645 р., щоб полегшити роботу батька при обчисленні податків. Паскаль був єдиним, хто міг розробляти та виготовляти калькулятори у Франції.

Припускають, що Блез Паскаль винайшов рулетку, тим більше, що слово "рулетка" означає маленьке колесо по-французьки. У 1655 році Паскаль розробив рулетку з 36 цифр, яка не містить нуля. Він зробив це, бо шукав машину безперервного руху, а Франсуа і Луї Блана в 1842 р. додали нуль до колеса Паскаля.

У 1662 році, незадовго до смерті, Паскаль запропонував і запатентував ідею створення колективної служби перевезень. Саме цим починанням розпочався громадський транспорт у столиці Франції.

Гідравлічний прес це система, за допомогою якої демонструється принцип Паскаля. Він складається з рідини, зануреної в закритий контейнер, з двома кінцями, в яких є два поршні, які можуть рухатися. Якщо тиск застосовується до одного з них, тоді зазначений тиск передається на інший кінець і збільшується в стільки разів, скільки розмір поверхні, на яку він передається.

Твори Блеза Паскаля мають великий і різноманітний характер, оскільки він працював над темами, пов’язаними як з математикою, так і з областю релігії. З усіх його творів, одними з найважливіших були «*Провінційні листи»* і «*Думки»*.

Коли йому було 39 років, Блез Паскаль помер. Перед смертю Паскаль домовився про продаж його активів, а зібрані гроші були передані на благодійні цілі.

Література:

1. Гербіс, Н. Паскаль займається фізикою та метафізикою: якими були знамениті винаходи Блеза Паскаля? Витягнуто з science.howstuffworks.com.
2. 10 основних внесків Блеза Паскаля. (2017) Витягнуто з learnodo-newtonic.com
3. Росс, Дж. (2004) Спадщина Паскаля. Отримано з ncbi.nlm.nih.gov.
4. Coolman, R (2015) Властивості трикутника Паскаля. Витягнуто з livescience.com https://uk.warbletoncouncil.org/aportaciones-blaise-pascal-2602

М. Ізьо
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ШКОЦЬКА КНИГА

В 50 - ті роки минулого століття у Львові сформувалась група активно працюючих математиків – здебільшого учнів Стефана Банаха і Гуго Штайнгауза: Юліуш-Павел Шаудер, Стефан Качмаж, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Герман Ауербах, Владислав Нікліборц, Юзеф Шраєр, Станіслав Улям, Мирон Зарицький, Марк Кац, Маєр Айдельгайт. До цієї групи також належали і професори Львівської Політехніки Антоній Ломницький, Казимир Куратовський, Влодзімеж Стожек.

Щосуботи відбувались засідання Львівської секції Польського математичного товариства, дискусії після яких часто продовжувались у кав'ярнях. З часом улюбленим місцем львівських математиків стала кнайпа «Шкоцька» або «Шотландська» на розі сучасних вулиць Герцена і Фредра. При потребі смачно поїсти і випити, товариство заходило до знаменитої пані Телічкової, чия локація знаходилась поруч.

У «Шкоцькій» було започатковано однойменну книгу математичних проблем – звичайний бухгалтерський зошит, який принесла дружина Банаха Луція Банах чи то на зауваження працівників кнайпи про складність витирання мармурових столів від записів атраментовими олівцями, чи просто для зручного нотування задач для вирішення у майбутньому. Першу задачу записав Стефан Банах 17 липня 1935 року, а до 1941 року в книзі їх вже було 193. Проблему нотували на одному боці сторінки, а на порожньому звороті записували розв'язок, за який інколи пропонувалась винагорода – мале чи велике пиво, обід в «Жорж» тощо. «Шкоцька книга» збережена завдяки Луції Банах, яка після війни вивезла її у Вроцлав. Збірку переписано і вже двічі видано, але й досі не всі задачі звідти вирішено. Періодично відбуваються наукові конференції, присвячені «Шкоцькій книзі», а кожен розв'язок стає великою подією у математичному світі.

Отже, шотландська або шкоцька книга (пол. *Księga Szkocka*) — грубий зошит, в якому львівські математики занотовували нерозв'язані математичні проблеми під час своїх зустрічей у Шотландській кав'ярні. Спочатку всі свої викладки математикам робили на паперових серветках, а коли не вистачало й тих — писали просто на мармурових столах. Так тривало, доки дружина професора Стефана Банаха, Люція не придбала цей зошит, що пережив другу світову війну і нині перебуває у приватній власності в Німеччині.

Записи велися переважно польською мовою. Записи в книзі велися протягом 1935—1941 років і припинилися лише з окупацією Львова німецькими військами. Загалом у книзі записано 193 математичні задачі, серед яких є як фундаментальні проблеми функціонального аналізу, так і просто цікаві головоломки.

Книгу зберігали в гардеробі кав'ярні, а за розв'язок однієї з задач було навіть встановлено приз — живого гусака. Цей приз уже в 1970-х роках дістався молодому шведському математику Перу Енфльо.

Улітку 1939 року професори Станіслав Мазур та Станіслав Улям вирішили, що у разі війни книгу необхідно закопати, сховавши в невеличкій скриньці. Зараз невідомо, чи сталося все саме так, але достеменно відомо, що Люція Банах після смерті чоловіка перевезла книгу зі Львова до Вроцлава. У Вроцлаві були створені машинописні копії книги, одна з яких у 1956 році була відправлена професору Станіславу Уляму. Коли математики усього світу дізналися про існування цієї книги, то почали просити Уляма про її публікацію.

Після консультації зі Штейнгаузом, вчений вирішив перекласти книгу англійською мовою, щоб якомога більше людей дізналися про її існування. Оскільки багатьох з її авторів вже не було в живих, він вирішив зберегти всі записи без будь-яких змін.

«Колекція цих записів допомагає створити уявлення про сферу інтересів невеликої математичної групи, ілюструє методи їх роботи і хід думок, а також відображає неформальний спосіб життя одного з найважливіших математичних центрів» — писав Улям у передмові до книги. У 1977 році машинописні копії були передруковані, а в 1981 році вийшла «Шотландська книга: математика в „Шотландському кафе“» за редакцією Р. Даніеля Молдіна — версія з коментарями та лекціями з математичною конференції.

У 1945 році у Вроцлаві професором Гуго Штейнгаузом було засновано Нову Шотландську книгу і записи у 1945-1958 роках робили до неї.

21 травня 2021 року з нагоди 85-ї річниці створення всесвітньовідомої «Шотландської книги» та відзначення внеску Львівської математичної школи у розвиток світової математики, Львівське математичне товариство відкрило інформаційну таблицю на фасаді будинку «Шотландської кав'ярні».

Література:

4. Kozielecki J. Banach — geniusz ze Lwowa. — Warszawa: Żak, 1999. — 112 s. — ISBN 83-88149-02-4. (пол.)
5. R. Daniel Mauldin The Scottish Book: Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book. — Cham: Birkhäuser, 2019. — 340 s. — ISBN 978-3-319-79432-7. (англ.)

Ю. М. Штихалюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *кандидат фізико математичних наук,*
доцент кафедри прикладної математики і механіки

АЛАН ТЬЮРІНГ

Алан Тьюрінг народився 23 червня 1912 року у Вілмслоу (Велика Британія). Він походить із сім'ї аристократів: батько Тьюрінга – Джуліус Метісон – завідував британським колоніальним відомством в Індії, а мати – Етель Сара Стоуні – була донькою головного інженера Мадраських залізниць. В дитинстві хлопець рідко бачив своїх батьків, адже ті працювали в Індії. У віці 6 років Алан пішов до школи святого Михайла у Гастінгсі. У 7 років, він розпочав навчання у Шернборнській публічній школі. Вже в школі хлопець проявляв видатні здібності з математики, при цьому був одним із найгірших учнів у класі з гуманітарних предметів.У 1929 Тьюрінг намагався вступити до Кембриджського університету разом зі своїм найкращим другом Крістофером Моркомом, але безуспішно. Через нелюбов до гуманітарних наук, Тюрінг не добрав балів на іспиті й тому після школи вступив до Королівського коледжу Кембриджа, хоча мав намір піти в Триніті-коледж. За частину своєї стипендії він купив три книжки, однією з яких була "Математичні основи квантової механіки" Джона фон Неймана.
У 1936 році вийшла робота Тьюрінга "Про обчислювані числа", в тексті якої Алан ввів поняття універсальної машини (пізніше названої "Машиною Тьюрінга").

"Машина Тьюрінга" обчислювала все, що тільки можливо. До слова, концепція сучасного персонального комп'ютера базується на проекті, розробленому Тьюрінгом.Потім Тьюрінг зосередився на вивченні математики та криптології на базі Інституту перспективних досліджень в місті Прінстоні, штат Нью-Джерсі. Після захисту докторської дисертації в Прінстонському університеті в 1938 році молодий вчений повернувся в Кембридж, де влаштувався на роботу на неповний робочий день в Центр урядового зв'язку – британську урядову організацію, яка працювала над зломом шифрів. Під час Другої світової війни Тьюрінг став провідним учасником розгадування шифрів німців. Він працював в Bletchley Park, на станції військового часу GCCS, де зробив п'ять великих відкриттів в сфері криптоаналізу, включаючи розробку електромеханічного пристрою, що використовується в цілях розшифровки сигналів шифрувальної машини. Внесок Тьюрінга в процес зламу кодів цим не обмежується: Алан також написав дві статті про математичні підходи до дешифрування коду, які вважаються стратегічно важливими активами Кодексу та школи Cypher (пізніше відомої як штаб-квартира уряду). Центр урядового зв'язку тільки в квітні 2012 року опублікував ці розробки в Національному архіві Сполученого Королівства Великобританії. До кінця війни Тьюрінг переїхав до Лондона, де працював у Національній фізичній лабораторії. Там Тьюринг керував проектуванням автоматичного обчислювального механізму і, в кінцевому підсумку, розробив новаторський план комп'ютера з відповідними програмними продуктами.Тьюрінг певний час ще обіймав високі посади у відділі математики і в обчислювальній лабораторії університету в Манчестері. Вперше він зайнявся вивченням проблеми штучного інтелекту в статті 1950 року "Обчислювальна техніка та розвідка" і запропонував експеримент, відомий під назвою "Тест Тьюрінга" – спробу створити стандарт розробки розвідувальної інформації для технічної галузі. За останні десятиліття тест вплинув на дискусії з приводу штучного інтелекту.

В результаті розголосу сексуальної орієнтації вченого йому заборонили продовжувати роботу з криптографією в GCCS. Втративши можливість працювати в науці, Тьюрінг впав в депресію. Крім того, на тлі прийому гормональних препаратів у чоловіка почало випадати волосся, пропав апетит. Тьюрінг помер 7 червня 1954 року. Місіс Крісті (хатня робітниця Алана) приготувала господареві сніданок і піднялася в спальню, щоб покликати Тьюрінга до столу, але виявила в ліжку бездиханне тіло вченого, а на столику біля ліжка лежало надкушене яблуко. Після посмертної експертизи з'ясувалося, що причиною смерті було отруєння ціанідом. Офіційною версією оголошено самогубство. Однак відома й інша версія. Коли Друга світова війна закінчилася, Тьюрінг працював над дешифруванням радянських шифрів. Дослідники припускають, що агенти КГБ інсценували пограбування в квартирі вченого і привели його в пастку, в результаті чого роботи над розшифровками радянських кодів зупинилися. А інших вчених такого рівня, щоб продовжити роботу Тьюрінга, у Великобританії тоді не було.

В.С. Мазурик
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК АКАДЕМІК НАН УКРАЇНИ ЮРІЙ ЛЬВОВИЧ ДАЛЕЦЬКИЙ

Юрій Львович Далецький – всесвітньо відомий математик, гордість вітчизняної науки. Основні праці вченого присвячені дослідженню сучасних проблем математичного аналізу, теорії ймовірностей, теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики. Ним написано біля 200 наукових праць, серед них значну частину складають ґрунтовні статті та монографії, які перекладено англійською мовою. До скарбниці світової літератури з математики і теоретичної фізики увійшла важлива формула Далецького-Троттера про мультиплікативне представлення еволюційного інтеграла. За вагомий внесок у розвиток національної освіти академіку НАН України Ю.Л. Далецькому присвоєно почесне звання - Заслужений діяч науки і техніки України.

Народився Юрій Львович 16 грудня 1926 р. в м. Чернігові. Він захопився математикою ще у дитинстві, але звичайну течію життя було перервано війною. У 1943-1946 рр. Юрій Львович був солдатом Радянської" Армії", брав участь у бойових діях на 2-му Далекосхідному фронті. Після демобілізації з 1946 р. по 1951 р. Юрій Львович •—студент механіко-математичного факультету Київського державного університету. З 1951 р. працює в Київському політехнічному інституті (тепер — Національний технічний університет України). Науковою роботою почав займатися в студентські роки під керівництвом С. Г. Крейна — молодого талановитого математика, який працював у той час у Києві. Значну роль у формуванні наукових інтересів Юрія Львовича відіграло також співробітництво з одним з корифеїв сучасної математики М. Г. Крейном. Основний напрямок досліджень Юрія Львовича — еволюційні диференціальні рівняння в нескінчено вимірних просторах. У цих дослідженнях відбилася широта наукових інтересів та ерудиція Юрія Львовича, в них використовувалися методи теорії випадкових процесів, функціонального аналізу та диференціальної геометрії нескінченно вимірних многовидів. У 1950 р. Ю. Л. Далецький почав займатися асимптотичними методами для диференціальних рівнянь з малим параметром у нескінченно вимірних просторах. Виходячи зі спільних з С. Г. Крейном досліджень, Юрій Львович переніс на диференціальні рівняння в банаховому просторі деякі фундаментальні результати школи М. М. Крилова- М. М. Боголюбова з асимптотичної теорії диференціальних рівнянь: метод асимптотичного розщеплення еволюційних рівнянь з коефіцієнтами, що повільно змінюються, конструкцію М. М. Боголюбова-Ю. О. Митропольського стійких інтегральних многовидів. Спільно з М. Г. Крейном розробив нескінченно вимірне узагальнення теорії стійкості О.

М. Ляпунова та теорії експоненціальної дихотомії. У процесі цих досліджень Ю. Л. Далецький розвинув нові методи теорії операторів, а формули, що при цьому було отримано, часто виявлялися новими і для скінченно вимірного випадку. На базі цих ідей він отримав некомутативне узагальнення формул Ньютона та Тейлора на функціональне операторне числення. Зокрема, на цьому шляху одержано формули для функцій трикутних операторів, що виявилися новими навіть для скінченно вимірних матриць. Зв'язкам еволюційних операторних рівнянь та функціонального інтегрування присвячено дослідження, що розпочаті Ю. Л. Далецьким у 1957 р. Серед цих результатів — доведення аналогів формули Фейнмана-Каца для широкого класу рівнянь та систем параболічного та гіперболічного типу, а також рівняння Шредінгера; вперше було дано точне обгрунтування збіжності відповідних фейнманівських інтегралів. При отриманні цих результатів вперше було використано конструкцію, що базується на мультиплікативному представленні еволюційного оператора лінійного диференціального рівняння. Цей метод пізніше був перевідкритий Е. Нельсоном і широко використовується в сучасній літературі з математичної та теоретичної фізики. У подальшому такі мультиплікативні представлення були узагальнені Ю. Л. Далецьким та його учнями на нелінійні рівняння та застосовані до побудови континуальних інтегралів по простору гіллястих траєкторій. У галузі аналізу функцій та мір на нескінченновимірних просторах Ю. Л. Далецький ввів поняття квазіміри у нескінченно вимірному просторі, в тому числі абстрактної міри Фейнмана, визначив диференціальні оператори еліптичного типу другого порядку для функцій на гільбертовому просторі. Виходячи з результатів Іто-Гіхмана-Скорохода, побудував теорію стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі. Результати цієї теорії дозволили встановити умови коректності задачі Коші для параболічних рівнянь відносно функцій на гільбертовому просторі.

Широта математичних інтересів Ю. Л. Далецького знаходить своє підтвердження і в переліку його досліджень протягом останнього десятиріччя. З одного боку це дослідження в області нескінченновимірного аналізу: отримання зв'язку поняття логарифмічної похідної гладкої міри з поняттям розширеного інтеграла Хіцуди-Скорохода, побудова біортогонального негауссівського аналога поліномів Ерміта, перетворення Фур'є-Вінера та розкладу Вінера-Іто. З іншого боку — це дослідження в галузі супераналізу: ним побудовано суперваріант формального варіаційного числення Гельфанда-Дикого, а також теореми Дубровіна-Новікова про гідродинамічні гамільтоніани, спільно з Р. М. Кадоб'янським запропоновано гамільтонів формалізм рівняння Власова для суперчастинок. Спільно з І. М. Гельфандом та Б. Л. Циганом Ю. Л. Далецький розробив варіант теорії" не комутативної диференціальної геометрії. Ці дослідження продовжуються ним спільно з учнями. На протязі багатьох років значну роль в математичному житті Києва відіграють керовані ним наукові семінари „Випадкові процеси та розподіли в функціональних просторах" (спільно з академіком А. В. Скороходом) та „Алгебраїчні структури в математичній фізиці".

Людина глибокої різнобічної ерудиції та щирої душевної теплоти, Юрій Львович має надзвичайний педагогічний талант. Його лекції яскраво емоційні, глибокого змістовні й у значній мірі нетрадиційні. Вони демонструють труднощі, що виникають на шляху дослідника, методи їх подолання, виробляють у студентів добрий математичний смак та бажання до самостійної наукової творчості. Без сумніву можна сказати, що в досягненнях тисяч фахівців є й частинка його праці. Постановка нових математичних курсів, створення програм математичної освіти на низці нових факультетів інституту, виховання цілої плеяди гідних викладачів — це далеко не повний перелік різноманітної діяльності визнаного лідера математичного навчання в інституті. Не випадково його одним з перших було удостоєно почесного звання „Соросівський професор". Ім'я академіка Ю. Л. Далецького широко відоме в математичному світі. Він є автором близько 170 наукових робіт та трьох монографій. Головні його роботи перевидані англійською мовою, в останні роки він виступав з лекціями та доповідями в багатьох університетах США, Німеччини, Франції, Італії, Великобританії, Ізраїлю, Польщі, Японії.

Література

1. Березанский Ю. М. и др. Юрий Львович Далецкий // УМН. 1987. Т. 42, № 4; До 70-річчя з дня народження Ю. Л. Далецького // УМЖ. 1997. № 3.
2. Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут" [Електронний ресурс]. - Електрон. дані.
3. Львович Далецький: спогади колег, учнів, друзів та родичів”//ННК<ІПСА>, <Політехніка>, Київ,2008

В.Р Білецький
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ФРАНСУА ВІЄТ

Великих успіхів досяг учений у геометрії. У трактаті «Доповнення до геометрії» він намагався створити за античними прикладами якусь геометричну алгебру, використовуючи геометричні методи для розв'язання рівнянь третього й четвертого степеня. Будь-яке рівняння третього або четвертого степеня, стверджував Вієт, можна розв'язати геометричним методом трисекції кута або побудовою двох середніх пропорційних.

Математиків протягом століть цікавило питання розв'язання трикутників, оскільки воно диктувалося потребами астрономії, архітектури та геодезії. У Вієта методи, які застосовувалися раніше, набули завершеного вигляду. Він першим чітко сформулював теорему косинусів, хоча положення, еквівалентні їй, епізодично застосовувалися з першого століття нашої ери. Відомий раніше своєю складністю випадок побудови трикутника за двома сторонами й одним з протилежних їм кутів отримав у Вієта вичерпний розгляд. Було чітко доведено, що розв'язок не завжди можливий. Якщо ж він існує, то може бути один або два. Глибоке знання алгебри давало Вієту великі переваги. Інтерес до алгебри спочатку було викликано застосуванням у тригонометрії та астрономії. Не лише кожне нове використання алгебри давало імпульс новим дослідженням з тригонометрії, але й отримані тригонометричні результати стали джерелом важливих успіхів алгебри. Вієту належить виведення формули для синусів (або хорд) і косинусів кратних дуг.

Особливо пишався Вієт відомою теоремою про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами, яку він отримав самостійно, хоча, як нині відомо, залежність між коефіцієнтами й коренями рівняння (навіть загальнішого вигляду, ніж квадратне) була відома ще Кардано, а в такому вигляді, як ми застосовуємо її для квадратного рівняння, — давнім вавилонянинам. Теорему було оприлюднено 1591 року. Її названо ім'ям Вієта, а сам автор формулював її так: «Якщо B+D, помножене на A, мінус A в квадраті дорівнює BD, то A дорівнює B і дорівнює D». Теорема Вієта стала зараз одним з найвідоміших тверджень шкільної алгебри. Теорема Вієта варта уваги тим, що її можна узагальнити для многочленів будь-якого степеня.

У 1593 голландський математик Андріан ван Ромен запропонував відомим математикам того часу позмагатись, розв'язавши рівняння 45-го степеня. Однак серед тих, кому він надіслав задачу, не було жодного француза. Посол Нідерландів у Парижі звернув на це увагу короля Генріха IV, відзначивши, що, мабуть, у Франції просто немає математиків. Щоб довести протилежне, король викликав Вієта і той прямо в приймальні, у присутності короля, міністрів та гостей, знайшов один корінь запропонованого рівняння. Пізніше Вієт знайшов ще 22 корені рівняння і описав весь процес розв'язку задачі у статті «Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis. Великих успіхів досяг учений у геометрії. У трактаті «Доповнення до геометрії» він намагався створити за античними прикладами якусь геометричну алгебру, використовуючи геометричні методи для розв'язання рівнянь третього й четвертого степеня. Будь-яке рівняння третього або четвертого степеня, стверджував Вієт, можна розв'язати геометричним методом трисекцією кута або побудовою двох середніх пропорційних. Математиків протягом століть цікавило питання розв'язання трикутників, оскільки воно диктувалося потребами астрономії, архітектури та геодезії.

У Вієта методи, які застосовувалися раніше, набули завершеного вигляду. Він першим чітко сформулював теорему косинусів, хоча положення, еквівалентні їй, епізодично застосовувалися з першого століття нашої ери. Відомий раніше своєю складністю випадок побудови трикутника за двома сторонами й одним з протилежних їм кутів отримав у Вієта вичерпний розгляд. Було чітко доведено, що розв'язок не завжди можливий. Якщо ж він існує, то може бути один або два. Глибоке знання алгебри давало Вієту великі переваги. Інтерес до алгебри спочатку було викликано застосуванням у тригонометрії та астрономї. Не лише кожне нове використання алгебри давало імпульс новим дослідженням з тригонометрії, але й отримані тригонометричні результати стали джерелом важливих успіхів алгебри. Вієту належить виведення формули для синусів (або хорд) і косинусів кратних дуг.

Література:

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: АСК., 2001. – 648с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Збірник задач. – К.: АСК., 2001. – 479с.
3. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
4. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Збірник задач. – Ч. 1, 2. – К.: Техніка. – 2000.
5. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
6. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

О.С. Білецька
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МИХАЙЛО КРАВЧУК –ВЕЛЕТ УКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИКИ

Михайло Пилипович Кравчук народився 27 вересня 1892 р. в сім’ї землеміра у селі Човниці на Волині. Завдяки переїздові родини до Луцька, Михайло мав можливість навчатись у гімназії. За участь у підпільному гуртку, у бунті гімназистів та інших подіях 1906 р. він перебував під негласним наглядом поліції як неблагонадійний. Обрання до Академії вчений сприйняв як важливий стимул для активної наукової праці. Свої наукові праці, загальним числом понад 180, він друкує як в Україні, так і за кордоном, видає окремими книжками. Значне місце в його творчому доробку мали праці з теорії аналітичних функцій та теорії рівнянь. Виходячи з досліджень А.А.Маркова та Т.Стільтьєса, з теорії алгебричних ланцюгових дробів та із класичних результатів Ж.Адамара про полюси мероморфних функцій, М.П.Кравчук знайшов необхідні та достатні умови того, щоб m найменших за модулем полюсів мероморфної функції були дійсні (або додатні) та мали додатні лишки. Узагальнюючи результати Ш.Ерміта, що стосувалися теореми Штурма, і спираючись на деякі квадратичні форми, Кравчук встановив критерій того, аби серед m найменших за модулем полюсів мероморфної функції було m-2 дійсних із додатними лишками. Він також істотно узагальнив теорему Штурма про число дійсних коренів алгебричного рівняння на даному інтервалі, теорему Лагерра про нулі похідних від цілих функцій та інші. Кравчук запропонував також нове доведення основної теореми алгебри, вивчив кілька збіжних процесів для обчислення кореня алгебраїчного рівняння, дав нове доведення неперервності коренів цілих алгебричних та трансцендентних функцій. Були також знайдені покращення деяких наближених методів розв'язку рівнянь. Ряд нових важливих результатів отримав М.П.Кравчук у галузі математичної статистики та теорії ймовірностей. Так, йому пощастило узагальнити на випадок скінчених різниць ермітові многочлени (поліном Кравчука), подібно до того, як П.Л.Чебишов узагальнив лежандрові поліноми. Це дало можливість знайти нову інтерполяційну формулу і зручні скінченні розклади для різних функцій, у тому числі ряд нових законів розподілу ймовірностей у схемі неповернених куль. Розглядав він також застосування моментів у математичній статистиці.

Значну частину публікацій М.П.Кравчука складають праці, присвячені розвитку математики в Україні, огляду творчості в галузі математики в окремих навчальних та наукових закладах, аналізу роботи математичних конгресів та з'їздів, нарисам життя та діяльності відомих колег-математиків Букрєєва, Пфейфера, Граве. Значну увагу приділяв М.П.Кравчук методичним питанням викладу елементарної та вищої математики, удосконаленню математичної термінології, складанню підручників із вищої та елементарної математики, публікації дуже цікавих науково-популярних нарисів. Надаючи великого значення математичній підготовці підростаючого покоління, він розглянув у своїх статтях ряд конкретних питань шкільної математики. Зокрема, в журналі "Комуністична освіта" публікувались його роздуми про викладання наближених обчислень, теорії ірраціональних чисел, теорії логарифмів, теорії подібності. У світі подальших досліджень останніх десятиріч ще більше висвітлюється та підвищується роль М.П.Кравчука, неоціненне значення його діяльності як славетного українського математика, громадського діяча, що стверджував та підносив Україну. Він був обраний членом Наукового товариства ім. Шевченка у Львові, членом математичних товариств Франції, Німеччини, Італії та засновником Київського математичного товариства. У 50-ті роки ім'я його уже згадувалось у ряді енциклопедичних та довідкових видань, але досить обмежено, і як правило, у зв'язку з оглядом його визначних наукових досліджень. М.Кравчука з'явилась на відзначення сторіччя з дня його народження. Ім'я його було занесено по лінії ЮНЕСКО в Міжнародний календар визначних наукових діячів. Особливо треба відзначити проведення в 1991 р. Міжнародних наукових конференцій, присвячених пам'яті М.П.Кравчука в Інституті математики АН України та в Національному технічному університеті України (КПІ). Остання стала традиційною. 2002 р. відбудеться дев'ята така конференція. Ці конференції, для організації яких багато робить проф. Н.О.Вірченко, користуються високим науковим авторитетом та викликають великий інтерес у наукової громадськості України та за кордоном. Тут брали участь багато вчених та молоді з багатьох міст, родичі та учні М.Кравчука. Отже, ім'я та справи видатного українського математика М.П.Кравчука, його здобутки та ідеї привертають все більше увагу та стають здобутком усе нових поколінь наукової громади України.

Література:

1. Вірченко Н.О. Академік Михайло Кравчук: життя і дорога в безсмертя (див. кн. 22,с.4-3 1).

2. Добровольский В.А. Выдающийся украинский математик Михаил Филиппович Кравчук (к 75-летию со дня рождения) – Успехи матем.наук. – М., 1968, – Т.23. – В.4. – С.236-239.

3. Кравчук М.П. Проект алгебраїчної термінології. – Т-во шк. освіти. К., 1917, –8 с.

М. А. Качмар
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *кандидат фізико математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИК - РЕФОРМАТОР

Зі всіх мов світу найкращою є мова математики (*М.І. Лобачевський*)

“Ти, Лобачевський, будеш розбійником!” - вигукував розгніваний учитель латинської мови. Майбутній учений, винахідливість якого на різноманітні витівки була невгамовною, прибив цвяхом до столу класний журнал перед самим носом викладача, який трохи задрімав на уроці. І ніхто тоді не здогадувався, що поряд з ними живе геній, якому доведеться зробити революцію в науці, злетіти над своїм часом, увійти в безсмертя.

Світову славу вченого йому принесли геніальні дослідження в галузі геометрії. Він упевнено і наполегливо шукав розв’язання проблеми, яка протягом більш як дві тисячі років вважалася недоступною. Наслідком цих досліджень була праця, яку він 23 лютого 1826 р. подав на засідання фізико-математичного відділу університету. Це була написана французькою мовою доповідь на тему: “Стислий виклад принципів геометрії з точним доведенням теореми про паралельні лінії”. У листі до фізико-математичного відділу Лобачевський просив розглянути його працю і, якщо її буде схвалено, надрукувати в “Учених записках університету”. Але жодної рецензії не було подано на цю працю Лобачевського, та й сама доповідь зникла. За неї забули, тільки через 8 років у протоколах засідань факультету з’явився запис про передачу доповіді в архів. Тоді ніхто не знав, що саме в цій доповіді Лобачевський виклав своє велике відкриття. Через 3 роки, тобто у 1829 р., Лобачевський опублікував у журналі “Казанский вестник”, що видавався співробітниками університету, статтю “Про начала геометрії”. У цій статті основні поняття геометрії — точки, прямі, геометричні побудови тощо — Лобачевський пояснював за Евклідом, бо перші 10 аксіом Евкліда він прийняв без змін. Від V постулату Евкліда Лобачевський відходить і будує нову, як він називає, “уявну геометрію”. З цих міркувань випливає низка теорем і наслідків, які різко відмежовують нову геометрію від геометрії Евкліда. Так, кут паралельності в Евкліда завжди прямий, отже, є величиною сталою, а в Лобачевського він завжди гострий і величина його змінюється залежно від довжини перпендикуляра CD. Якщо перпендикуляр збільшується, то кут паралельності зменшується; якщо ж перпендикуляр зменшується до нуля, то кут збільшується, наближаючись до прямого кута. За Евклідом сума внутрішніх кутів трикутника стала і дорівнює 2d, у Лобачевського ця сума змінна і завжди менша за 2d. Із зменшенням трикутника ця сума наближається до 2d. Прямокутника в геометрії Лобачевського не існує. Отже, не існує і квадрата. У геометрії Лобачевського не існує подібних фігур. Хоч ряд визначних учених тодішньої росії і не визнавали геометрії Лобачевського, не розуміли її, сам він був твердо переконаний, що така геометрія об’єктивно існує в природі.

Лобачевський розв’язав задачу, яку протягом більш як двох тисяч років марно намагалися розв’язати багато видатних учених-математиків: він довів, що V постулат Евкліда не можна дістати як теорему з інших постулатів і аксіом, які містяться в “Началах” Евкліда. Він довів також, що Евклідова геометрія не є єдино можливою геометрією. Це спростовувало ідею німецького професора Канта про те, що людина народжується з уявленням про зовнішній світ, де діє лише Евклідова геометрія.

Відкриття Лобачевського поставило перед математикою багато нових проблем, зокрема про властивості образів у новій геометрії, про її взаємозв’язок з геометрією Евкліда. Це була справжня революція в науці.

У тодішній росії найвидатніші математики, такі, як академіки М. В. Остроградський, В. Я. Буняковський, не зрозуміли глибоких ідей нової геометрії. М. І. Лобачевський двічі надсилав свої праці до Петербурзької Академії наук, але, на підставі негативних рецензій М. В. Остроградського, їх не публікували. Проте серед російських учених були й такі, які розуміли суть нових ідей. Так професор Казанського університету П. І. Котельников у 1842 р. виступив на захист геометрії М. І. Лобачевського. Вже сліпим Лобачевський продовжує працювати над останньою своєю працею з геометрії, яку він назвав “Пангеометрія”. У цій праці він підбиває підсумки своєї багаторічної дослідницької роботи, доводить свої міркування до логічної завершеності. Точним тематичним послідовним викладом він показує, що нова геометрія у своїй внутрішній структурі ніде не має суперечностей. Цю останню працю Лобачевський диктував.

П.Ю. Малюс
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ТЕРНИСТА ДОЛЯ ВИДАТНОГО УКРАЇНСЬКОГО МАТЕМАТИКА МИКОЛИ ЧАЙКОВСЬКОГО

Майбутній видатний український математик народився 2 січня 1887 р. в місті Бережани. Тут пройшли його дитячі роки, потім було навчання у Бережанській гімназії, яку він закінчив у 1905 р. Микола Чайковський був талановитою людиною в багатьох галузях науки і культури. Закінчуючи гімназію, він оволодів кількома іноземними мовами, зокрема німецькою, французькою, латинською, грецькою, польською та іншими, що згодом дозволило вміло цим скористатися. У будинку свого батька він мав змогу зустрічатися з багатьма видатними людьми того часу, що гостювали у відомого тоді письменника. Серед них неодноразово були Іван Франко, композитор Денис Сочинський, Огоновський (видатний діяч «Просвіти») та інші відомі галичани.

У жовтні 1905 р. Микола Чайковський вступає до Празького університету, згодом він три роки студіює математику у Віденському університеті й закінчує студії у Львівському університеті. У 1911 р. у Віденському університеті М. Чайковський здобув ступінь доктора філософії, а через рік склав іспит на звання вчителя школи. Викладав у гімназіях Тернополя, Рави-Руської, Яворова, Рогатина, Львова. Готуючи до захисту докторську дисертацію, він друкує кілька брошур і статей з математики. Серед них «Розвиток числових систем в історії людської культури» (1908 р.). Ми не будемо аналізувати ці праці, бо більшість з них публікувалась німецькою мовою.

Як викладач Тернопільської української та інших гімназій, Микола Чайковський друкує ряд фундаментальних статей у збірнику математично-природничо-лікарської секції НТШ, готує до друку тексти кількох підручників з математики (для самоосвіти). Серед них «Начерк вищих рахунків для ужитку учеників середніх шкіл». Він глибоко усвідомлює, що для того щоб випускати літературу з матаматики українською мовою, необхідно упорядкувати термінологію цієї науки. Він розпочинає фундаментальну працю над створенням «Систематичного словника української матаматичної термінології з поазбучним українсько-російсько-німецьким показником», одне з видань якого було опубліковане в 1924 р. в Берліні. У співавторстві з Володимиром Кучером М. Чайковський видає чотирицифрові таблиці логарифмів і тригонометричних функцій, які витримали чотири видання.

Крім цього, він видає: «Тригонометрія. Підручник для середньої школи та самоосвіти», «Алгебра. Підручник для середньої школи та для самоосвіти», «Підручник інтегрального числення»; матеріали деяких доповідей та ряд методичних і наукових статей з математики. У 1922--24рр. викладає математику в Львівському таємному університеті. У 1929 р. на запрошення академіка М.

Кравчука він із сім'єю знову виїжджає в Східну Україну на посаду професора математики Одеського інституту народної освіти, де веде бурхливу наукову, педагогічну, організаційну роботу, видає кілька підручників, наукових статей, методичних розробок. В уральському пединституті йому підтверджують звання доцента. Наукові дослідження того часу стосувались головним чином алгебри і теорії чисел. Він дослідив розв'язуваність рівнянь степеня P2, де p - ціле просте число, і зв'язані з ним метациклічні групи, а також порівняння третього і четвертого степенів за простими модулями. Він уперше в слов'янських країнах дає виклад теорії Галуа.

Микола Андрійович написав чимало статей у методичних збірниках з математики та в інших виданнях. Його перу належало також понад 50 статей в Українській Радянській Енциклопедії. У 1959 р. він опублікував прекрасний методичний посібник для вчителів математики «Квадратні рівняння», який у 1970 р. був виданий вдруге з деякими змінами. У цьому посібнику розглянуто такі питання:

- рівносильність рівнянь і систем рівнянь, формули коренів квадратного рівняння та висновки з них;
- розклад квадратного тричлена на лінійні множники; дробоволінійна функція й рівностороння гіпербола;
- парабола як графік квадратного тричлена;
- графічне розв'язування квадратних рівнянь, нерівності другого степеня, елементарні задачі на максимум і мінімум, дослідження коренів залежно від значень коефіцієнтів рівняння;
- розміщення коренів рівняння на числовій осі; деякі двочленні рівняння; тричленні рівняння й нерівності;
- симетричні рівняння, зворотні рівняння, ірраціональні рівняння й нерівності, деякі системи рівнянь тощо.

Важливою проблемою, над якою тривалий час працював М. Чайковський, була українська наукова термінологія з математики.

М. Чайковський став відомим математиком світового рівня. Відійшов із життя Микола Чайковський 7жовтня 1970р. Поховано його на Личаківському цвинтарі у Львові.

Література:

1. Аксіоми для нащадків. - Львів: Меморіал, 1992.
2. Маланюк М. П., Возняк Г. М. Стежинки до коренів істини. - Тернопіль, 1995.
3. Регіональний річник. Тернопілля 95. - Тернопіль: Збруч, 1995.
4. Ювілейна книга Української гімназії у Тернополі. 1818 - 1998. - Тернопіль - Львів, 1998.
5. Маланюк М., Маланюк П. Сторінки боротьби за українську гімназію в Тернополі. - Тернопіль, 1998.

М.А. Мусянович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин,*** *кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

СОФІЯ КОВАЛЕВСЬКА

Софія Василівна Ковалевська народилась 15 січня 1850 р. в Москві. Батько її — Василь Васильович Крюковський був військовий. Він брав участь у трьох військових походах, був нагороджений найвищими військовими орденами і медалями. У 1858 р. в чині генерала артилерії батько вийшов у відставку і переїхав з родиною до свого маєтку в с. Палібіно Вітебської губернії. Тут і пройшли дитячі роки Соні. Змалку в дівчини проявилися такі риси характеру, як зосередженість, наполегливість у досягненні мети і цілковита самостійність. Читати Соня навчилася сама. Пізніше до дітей взяли вчителів. Гувернантка-англійка вчила Соню хороших манер і англійської мови. Учитель Малевич викладав російську граматику, літературу, математику та інші предмети. Він був широко освіченою людиною, передовим педагогом. Коли Соні сповнилось 14 років, під час зимового перебування родини Кркжовських у Петербурзі викладачем математики до неї запросили лейтенанта флоту О. М. Страннолюбського. Вже на перших заняттях викладача здивувало те, що дівчина так швидко засвоювала перші поняття з вищої математики — поняття границі, похідної тощо, "начебто вона їх раніше знала". У 1863 році при Маріїнської гімназії відкрилися педагогічні курси, що включали в себе словесне і природно-математичне відділення. Сестри Анна і Софія мріяли потрапити туди. Але проблема полягала в тому, що незаміжніх дівчат в гімназію НЕ зараховували. Тому вони були змушені укласти фіктивний шлюб. Нареченим Анни був обраний Володимир Ковалевський. Однак весілля між ними так і не відбулася. На одному з побачень він сказав Ганні, що готовий вступити в шлюб, але з її сестрою, Сонею. Через деякий час він був введений в будинок і став, за згодою батька, нареченим другий сестри. На той момент йому було 26, а Софії - 18 років. У Ковалевської був чоловік, дитина, улюблене заняття. Здавалося б, цього повинно було вистачати для повного щастя. Але Ковалевської був властивий максималізм у всьому. Вона постійно висувала високі вимоги до життя і до всіх, хто її оточував. Вона хотіла постійно чути від чоловіка клятви в любові, бажала, щоб він весь час надавав їй знаки уваги. Але Ковалевський цього не робив. Він був іншою людиною, так само сильно захопленим наукою, як і його дружина. Повний крах у відносинах наступив тоді, коли вони вирішили зайнятися підприємництвом. Однак, незважаючи на це, Ковалевська залишилася вірна науці. Але в Росії вона не могла продовжувати роботу. Після вбивства царя ситуація в країні різко погіршилася. Софія з дочкою поїхала до Берліна, а чоловік - в Одесу, до свого брата. Однак Володимир Онуфрійович сильно заплутався в своїх комерційних справах і в ніч з 15 на 16 квітня 1883 року застрелився.

Ковалевська перебувала в Парижі, коли отримала цю звістку. Після похорону, повернувшись до Берліна, вона попрямувала до Вейерштрасу.

Робота з Вейерштрассом. Софія Ковалевська в ім'я обраного собою вищого призначення подолала страх і сором'язливість і на початку жовтня 1870 року попрямувала до Берліна. Професор Вейерштрасс не мав охоти до бесіди і, щоб позбутися від відвідувачки, дав їй кілька завдань з області гіперболічних функцій, запросивши її через тиждень. Встигнувши забути про візит, вчений не очікував побачити Ковалевську в призначений термін. Вона з'явилася на порозі і оголосила про те, що всі завдання були вирішені. Через деякий час Вейерштрасс клопотав про те, щоб Ковалевська була допущена до слухання математичних лекцій. Однак згоди високого ради домогтися не вдалося. В університеті Берліна не тільки не зараховували жінок в студенти. Їм навіть не дозволялося бути присутніми на лекціях в якості вільних слухачок. Тому Ковалевської довелося обмежитися тільки приватними заняттями з Вейерштрассом.

Перша самостійна робота. У ній досліджувалося питання, що стосується рівноваги кільця Сатурна. До Ковалевської цим завданням займався Лаплас (французький астроном, фізик і математик). У своїй роботі він розглядав кільце Сатурна в вигляді комплексу декількох тонких, що не роблять впливу один на одного, елементів. В ході досліджень він встановив, що в поперечному перерізі воно представлено у формі еліпса. Однак це рішення було тільки першим і дуже спрощеним. Ковалевська взялася за дослідження для більш точного встановлення рівноваги кільця. Вона визначила, що в поперечному перерізі одне повинно бути представлено у формі овалу.

Все більше жінка-професор поглиблювалася в дослідну роботу. Тепер вона займалася вивченням одним із найскладніших завдань, що стосується обертання твердого тіла. Вона вважала, що якщо зможе її вирішити, то її ім'я буде внесено в число найвидатніших учених світу. За її розрахунками, для виконання завдання потрібно ще 5 років. Зводиться проблема до інтегрування системи рівнянь, що має завжди три певних інтеграла. Завдання повністю вирішується, коли вдається знайти четвертий. До відкриття Ковалевської він двічі був знайдений. Вченими, що досліджували проблему, були Лагранж і Ейлер. Ковалевська виявила третій випадок і четвертий інтеграл до нього. Рішення в повному вигляді мало досить складний вид. Успішно впоратися з поставленим завданням допомогли досконалі знання гіпереліптичних функцій. І в даний час 4 алгебраїчних інтеграла існують лише в трьох випадках: Лагранжа, Ейлера і Ковалевської.

У 1888 році, 6 грудня, Паризька академія направила Ковалевської лист. У ньому було сказано, що їй присуджена премія Бордена. Слід сказати, що за півстоліття з моменту її заснування її володарями стали всього 10 чоловік. При цьому всі ці десть разів вона була присуджена в повному обсязі, а за окремі, приватні рішення. До відкриття Ковалевської цією премією ніхто не нагороджувався протягом трьох років поспіль. Через тиждень після отримання звістки вона приїхала в Париж. Президент академії Жансен, астроном і фізик,

гаряче вітав Софію Василівну. Він сказав, що зважаючи на серйозність проведеного нею дослідження, премія збільшена з 3-х до 5-ти тисяч франків.
Після отримання премії Бордена Ковалевська оселилася недалеко від Парижа. Тут вона продовжила дослідження про обертання тел для конкурсу на нагороду короля Оскара Другого від Шведської академії. Восени, до початку семестру в університеті, вона повернулася в Стокгольм. Робота йшла дуже швидко. Ковалевська хотіла встигнути завершити дослідження, щоб представити працю на конкурсі. За свою роботу вона отримала премію в півтори тисячі крон.

М. Мусянович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Чмир О.Ю.,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

НАУКОВІ ВИНАХОДИ ВИДАТНОГО МАТЕМАТИКА БЛЕЗ ПАСКАЛЯ

Блез Паскаль народився 19 червня 1623 року в регіоні Овернь у Клермонті. Цей регіон розташований у південно-центральній частині Франції. Його сім’я була шляхетного походження. У 1631 році, коли Блезу було 8 років, сім’я переїхала до Парижа. Намір Етьєна Паскаля полягав у тому, щоб його діти мали більше можливостей отримати доступ до якісної освіти та інших переваг, яких вони могли досягти лише перебуваючи у столиці Франції. Це прагнення Етьєна включало всіх його дітей, але особливо Блеза, який з юних років уже показав себе людиною, яка має надмірні інтелектуальні здібності. Батько прищепив йому любов до математики і вже з раннього віку хлопчик міг здійснювати складні обчислення. У віці 15 років Паскаль спілкувався з паризькими вченими на рівних, обговорюючи складні завдання з математики. А через рік юнак провів своє перше дослідження, і стало ясно – його чекає блискуче майбутнє, а світ побачить нового математичного генія.

В 1641 році Блез Паскаль винайшов для свого батька колесо Паскаля або паскалін, який вважається найстарішим калькулятором на сьогодні. Паскаль запатентував цей артефакт. Паскаль виготовив лише 50 машин, і з цих дев’яти одиниць все ще зберігаються. Даний винахід став таким собі фундаментом для створення інформатики, адже його машина здійснювала автоматичні обчислення, які здійснює сьогодні сучасний комп’ютер.

Паскаліна, яка спочатку отримала назву механічного числового калькулятора, була одним із його великих винаходів, і він зробив це, коли йому було лише 17 років. Мотивація, з якою він побудував його, полягала в тому, щоб допомогти батькові в його щоденній роботі в Руані, коли він був призначений комісаром витрат, який обмежувався лише управлінням фінансами. У оригінальному дизайні винахід Блеза Паскаля мав довжину 36 сантиметрів, ширину 13 сантиметрів і висоту 9 сантиметрів. Звичайно, в той час це вважалося дуже корисним і універсальним пристроєм, хоча це був не такий маленький пристрій, яким можуть здатися сучасні міні-комп’ютери. Паскалін був приблизно еквівалентним формою коробки від взуття і був довгим і низьким. Всередині Pascalina можна знайти механізм коліс зі зчепленими між собою зубцями, які утворюють своєрідний ланцюг передачі, завдяки якому, колесо встигало зробити повний оберт на маточинні, воно передавало імпульс від одного ступеня до іншого.

Хоча точна дата невідома, Паскаль також був винахідником об’єкта примітивної форми, який можна класифікувати як наручний годинник.

Зазначимо, що він винайшов це для зручності, коли він експериментував з іншими винаходами.

Перший значний успіх викликає у Паскаля додатковий інтерес до науки, а також слави і світського життя. За грою в кості Паскаль формулює основи теорії ймовірності. Складені ним розрахунки через кілька років зацікавили Гюйгенса, який у 1657 році пише трактат "Про розрахунки в азартних іграх".

Рулетка – це ще один пристрій, винайдений Блезом Паскалем. Це пристрій круглої форми, видовбаний усередині, з кількома числами, розташованими в послідовності, яка стала азартною грою, яка присутня у всіх ігрових клубах та казино. Його використання, включаючи різні моделі від сучасної, не було зафіксовано до раннього середньовіччя.

Розглянемо гіпотезу трикутника Паскаля. Якщо розгорнути лінії шестикутника, розташованого в конічній зоні, множини сторін при їх збіжності утворять пряму лінію. Ця гіпотеза стисла властивості конічних відрізків, і була прогресом у використанні проекцій і проективної геометрії, принципи яких досі використовуються в різних областях і в дизайні. Отже, гіпотеза цих експериментів, проведені Блезом Паскалем, вирішується додатково, незалежно від вимоги, до якої пов'язані шість фокусів, відповідно до вибраного шістнадцяткового макета. Це ж твердження правильне для будь-якого іншого конічного перерізу, в тому числі параболи, еліпси, гіперболи і навіть пари прямих.

Найбільших успіхів добився у фізиці Блез Паскаль. Більшість сучасних гідравлічних пристроїв розроблені завдяки цьому французькому вченому. На визначення закону Паскаля фізики заснована робота гідравлічних пресів, гальмівних систем, інших подібних пристроїв. На ньому базується основний закон гідростатики. Це відкриття Блеза Паскаля у фізиці формулюється наступним чином: "тиск, вироблений на рідину або газ, передається в будь-яку точку без змін у всіх напрямках". Слід звернути увагу, що вчений-фізик Паскаль зазначав, що мова в даному випадку йде не про тиск, який вироблявся в різних точках. Цей закон справедливий і для рідини, яка виявляється в полі тяжіння. Ось що відкрив Паскаль у фізиці. Даний закон є логічним наслідком закону збереження енергії, залишаючись справедливим навіть для стисливих рідин і газів.

Його здоров'я, слабке з самого дитинства, різко погіршується до 1662 року. Блез Паскаль помер 19 серпня 1662 в хворобливих муках. Після смерті Блеза друзі знайшли цілі пачки записок, перев'язаних мотузкою, які були ними розшифровані і видані книгою під назвою «Думки». В основному вони присвячені взаєминам Бога і людини, а також апологетиці християнства. «Думки» увійшли в класику французької літератури, а Паскаль став єдиним у новій історії великим літератором і великим математиком одночасно.

На честь видатного вченого були названі одиниця вимірювання тиску, мова програмування і кратер на Місяці.

Література:

1. Дональд Адамсон. Blaise Pascal: Mathematician, Physicist and Thinker about God. – London, Macmillan, St. Martin, 1995.

В.В. Митров
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***М.І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МОЛОДИЙ ГЕНІЙ - ЕВАРИСТ ГАЛУА ТА ЙОГО НАУКОВІ ДОСЯГНЕННЯ

У дев'ятнадцятому столітті в Франції з'явилася нова, надзвичайно яскрава зірка на горизонті чистої математики – Еварист Галуа. Прожив він лише 20 років і лише п'ять з них, займався математикою. Математичні роботи, що зробили його ім'я безсмертним, займають трохи більше 60 сторінок. В 15 років Галуа відкрив для себе математику й відтоді, за словами одного з викладачів, «був одержимий демоном математики».

Його мало хто знав. Він встиг лише вступити до Вищої Нормальної школи (це педагогічний університет у Парижі), але був виключений звідти серед інших "бунтарів" у революційному 1830 році. Здавалося, що незабаром про Галуа забудуть, як про багатьох інших революціонерів, що не відбулися. Але пізніше з'ясувалося, що Галуа встиг відбутися як математик — та такий, яких Франція не народжувала з часів Декарта. Галуа не затримався на елементарній математиці й миттєво опинився на рівні сучасної науки. Йому було 17 років, коли його учитель Рішар констатував: «Галуа працює лише у вищих областях математики». У неповних 18 років, була опублікована його перша робота. Праці Галуа містили остаточний розв'язок проблеми про можливості розв'язання алгебраїчних рівнянь в радикалах, те, що сьогодні називається теорією Галуа і становить один з найбільш глибоких розділів алгебри. Інший напрямок його досліджень був пов'язаний з так званими абелевими інтегралами і відіграв важливу роль в математичному аналізі XIX ст.

Саме Галуа ввів у науку такі поняття, як група та підгрупа, ізоморфізм та гомоморфізм груп. Він зауважив, що ядро гомомоморфізму (тобто прообраз одиниці у групі) не може бути будь-якою підгрупою. Це має бути нормальна підгрупа, яка переходить сама в себе при внутрішніх ізоморфізмах групи. Тільки за цієї умови факторизація групи за її підгрупою породжує нову групу, інакше виходить звичайна множина, без алгебраїчних операцій серед її елементів.

Якщо ми хочемо, щоб усі елементи великого поля F виходили з елементів меншого поля F1 за допомогою арифметичних дій та вилучення коренів, то фактор група симетрій поля F по симетріях поля F1 повинна не тільки існувати, але і бути циклічною. При цьому група всіх симетрій поля F розкладеться в кінцевий ланцюжок нормальних підгруп із циклічними фактор групами. Таку властивість мають групи перестановок 2, 3 або 4 символів. Тому всі корені многочленів цих ступенів виражаються через коефіцієнти многочленів за допомогою радикальних формул. Навпаки, групи перестановок 5 або більшої кількості символів не мають ланцюжка підгруп з циклічними факторами груп. Тому відповідні рівняння не можна розв'язати в радикалах. Такою є суть теорії Галуа, створеної ним у 19 років. Навіть у наші дні вона виглядає складно для непідготовленої людини.

При житті Галуа, ніхто гідно не оцінив його відкриття. Эварист наполегливо розсилав свої тексти різним паризьким математикам. На жаль, Лежандр був вже досить старим і не міг розуміти новинки навіть у рідний йому області алгебри. Найактивнішим математиком у Парижі був Огюстен Коші. Але він переймався реформою математичного аналізу, і не хотів відволікатися сторонніми проблемами. Рукопис Галуа зник в його кошику для сміття.

Помер Галуа після дуелі в 1832 році. Напередодні цієї дуелі він по-справжньому злякався: що, коли він загине і відкриття пропадуть. Галуа залишає заповіт своєму другу Шевалле з проханням: переслати копії його статей великому Гауссу. Він був впевнений,що той усе зрозуміє і оцінить. Але тексти Галуа не потрапили до Гаусса. Могло статися так, що велике відкриття піде в небуття услід за творцем. Та на щастя, цього не сталося. Шевалле був ледь причетний до математики, але зберігав рукописи Галуа протягом 15 років, та був показав їх редактору нового журналу «Чиста і прикладна математика» Жозефу Ліувіллю. Молодий академік народився два роки до Эвариста Галуа і також захоплювався теорією чисел; він побудував перші числа, які є коренями раціональних многочленів. Ліувілль був вражений: як могли ці чудові знахідки залишатися ніким не поміченими такий тривалий час.

На жаль, у науковій кар'єрі Галуа фатальну роль зіграла його самотність. У молоді роки він не зміг познайомитися з жодним з великих математиків Франції, а потім захопився політикою, та випадково загинув раніше, ніж встиг стати відомим математиком. Роботи Галуа були опубліковані лише в 1846 р. Жозефом Ліувілем, а визнання до них прийшло ще пізніше, коли у 1870-х роках поняття групи поступово стає одним з основних математичних об'єктів і почало входити в топологію і навіть у теорію ймовірностей. Нині поняття групи входить у перші десятки самих ходових математичних термінів.

Література:

1. Універсальний словник-енциклопедія. – 4-те вид. – К.:Тека, 2006
2. Галуа Еваріст [Електронний ресурс]. - Електрон. дані. - Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/

М.Р. Козак
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ВІДМІННІСТЬ МІЖ РИМСЬКИМИ ТА АРАБСЬКИМИ ЧИСЛАМИ

Римська система числення. Непозиційна система числення, що використовувалися стародавніми римлянами.

Ця система базується на використанні особливих знаків (літер латинської абетки) для десяткових розрядів **I = 1**, **X = 10**, **C = 100**, **M = 1000** та їх половин **V = 5**, **L = 50**, **D = 500**. Натуральні числа записуються за допомогою повторення цих цифр. При цьому, якщо більша цифра стоїть перед меншою, то вони додаються (принцип додавання), якщо ж менша перед більшою, то менша віднімається від більшої (принцип віднімання). Останнє правило застосовується тільки для уникнення чотириразового повторення однієї цифри. Наприклад, I, X, C ставляться відповідно перед X, C, M для позначення 9, 90, 900 або перед V, L, D для позначення 4, 40, 400. Наприклад, VI = 5+1 = 6, IV = 5 - 1 = 4 (замість IIII). XIX = 10 + 10 — 1 = 19 (замість XVIIII), XL = 50 — 10 =40 (замість XXXX), XXXIII = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 33 тощо. Ця система числення на сьогодні майже не застосовується, бо виконання арифметичних дій над багатозначними числами в цій системі дуже незручне. Тим не менш, її використовують для позначення розділів і частин законів, томів видань, століть, інколи років, днів тижня, місяців у датах (1.V.1975), на циферблатах деяких годинників, порядкових числівників, а також похідних, номер яких більший за три (yIV, yV), а також з естетичною метою.

Арабська система числення. Десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Термін також часто застосовують до десяткового числа що записується із використанням цих цифр, що на сьогодні є найбільш загальною системою для символічного представлення чисел в світі. Причиною того, що в Європі і на Американських континентах ці цифри загально відомі як "Арабські числа" є те, що вони були представлені Європі в 10-му столітті носіями арабської мови з Північної Африки, які тоді використовувавували ці числа в Лівії і Марокоо.

Операції додавання й віднімання ми знаємо ще з молодших класів математики. Тому вони застосовуються в важких рівняннях й там де потрібна висока точність, яка доходить до 0,0001 й вище. Також на арабських числа побудована логіка процесорів й написання коду операційних систем для персональних комп'ютерів, ноутбуків, планшетів і т.д.

Б.Р. Круликівський
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики*

ІСТОРІЯ ДВІЙКОВОЇ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Двійкова система числення — це позиційна система числення, база якої дорівнює двом та використовує для запису чисел тільки два символи: зазвичай 0 (нуль) та 1 (одиницю). Числа, представлені в цій системі часто називають **двійковими або бінарними числами**. Для запису числа у двійковій системі числення використується представлення цього числа за допомогою степенів числа 2.

Завдяки тому, що таку систему доволі просто використовувати в електричних схемах, двійкова система отримала широке розповсюдження у світі обчислювальних пристроїв.

Рахувати у двійковій системі не складніше, ніж у будь-якій іншій. Скажімо, у десятковій системі, коли число у поточному розряді сягає десяти, то розряд обнуляється і одиниця додається до старшого. Наприклад: 9+1=10, 44+7=51; Аналогічним чином у двійковій системі: коли число в розряді сягає двох — розряд обнуляється і одиниця додається до старшого розряду. Тобто: 1+1=10. Зверніть увагу, «10» у цьому записі — двійкове число, у десятковій системі це число записується як «2». А десяткове 9+1=10 у двійковій системі буде виглядати так: 1001+1=1010 (після додавання одиниці число в останньому розряді дорівнює двом, тож розряд обнуляється і одиниця додається до передостаннього (старшого) розряду).

Повний набір з 8 триграм і 64 гексаграмм, аналог 3-бітних і 6-бітних чисел, був відомий в древньому Китаї в класичних текстах книги Змін. Порядок гексаграмм в *книзі Змін*, розташованих у відповідності зі значеннями відповідних двійкових цифр (від 0 до 63), і метод їх отримання був розроблений китайським вченим і філософом Шао Юн в XI столітті. Однак відсутні докази, які свідчать про те, що Шао Юн розумів правила двійкової арифметики, розташовуючи двосимвольні кортежі в лексикографічному порядку.

Індійський математик Пінгала (200 до н. е.) розробив математичні основи для опису поезії з використанням першого відомого застосування двійкової системи числення. Прообразом баз даних, що широко використовувалися в Центральних Андах (Перу, Болівія) у державних та громадських цілях в I–II тисячолітті н. е., була вузликова писемність Інків — кіпу, що складалася як з числових записів десяткової системи так і не числових записів у двійковій системі кодування.

Набори, що є комбінаціями двійкових цифр, використовувалися африканцями в традиційних ворожіннях (таких як Іфа) поряд зі середньовічною геомантією.

В 1854 англійський математик Джордж Буль опублікував знакову роботу, що описує алгебраїчні системи стосовно логіки, яка в даний час відома як булева алгебра або алгебра логіки. Його логічному численню судилося зіграти важливу роль у розробці сучасних цифрових електронних схем. В 1937 Клод Шеннон представив до захисту кандидатську дисертацію *Символічний аналіз релейних і перемикальних схем* в MIT, в якій булеву алгебру і двійкову арифметику було застосовно до електронних реле і перемикачів. На дисертації Шеннона по суті заснована вся сучасна цифрова техніка.

А.І. Савич
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *, кандитат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ЧИСЛО РАМАНУДЖАНА-ГАРДІ

Число Рамануджана-Гарді, **1729** — найменше число, яке можна вивести як суму двох кубів двома способами.

Срініваса Рамануджан (1887-1920) – індійський математик тамільського походження , відомий своїм самородним талантом, що дозволив йому зробити значний внесок у математику, здобувши свої знання в основному самоосвітою.

Годфрі Гарді (1877-1947) - англійський математик, відомий своїми досягненнями в теорії чисел і математичному аналізі.

Колись математик Годфрі Гарді навідував свого колегу Рамануджана у лікарні. Гарді почав розмову тим, що «пожалівся» на те, що приїхав на таксі із нецікавим, непримітним номером «1729». Рамануджан заперечив, що це зовсім не просте число, адже воно є найменшим натуральним числом, яке можна зобразити у вигляді суми кубів двома різними способами. І дійсно, $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Меншого числа, що має такі властивості, не існує. Число 1729 має іншу цікаву властивість: 1729-ий знак після коми в десятинному представленні трансцендентного числа *e* являє собою початок першої появи ряду всіх десяти цифр без повтору. Звичайно, цей факт не був відомим жодному математику доти, поки це не було виявлено за допомогою комп'ютера. Ще один мозговитий чоловік, Масахіко Фуджівара, показав, що 1729 є одним з чотирьох натуральних чисел (разом із 81 і 1458, та тривіальним випадком 1) які, коли їхні цифри скласти, а потім отриману суму помножити на її дзеркальне відображення, дають те саме число:

$$1+7+2+9=19$$
$$19 \cdot 9 = 1729$$

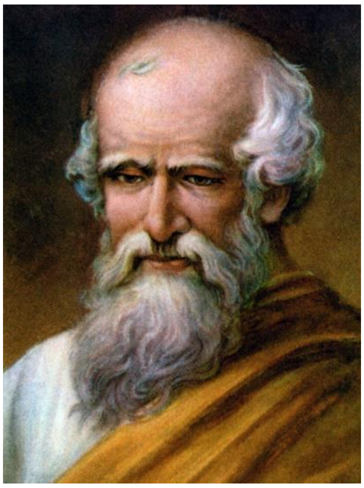
Фуджівара стверджував, що він довів, наче таких чисел тільки чотири, але ніколи не показував викладів свого доказу. Відомий фізик Річард Фейнман продемонстрував свої здібності із мисленнєвих обчислень коли, під час подорожі до Бразилії, він змагався із досвідченим користувачем рахівниці. Людина із рахівницею запропонувала йому вирахувати кубічний корінь із 1729.03; оскільки Фейнман знав, що 1729 дорівнює 12^3+1, він зміг надати правильну відповідь, виконавши інтерполяцію у розумі (а саме, біноміальне розкладання). Чоловік із рахівницею вирішував задачу більш працемістким алгоритмічним методом, і в результаті програв Фейнману.

А. Курса
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ ГЕНІЇ ТА ЇХ ВІДКРИТТЯ

Піфагор. Грецький математик Піфагор вважається одним з найбільш великих. Він жив у Греції в 570-495 рр до н.е. Відомий тим, що заснував школу піфагорійців. Також згадується його ім'я у зв'язку з відомою теоремою в тригонометрії. Проте деякі джерела сумніваються, що саме він довів її. Тим не менш, теорема Піфагора відіграє важливу роль в сучасних вимірах і технологічному обладнанні. Можна навіть назвати Піфагора батьком сучасної математики.

Евклід. Вважається батьком геометрії, а його великий труд Елементи - однією з найбільш великих робіт з математики в історії. Евклід довів безліч теорем і гіпотез. «Початки» - одна із важливих наукових досягнень Евкліда. Аксіоматичний метод у сучасній математиці є найбільшим з тих, які використовуються для обґрунтування теорій. У механіці він також знаходить широке застосування. Великий вчений Ньютон побудував "Начала натуральної філософії" за зразком праці, який створив Евкліда.



Архімед. Архімед, як правило, вважається найвидатнішим математиком античності та одним з найвидатніших всіх часів. Він використовував метод вичерпування, щоб розрахувати площу обмежену дугою параболи шляхом розрахунку суми нескінченного ряду і дав надзвичайно точне наближення числа пі. Він також винайшов спіраль, що носить його ім'я, формули для розрахунку об'ємів поверхонь обертання та оригінальну систему для вираження дуже великих чисел.

Леонард Ейлер. Він вважається великим математиком в історії людства. Ейлер залишив найважливіші праці з самим різним галузям математики, механіки, фізики, астрономії і по ряду прикладних наук. Ейлер вперше пов'язав аналіз, алгебру, тригонометрію, теорію чисел і ін. Дисципліни в єдину систему, і додав чимало власних відкриттів. Значна частина математики викладається з тих пір по Ейлеру.

Карл Фрідріх Гаусс. Вважається королем математики. Багато хто знає про Гаусса через його дивовижні розумові здібності. Ще в дитинстві він міг за секунди порахувати суму чисел від 1 до 100. З ім'ям Гаусса пов'язані фундаментальні дослідження майже у всіх основних галузях математики: алгебрі, диференціальної і неевклідової геометрії, в математичному аналізі, теорії функцій комплексного змінного, теорії ймовірностей, а також в астрономії, геодезії і механіці.

Лейбніц Готфрід Вільгельм. Лейбніц ввів такі терміни: « диференціал », « диференціальне обчислення », « диференціальне рівняння », « функція », « змінна », «постійна», «координати», « абсциса », «алгебраїчні та трансцендентні криві», « алгоритм » (у сенсі, близькому до сучасного). Хоча математичне поняття функції малося на увазі в тригонометричних і логарифмічних таблицях, які існували в його час, Лейбніц був першим, хто використав його явно для позначення будь-якого з декількох геометричних понять, похідних від кривої.

Література:

1. Гіршвальд Л. Я. Історія відкриття логарифмів. - Харків: Вид-во Харківського університету, 1952. - 33 с.
2. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
3. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.). Математика XIX століття. Геометрія. Теорія аналітичних функцій. - М .: Наука, 1981. - Т. II.

В. Опрісник
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЛЕГЕНДАРНИЙ СТЕФАН БАНАХ

Народився Стефан Банах 30 березня 1892 року в Кракові. Батько – Стефан Гречек, мати – Катажина Банах. Дитинство проходило у Кракові, де навчався згодом у гімназії. Математику і природничі науки завжди знав на «відмінно», решту предметів - на «дуже добре», «добре», були і «задовільно». Велику повагу Банах мав до латини, вважаючи, що пошуки влучного перекладу розвивають точність мислення. Ще у гімназії взявся до вивчення вищої математики. Його наука закінчилась складенням у 1913-14 роках першого державного іспиту. Документів, які б підтверджували навчання Стефана Банаха у наступні роки, немає. Тоді ж починається Перша світова війна. До війська Банаха не призвали, оскільки був шульгою і погано бачив лівим оком, тож він повернувся у Краків.

Весною 1916 року в Кракові трапився переломний момент у житті Банаха – випадкова зустріч з математиком Гуго Штайнгаузом, що колись студіював математику в професора Львівського університету Юзефа Пузини. У розмові математик поділився задачею, над якою довгий час ламав голову, а через тиждень Банах приніс йому розв’зок, таким чином ставши співавтором першої наукової публікації. Гуго Штайнгауз згодом казав, що його найбільшим науковим відкриттям став якраз Стефан Банах. Гуго Штайнгауз вирішив допомогти Банаху, надавши його рівню знань академічного виміру. Після здачі іспитів з математики і фізики та філософії з відзнакою 22 січня 1921 року відбулась офіційна церемонія надання ступеня доктора філософії. На посаді асистента Банах працював до жовтня 1921 року, тоді став старшим асистентом і виконуючим обов’язки професора механіки, читав лекції з теоретичної механіки. Після двох років роботи у Політехніці, Банах вирішив пройти процес «габілітації» для отримання права читання лекцій у Львівському університеті. У 1922 року Стефан Банах став керівником IV кафедри математики у Львівському університеті. Як і більшість геніїв, Банах не був надто пунктуальним щодо власних лекцій. Проте коли таки вже брався до викладання, студенти ставали слухачами талановитого промовця, що за короткий час міг пояснити найскладніші теми.

У 1924 році Банах став членом-кореспондентом Польської академії наук та отримав стипендію уряду на річну поїздку у Францію. Після цього він продовжив читати лекції в університеті та Політехніці. У 1927 році здобув звання і посаду звичайного професора, а два роки потому були опубліковані його перші підручники для вищих і середніх шкіл, серед яких і “Rachunek różniczkowy i całkowy, tom I, Lwów 1929”. Загалом він став автором і співавтором десяти шкільних підручників.

На розвиток досліджень з функціонального аналізу величезний вплив мала монографія Банаха "Théorie des operations linéaires", опублікована в 1932 році. Польською її було оприлюднено ще 1931 року, тоді як український переклад Мирона Зарицького під назвою «Курс функціонального аналізу» побачив світ лише 1948 року. Монографія, у тому числі запропоновані в ній підходи і термінологія, одразу здобула широке визнання і застосування. Фактично, Банах цією працею заклав фундамент функціонального аналізу. В ці роки у Львові сформувалась група активно працюючих математиків – здебільшого учнів Стефана Банаха і Гуго Штайнгауза: Юліуш-Павел Шаудер, Стефан Качмаж, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Герман Ауербах, Владислав Нікліборц, Юзеф Шраєр, Станіслав Улям, Мирон Зарицький, Марк Кац, Маєр Айдельгайт. До цієї групи також належали і професори Політехніки Антоній Ломницький, Казимир Куратовський, Влодзімеж Стожек.

Щосуботи відбувались засідання Львівської секції Польського математичного товариства, дискусії після яких часто продовжувались у кав'ярнях. З часом улюбленим місцем львівських математиків стала кнайпа «Шкоцька» або «Шотландська» на розі сучасних вулиць Герцена і Фредра. При потребі смачно поїсти і випити, товариство заходило до знаменитої пані Телічкової, чия локація знаходилась поруч.

У 1939 році, коли вже було переформатовано структуру Львівського університету, Банах став деканом фізико-математичного факультету, а Мирон Зарицький – його заступником. Фактично, Зарицький робив усю канцелярську роботу, навіть біографія та особова справа Банаха заповнені його рукою. У 1944 році Стефан Банах написав заяву, просячи звільнити його з посади, оскільки вона відволікала його від наукової праці. У 1945 році Стефан Банах відчув, що хворий, рак легенів швидко з'їдав його. Лікарем Банаха був Олександр Барвінський, представник шанованої у Львові родини та особистий доктор Митрополита Андрея Шептицького. 31 серпня 1945 року легендарний математик помер, поховали його у склепі Ридлів на Личаківському кладовищі.

На жаль, спогадів Банах не залишив, більшість запрошень на гостини супроводжувались його коментарем *«О, тепер знаю, де мене точно не буде!»*. Ідеї, започатковані Стефаном Банахом, досі живі та знайшли розвиток у Львові та світі, а ім'я науковця часто стає візиткою випускників Львівського університету в найбільш поважних вузах.

Література:

1. Притула Я. Г. Стефан Банах: сторінки біографії // Математичний вісник НТШ. – Львів, 2013. – Т.10. – с. 7-16;

Я. Стасула
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЖОЗЕФ ЛУЇ ЛАГРАНЖ

Жозеф Луї Лагранж (фр. *Joseph Louis Lagrange*)- французький математик, астроном і механік італійського походження. Поряд із Ейлером - найбільший математик XVIII століття. Особливо уславився винятковою майстерністю в галузі узагальнення та синтезу накопиченого наукового матеріалу.

Автор класичного трактату " Аналітична механіка ", в якому встановив фундаментальний " принцип можливих переміщень " і завершив математизацію механіки. Вніс величезний внесок у математичний аналіз, теорію чисел, теорію ймовірностей і чисельні методи, створив варіаційне числення .

Член Прусської академії наук (1766-1787; іноземний член у період 1756-1766 і з 1787 року), Паризької академії наук (з 1787 року, в період 1772-1787 - іноземний член), Петербурзької академії наук 1776, іноземний почесний член), Лондонського королівського товариства (1791).

Лагранж народився 25 січня 1736 в Турині, в багатій сім'ї. Проте його батько, зайнявшись ризикованими спекуляціями, втратив як особистий стан, так і стан своєї дружини. Через матеріальну скруту сім'ї він був змушений рано розпочати самостійне життя. Спершу Лагранж зацікавився філологією. Його батько хотів, щоб син став адвокатом, і тому визначив навчати його до Туринського університету. Але в руки Лагранжа випадково потрапив трактат з математичної оптики, і він захоплено вивчав математичну літературу. У 1755 році Лагранж надіслав Ейлеру свою роботу про ізопериметричні властивості, які згодом стали основою варіаційного числення. У цій роботі він вирішив низку завдань, які сам Ейлер не зміг подолати. Ейлер включив похвали Лагранжу в свою роботу і (разом з Д'Аламбер) рекомендував молодого вченого в іноземні члени Берлінської Академії наук (обраний у жовтні 1756).

У 1755 Лагранж був призначений викладачем математики в Королівській артилерійській школі в Турині, де користувався, незважаючи на свою молодість, славою прекрасного викладача.

У 1766 році на запрошення прусського короля Фрідріха II Лагранж переїхав до Берліна (теж за рекомендацією Д'Аламбера та Ейлера). Тут він спочатку керував фізико-математичним відділенням Академії наук, а згодом став президентом Академії. У «Мемуарах» опублікував безліч визначних робіт. Берлінський період (1766-1787) був найплідніший у житті Лагранжа. Тут він виконав важливі роботи з алгебри та теорії чисел, у тому числі суворо довів кілька тверджень Ферма та теорему Вільсона.

У 1787 році, після смерті Фрідріха II, Лагранж на запрошення Людовіка XVI переїхав до Парижа, де був принятий з королівськими почестями і став членом Паризької Академії наук (вже неіноземним членом). У ці роки Лагранж публікує свою знамениту інтерполяційну формулу наближення функції многочленом. Видає книгу "Теорія аналітичних функцій", без актуальних нескінченно малих. Ця робота пізніше надихала Коші при створенні суворого обґрунтування аналізу. Там же Лагранж дав формулу залишкового члена ряду Тейлора, вказав метод множників Лагранжа на вирішення завдань на умовний екстремум.

Помер Лагранж 10 квітня 1813, помер спокійно, як і жив, сказавши друзям: «Я зробив свою справу ... Я ніколи нікого не ненавидів, і не робив нікому зла». Похований у паризькому Пантеоні.

Лагранж зробив істотний внесок у багато галузей математики, включаючи варіаційне числення, теорію диференціальних рівнянь, вирішення завдань на знаходження максимумів і мінімумів, теорію чисел, алгебру і теорію ймовірностей. Формула кінцевих приростів та кілька інших теорем названо його ім'ям. У двох своїх важливих працях - "Теорія аналітичних функцій" ("Théorie des fonctions analytiques", 1797) і "Про вирішення чисельних рівнянь" ("De la résolution des équations numériques", 1798) - підсумував все, що було відомо з цих питань у його час, а які у них нові ідеї та методи були розвинені у роботах математиків XIX століття.

П'єр-Сімон Лаплас дав таку характеристику діяльності Лагранжа:

«…серед тих, хто найефективнішим чином розсунув межі наших знань, Ньютон і Лагранж найвищою мірою володіли щасливим мистецтвом відкривання нових даних, що є істотою знань…»

Високо оцінював Лагранжа, як вченого і як людину, Фур'є : «Лагранж був стільки ж філософ, як математик. Він довів це своїм життям, поміркованістю бажань земних благ, глибокою відданістю спільним інтересам людства, благородною простотою своїх звичок, піднесеністю душі та глибокою справедливістю в оцінці праць своїх сучасників.

Ім'я Лагранжа внесено до списку 72 найбільших вчених Франції , що розміщений на першому поверсі Ейфелевої вежі.

Література:

2. Колчинський І. Р., Корсунь А. А., Родрігес М. Р. . Астрономи: Біографічний довідник 2-ге вид. - Київ: Наукова думка , 1986. - 512 с.
3. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
4. Жозеф Луї Лагранж, 1736-1936. Зб. статей до 200-річчя від дня народження. М. - Л.: Вид. АН СРСР, 1937.
5. ЛБелл Е. Т. Творці математики . - М .: Просвітництво , 1979. - 256 с.
6. Тюліна І. А. Жозеф Луї Лагранж. 1736-1813. - М .: Книжковий будинок «Ліброком», 2010. - 224 с. - (Фізико-математична спадщина). - ISBN 978-5-397-01356-7

СЕКЦІЯ 4. Математика і сучасність

К.Б. Третяк
Городоцький НВК №2 І-ІІІ ступенів «ЗЗСО І ступеня- гімназія»
Науковий керівник ***І.Є. Третяк***

ЛІТЕРАТУРНИЙ ДОРОБОК ДОКТОРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК, ПРОФЕСОРА Н.О. ВІРЧЕНКО

«Доля математика і дисидента Ніни Вірченко – складне рівняння, в якому є академічна кафедра й сибірський концтабір, репресії та урядові нагороди», – так починається стаття про доктора фізико-математичних наук, професора Національного технічного університету України «КПІ», віце-президента АН Вищої школи України, члена Українського, Американського, Бельгійського, Единбурзького, Австралійського, Лондонського математичних товариств, яку опублікував журнал «Український тиждень» [1].

Ще в молоді роки Ніна Опанасівна вигадала собі псевдонім – УЖМА, за який її пізніше мучили на слідстві в КДБ. А розшифровується він так: «Україна – Жінка – Математика – Астрономія» або «Українська жінка-математик». Українка – передусім [2]!

У 1948 році Ніна Вірченко була заарештована та звинувачена у «політичній змові, таємному заколоті». У важкі часи відбування покарання відбулася зустріч юної Ніни Вірченко з Матір'ю-Ігуменею Йосифою (Оленою Вітер). Патріотична українська релігійна діячка була заарештована за співпрацю з ОУН. Ігуменя Йосифа стала для юної Ніни та інших політв'язнів духовною опорою, вона була яскравим прикладом поведінки гордої української жінки, яка незламно пройшла усі тортури. У Єрусалимі на Почесній стіні Праведників вписано ім'я Ігуменії Йосифи. За врятування єврейських дітей під час німецько-нацистської окупації уряд Ізраїлю у 1976 році удостоїв її почесним титулом «Праведник світу». Про цю дивовижну жінку Ніна Опанасівна написала книгу «За Бога, за Україну!», яка вийшла друком у 2007 році [3].

Ніна Опанасівна переймалася питаннями утискання української мови. Її зусиллями складено перелік документів, які в хронологічній послідовності засвідчують нищення української мови різними урядами та політичними силами [4].

Вона написала низку нарисів про колишніх політв'язнів (про І. Сеник, О. Вітер, Б. Бійовську, О. Мешко, друга родини Ю. Литвина, легендарного письменника-дисидента Є. Концевича), українських учених Михайла Остроградського, Георгія Вороного, М. Кравчука, А. Люльку, Є. Вікторовського та ін..) [5].

Ніна Опанасівна Вірченко багато зусиль докладає щодо увіковічення пам'яті Михайла Кравчука (1892–1942) – видатного українського математика XX сторіччя. Вона вважає цю діяльність своїм громадським та науковим обов'язком [6–8].

Оскільки Ніна Опанасівна сама родом із краю Кобзаря, то не могла не написати й кілька праць про Тараса Шевченка [9–10].

Її книга «Математика в афоризмах, цитатах, висловлюваннях» отримала чотири видання: українською (1974), російською (1974) та японською (1989, 1995) мовами [6].

Збірка Ніни Опанасівни «Математичні усмішки» має три розділи: «Про цікаве та кумедне у житті математиків», «Цікаве та смішне у математиці», «Математичні сміховинки, жарти» [12].

Її учні згадують, з яким захопленням вона читає лекції з математичного аналізу, з яким теплом розповідає на них про українських математиків, як наводить приклади існування українських символів в математиці (тризуб – параболізм гіперболи), жартівливо стверджує, що символ належності до множини «$\in$» математика запозичила з української мови [13].

І весь згадуваний літературний доробок успішно співіснує з колом наукових інтересів Ніни Опанасівни: теорією змішаних крайових задач, теорією узагальнених аналітичних функцій, інтегральними перетвореннями, сингулярними диференціальними рівняннями в частинних похідних, спеціальними функціями, історією та методикою математики тощо.

Література

1. Поліщук М. Аксіома патріотизму. *Український тиждень*. № 18 (183) від 18 травня 2011. URL: https://tyzhden.ua/Society/21977
2. Вірченко Н. О. «Зернини з доріг життя мого…» (Книга споминів). К.: Задруга, 2011. 760 с.
3. Вірченко Н. О. За Бога, за Україну! К.: Задруга, 2007. 248 с.
4. Вірченко Н. О. Про заборону української мови (XVII—XX ст.). *Наше життя* (*Our life*). США. 2008. Vol. LXV. URL: https://parafia.org.ua/biblioteka/statti/dokumenty-pro-zaboronu-ukr-movy/
5. Овсієнко В. В. Вірченко Ніна Опанасівна. Дисидентський рух в Україні. URL: http://museum.khpg.org/1366623857
6. Івасишен С. Д., Каленюк П. І., Пелих В. О., Пташник Б. Й. До 80-річчя Ніни Опанасівни Вірченко. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2010. Т. 53. № 2. С. 161-164.
7. Вірченко Н. О. Велет української математики : [про акад. М. П. Кравчука]. 2-е вид., перероб. і доп. Київ: Науковий світ, 2012. 62 с.
8. Кравчук М. П. Науково-популярні праці. Уклад. Н. О. Вірченко. Київ: НТТУ «КПІ». 2000. 232 с.
9. Вірченко Н. О. І осквернить не дам нікому його ім'я (Про Т.Шевченка). *Тарас Шевченко в моєму житті*. К.: Фенікс. 2003. С. 118-121;
10. Вірченко Н. О. Тарас Шевченко в моєму житті. *Свобода*. 2003. 15 серпня.

11. Вірченко Н. О. Математика в афоризмах, цитатах і висловлювання. К.: Вища школа, 1974. 272 с.
12. Вірченко Н. О. Математичні усмішки. К. 2014. 680 с.
13. Букет Є. Ніна Вірченко. *Слово Просвіти*. 27 травня 2010. URL: http://slovoprosvity.org/2010/05/27/nina-virchenko-zernyny-z-dorih-zhyttia-m/

О.А Головата
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О Карабин*** *доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КРИПТОГРАФІЯ. ВИКОРИСТАННЯ У ВАЛЮТІ

Що таке криптографія?
Криптографія –наука про методи забезпечення конфіденційності, цілісності даних. Щоб розкрити інформацію, читачеві необхідно знати, як інформація була змінена або зашифрована. Якщо повідомлення було якісно зашифровано, прочитати його зможуть лише відправник та одержувач.
Історія криптографії:
Криптографія аж ніяк не нова, вона існує вже тисячі років. Історично криптографія використовувалася для надсилання важливих повідомлень, щоб сховати їх від зайвих очей. Перші криптографічні повідомлення знайшли у стародавніх єгиптян, проте підтверджене використання шифрів у стратегічних цілях належить до епохи Стародавнього Риму.
За словами істориків, Юлій Цезар використав криптографію і навіть створив так званий шифр Цезаря, щоб надсилати секретні повідомлення високопоставленим генералам. Також під час Другої світової війни німці використали машину шифрування "Енігма", щоб передавати важливу інформацію. Алан Тюрінг, математична людина і геній, знайшов спосіб як її зламати.
Основи криптографії:
Шифр — це набір правил, які ви використовуєте для кодування інформації.Шифр не обов'язково має бути засекреченим, тому що повідомлення можна буде прочитати лише за наявності ключа.
Ключ - значення, яке описує, яким саме чином використовувати набір правил шифрування. Вищезгаданий шифр Цезаря - один із найпростіших способів шифрування повідомлень. Його також називають шифром зсуву, оскільки він замінює вхідні літери повідомлення іншими літерами, що перебувають у певній позиції стосовно первинної літери в алфавіті.Наприклад, якщо ми зашифруємо повідомлення через шифр +3 англійською мовою, то A стане D, а K стане N. Якщо використовувати правило -2, то D стане B, а Z стане X.
Криптовалюта — різновид цифрової валюти , облік внутрішніх розрахункових одиниць якої забезпечує децентралізована платіжна система. За допомогою криптографії побудовані такі функції у криптовалюті,як цифровий підпис та хешування. Цифровий підпис в певному сенсі є аналогом вашого реального підпису і служить для підтвердження вашої особистості в мережі. Коли йдеться про криптовалюти, цифрові підписи представляють математичні функції, які зіставляються з певним гаманцем.Таким чином, цифрові підписи – це своєрідний спосіб цифрової ідентифікації гаманця. Додаючи цифровий підпис до транзакції, власник гаманця доводить усім учасникам мережі, що угода виходила саме від нього, а не від будь-кого іншого.

Хешування - це криптографічний метод перетворення великих обсягів даних на короткі значення, які важко підробити. Це ключовий компонент технології блокчейн, що стосується захисту та цілісності даних, що протікають через систему.Цей метод переважно використовується для трьох основних процесів:верифікація,підтвердження залишків у гаманцях користувачів та кодування транзакцій між гаманцями.

Д.В. Горбай
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ТЕОРЕМА ДАРМУА-СКИТОВИЧА

Теорема Дармуа – Скитовича була незалежно доведена Г. Дармуа та В. П. Скитовичем в 1953 році.

Нехай дано дві лінійні форми:

$$Y_1=a_1X_1 + \dots + a_nX_n, \quad Y_2 = b_1X_1 + \dots + b_nX_n,$$

взаємно незалежних випадкових величин $X_1 ,\dots, X_n$ *з нерівними нулю коефіцієнтами* $a_1 ,\dots, a_n$, $b_1 ,\dots, b_n$. *Тоді, якщо* Y_1 *і* Y_2 *незалежні випадкові величини, то* $X_1 ,\dots, X_n$ *мають нормальний розподіл.*

Ця теорема належить до теорем теорії ймовірностей, тобто до класу теорем які встановлюють зв'язок між типом розподілу випадкових величин і деякими загальними властивостями певних функцій від випадкових величин, що розглядаються. Сама теорема Дармуа-Скитовича схожа до чудового результату, отриманого ще в 1859 р. відомим англійським фізиком Джеймсом Максвеллом (1831-1879), який, займаючись статистичною фізикою, встановив стосовно стаціонарного стану ідеального газу закон, названий нині законом Максвелла для розподілу швидкостей молекул. Теоретико-імовірнісне формулювання цього фізичного закону Максвелла звучить так.

Нехай взаємно незалежні випадкові величини мають спільну щільність розподілу $f (X_1 , X_2 , X_3)$ *, яка залежить тільки від квадратичної форми* $X_1^2+X_2^2+X_3^2$. *Тоді, якщо три проекції випадкового вектора* $X =(X_1 , X_2 , X_3)$ *на будь-які три ортогональні осі є взаємно незалежними, то випадкові величини* X_1 , X_2 , X_3 *мають нормальний розподіл.*

Понад сімдесят років, що відділяли закон Максвелла від теореми Дармуа-Скитовича , були заповнені спробами багатьох учених узагальнити і посилити вихідне формулювання аналізованої теореми про характеризацію нормальності випадкових величин за допомогою незалежності лінійних форм від цих випадкових величин. Серед авторів різних модифікацій зазначеної теореми слід згадати, наприклад, академіків Сергія Натановича Бернштейна та Юрія Володимировича Лінника, знаменитого математика Дьордя Пойя та багато інших відомих учених.

Таке розуміння теореми Скитовича, як кульмінації майже столітнього розвитку важливого напряму теоретико-імовірнісних досліджень, не відразу набуло поширення серед колег Віктора Павловича, про що свідчить історія, що тривала, з першою публікацією обговорюваного результату.

Література:

1. *Стасюк М.Ф., Карабин О.О., Кусій М.І. Статистичний аналіз. – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – 200с.*

О. Б. Сало
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки*

ТЕОРЕМА БАЙЄСА

Томас Баєс - математик, пресвітеріанський священик, член Лондонського королівського товариства (з 1742). Головною сферою математичних вподобань Байєса була теорія ймовірностей. Він сформулював і розв’язав одну з основних задач цього розділу математики. Теорема Баєса дає можливість оцінити ймовірність подій емпіричним шляхом, застосовується в сучасній математичній статистиці та теорії ймовірностей. Друга значна праця Баєса «Нариси до розв’язання проблеми доктрини шансів», яка також стосується теорії ймовірностей, оприлюднена вже після його смерті (1763) Р. Прайсом. Рукопис було відредаговано та доповнено, після чого працю прочитано на засіданні Лондонського королівського товариства й опубліковано в журналі «Філософські праці Лондонського королівського товариства» («Philosophical Transactions of the Royal Society»). Книга містила підсумки багаторічної роботи Байєса в галузі теорії ймовірностей, зокрема й Байєса теорему. Байєсу належить також праця з теології «Божа милість, або Спроба довести, що основною метою Божественного провидіння та правління є щастя його творінь» (1731). Теорема Байєса описує ймовірність події, спираючись на обставини, що могли би бути пов'язані з цією подією. Наприклад, припустімо, що хтось цікавиться, чи має рак певна особа, і знає вік цієї особи. Якщо рак пов'язаний з віком, то, застосовуючи теорему Баєса, інформацію про вік осіб можливо використати для точнішої оцінки ймовірності того, що вони мають рак.

Твердження теореми

Теорема Баєса задається математично таким рівнянням:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)},$$

де A та B є подіями.

• P(A) та P(B) є ймовірностями A та B безвідносно одна до одної.

• P(A | B), умовна ймовірність, є ймовірністю A за умови істинності B.

• P(A | B) є ймовірністю спостереження події B за умови істинності A.

Припустимо, що ми хочемо знати ймовірність того, що якась особа має рак, але ми нічого не знаємо про неї. Незважаючи на відсутність жодних відомостей про особу, якусь імовірність може бути призначено на основі загальної поширеності раку. Заради цього прикладу уявімо, що нею є 1%. Це є відомим як базовий рівень, або апріорна ймовірність мати рак. «Апріорна» відповідає часу до того моменту, як нас буде поінформовано про даний конкретний випадок. Далі, уявімо, що ми з'ясували, що тій особі 65 років. Якщо припустити, що рак та вік є пов'язаними, то цю нову порцію інформації може бути використано для кращої оцінки ризику тієї особи мати рак. Точніше, ми хотіли би знати ймовірність того, що особа має рак, якщо відомо, що їй 65 років. Ця величина є відомою як поточна ймовірність, де «поточна» відповідає теоретичній ситуації після з'ясування інформації про даний конкретний випадок. Для того, щоби застосувати знання про вік тієї особи в поєднанні з теоремою Байєса, потрібні дві додаткові порції інформації. Зауважте, проте, що ця додаткова інформація не стосується конкретно тієї особи.

Потрібна така інформація:

1. Ймовірність мати вік 65 років. Припустімо, що нею є 0.2%.
2. Ймовірність того, що особа, яка має рак, має вік 65 років. Припустімо, що нею є 0.5%. Зауважте, що вона є більшою за попереднє значення. Це відображає той факт, що люди з раком є непропорційно 65-річними.

Знаючи це, разом із базовим рівнем, ми можемо обчислити, що особа, яка має вік 65 років, має ймовірність мати рак, що дорівнює

$$(0{,}5\% * 1\%) / 0{,}2\% = 2{,}5\%$$

Може стати несподіванкою, що хоча перебування у віці 65 років і збільшує ризик мати рак, ймовірність тієї особи мати рак все одно є досить низькою. Це тому, що низьким є базовий рівень раку (незалежно від віку). Це показує як важливість базового рівня, так і те, що ним зазвичай нехтують. Нехтування базовим рівнем призводить до серйозного спотворення інтерпретації статистики; отже, потрібно приділяти особливу увагу тому, щоби уникати таких помилок. Знайомство з теоремою Байєса є одним із шляхів боротьби з природною схильністю нехтувати базовими рівнями.

Задачі із застосуванням теореми Байєса часто легше зрозуміти, застосовуючи задані в задачі умови до великого набору спостережень. Припустімо, наприклад, що якась спільнота складається зі 100 000 людей. Відповідно до умови задачі, 1% цієї генеральної сукупності, або 1 000 людей, матимуть рак. 0.2% від цієї генеральної сукупності, або 200 людей, матимуть вік 65 років. Із 1 000 людей з раком лише 0.5%, або 5 людей, будуть 65-річними. Таким чином, очікується, що з 200 людей, які мають вік 65 років, лише 5 матимуть рак. 5/200 = 2.5%

Перевірка на вживання наркотиків

Припустимо, що тест на вживання наркотиків має чутливість 99% та специфічність 99%. Тобто, цей тест даватиме 99% правильних позитивних результатів для тих, хто вживає наркотики, і 99% правильних негативних результатів для тих, хто не вживає. Припустімо, що 0.5% людей вживають наркотики. Якщо для випадково вибраної особи перевірка виявляється позитивною, то якою є ймовірність, що вона вживає наркотики?

$$P(\text{вживає} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{вживає}) \times P(\text{вживає})}{P(+ \mid \text{вживає}) \times P(\text{вживає}) + P(+ \mid \text{не вживає}) \times P(\text{не вживає})}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995}$$

$$\approx 33.2\%$$

Незважаючи на видиму точність перевірки, якщо індивідуальні перевірки дають позитивний результат, то ймовірніше, що вони **не** вживають наркотиків, ніж що вони їх вживають. Це ще раз свідчить про важливість базових рівнів, і як формування політики може бути кричуще помилковим, якщо базовими рівнями нехтують. Цей несподіваний результат виникає тому, що кількість тих, хто не вживає, є дуже великою у порівнянні з кількістю тих, хто вживає; таким чином, кількість хибних позитивних результатів (0.995%) переважує кількість правильних позитивних результатів (0.495%). На конкретних цифрах, якщо перевірено 1000 осіб, то очікується 995 тих, хто не вживає наркотиків, і 5 тих, хто вживає. Із 995 тих, хто не вживає, очікується $0.01 \times 995 \simeq 10$ хибних позитивних результатів. Із 5 тих, хто вживає, очікується $0.99 \times 5 \simeq 5$ правильних позитивних результатів. Із 15 позитивних результатів лише 5, близько 33%, є істинними. Важливість специфічності може бути проілюстровано показуванням, що навіть якщо чутливість є 100%, а специфічність є 99%, то ймовірність того, що особа вживає наркотики, є ≈33%, але якщо специфічність змінюється до 99.5%, а чутливість падає до 99%, то ймовірність того, що особа вживає наркотики, виростає до 49.8%.

Людина придбала два білети лотереї, де виграш припадає на три білети з десяти, і три білети лотереї, де виграш припадає на чотири білети з десяти. Припустимо, що на один з цих білетів припав виграш. Визначимо ймовірність того, що виграшним виявився саме білет лотереї «три з десяти». Оскільки подія А (виграш припав на один з п’яти білетів) вже відбулась, то мова йде про визначення апостеріорної ймовірності, обчислення якої здійснюється за формулою Баєса. При цьому, у знаменнику цієї формули міститься значення повної ймовірності події А (його ми обчислили у попередньому прикладі), а у чисельнику – ймовірність виграшу за білетом «**три з десяти**» (це перший доданок у формулі повної ймовірності). За теоремою гіпотез отримуємо значення апостеріорної ймовірності для гіпотези Н1:

$P(H1|A)$=0,4·0,30,36=13.P(H1|A)=0,4·0,30,36=13.

Давайте також визначимо апостеріорну ймовірність гіпотези H2. За формулою Байєса ймовірність того, що виграшним виявився один з білетів лотереї «чотири з десяти», дорівнює:

$$P(H2|A)=0{,}6\cdot 0{,}40{,}36=23.\mathrm{P(H2|A)}=0{,}6\cdot 0{,}40{,}36=23.$$

Отже, сума апостеріорних ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(H1|A)+P(H2|A)=13+23=1.\mathrm{P(H1|A)+P(H2|A)}=13+23=1.$$

Дійсно, так і повинно бути, оскільки за умовою прикладу відомо, що один з придбаних п’яти білетів виявився виграшним. Це міг бути білет або лотереї «**три з десяти**» , або лотереї «**чотири з десяти**», тобто випадкові події $H1$ | A та H2 | A утворюють повну групу несумісних подій. Відповідно, сума їх ймовірностей повинна дорівнювати одиниці.

Література

1. Rosenthal, JS (2005), "Struck by Lightning: the Curious World of Probabilities". Harper Collings.
2. Малярець Л. М. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова, З. Г. Попова. – Харків : Вид. ХНЕУ. – 2010. – 404 с.
3. Grinstead, CM and Snell, JL (1997), "Introduction to Probability (2nd edition)", American Mathematical Society.
4. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
5. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.

Д.С. Цветков
Львівський деражавний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин*** *кандидат фізико математичних наук,*
доцент кафедри прикладної математики і механіки

ТЕОРІЯ СТРУН. ПРОТИРІЧЧЯ ФІЗИКИ

Теорія струн — напрям теоретичної фізики, що вивчає динаміку взаємодії не точкових частинок, а одновимірних протяжних об'єктів, так званих квантових струн. Теорія струн поєднує в собі ідеї квантової механіки і теорії відносності, тому на її основі, можливо, буде побудована майбутня теорія квантової гравітації. У другій половині XIX століття фізикам здавалося, що нічого серйозного в їхній науці не можна відкрити. Класична фізика вважала, що серйозних проблем у ній не залишилося, а весь пристрій світу виглядав ідеально налагодженою та передбачуваною машиною. Біда, як і водиться, трапилася через нісенітницю – одну з дрібних «хмарок», що ще залишалися на чистому, зрозумілому небі науки. А саме – при розрахунку енергії випромінювання абсолютно чорного тіла (гіпотетичне тіло, яке за будь-якої температури повністю поглинає падаюче на нього випромінювання, незалежно від довжини хвилі – NS).

Розрахунки показували, що загальна енергія випромінювання будь-якого абсолютно чорного тіла має бути нескінченно великою. Щоб уникнути такого явного абсурду, німецький учений Макс Планк у 1900 році припустив, що видиме світло, рентгенівські промені та інші електромагнітні хвилі можуть випускатися лише деякими дискретними порціями енергії, які він назвав квантами. З їхньою допомогою вдалося вирішити приватну проблему абсолютно чорного тіла. Проте наслідки квантової гіпотези для детермінізму тоді ще не усвідомлювалися. Поки 1926 року інший німецький учений, Вернер Гейзенберг, не сформулював знаменитий принцип невизначеності.

Суть його зводиться до того, що попри всі панівні до того твердження, природа обмежує нашу здатність передбачати майбутнє на основі фізичних законів. Йдеться, звичайно, про майбутнє і сьогодення субатомних частинок. З'ясувалося, що вони поводяться зовсім не так, як це роблять будь-які речі в навколишньому макросвіті. На субатомному рівні тканина простору стає нерівною та хаотичною. Світ крихітних частинок настільки бурхливий і незрозумілий, що це суперечить здоровому глузду. Простір і час у ньому настільки викривлені та переплетені, що там немає звичайних понять лівого та правого, верху та низу, і навіть до та після.

Не існує способу сказати, напевно, в якій саме точці простору знаходиться в даний момент та чи інша частка, і який при цьому момент її імпульсу. Існує лише певна ймовірність знаходження частки у безлічі областей простору-часу. Частинки на субатомному рівні наче «розмазані» по простору. Мало цього, не визначено й самого «статусу» частинок: в одних випадках вони поводяться як хвилі, в інших – виявляють властивості частинок. Це те, що фізики називають корпускулярно-хвильовим дуалізмом квантової механіки.

Як влаштований світ. Науці сьогодні відомий набір чисел, які є фундаментальними постійними Всесвітом. Саме вони визначають властивості та характеристики всього навколо нас. Серед таких констант, наприклад, заряд електрона, гравітаційна стала, швидкість світла у вакуумі… І якщо ми змінимо ці числа навіть у незначну кількість разів – наслідки будуть катастрофічними. Припустимо, що ми збільшили силу електромагнітної взаємодії. Що ж сталося? Ми можемо раптом виявити, що іони стали сильнішими відштовхуватися один від одного, і термоядерний синтез, який змушує зірки світити і випромінювати тепло, раптом дав збій. Усі зірки згаснуть. Але до чого тут теорія струн із її додатковими вимірами? Справа в тому, що, відповідно до неї, саме додаткові виміри визначають точне значення фундаментальних констант. Одні форми вимірювань змушують одну струну вібрувати певним чином, і породжують те, що бачимо, як фотон. В інших формах струни вібрують по-іншому і породжують електрон. Воістину бог у «дрібницях» – саме ці крихітні форми визначають всі основні константи цього світу.

Теорія супер струн. У середині 1980-х років теорія струн набула величного і стрункого вигляду, але всередині цього монумента панувала плутанина. За кілька років виникло цілих п'ять версій теорії струн. І хоча кожна з них побудована на струнах та додаткових вимірах (всі п'ять версій об'єднані в загальну теорію суперструн – NS), у деталях ці версії розходилися значно.

Так, у одних версіях струни мали відкриті кінці, за іншими – нагадували кільця. А в деяких варіантах теорія навіть вимагала не 10, а 26 вимірів. Парадокс у тому, що всі п'ять версій на сьогоднішній день можна назвати однаково вірними. Але яка з них справді описує наш Всесвіт? Це ще одна загадка теорії струн. Саме тому багато фізиків знову махнули рукою на «божевільну» теорію.

Але найголовніша проблема струн, як уже було сказано, у неможливості (принаймні поки що) довести їх наявність експериментальним шляхом.

Деякі вчені, однак, все ж таки подейкують, що на наступному поколінні прискорювачів є дуже мінімальна, але все ж таки можливість перевірити гіпотезу про додаткові виміри. Хоча більшість, звичайно, впевнена, що якщо це і можливо, то відбутися це, на жаль, має ще дуже нескоро – як мінімум через десятиліття, як максимум – навіть через сотню років.

Н.І. Возний
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **О.Е. Васильєва,** доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики і механіки*

ЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИКИ ТА КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ

Математика – це фундаментальна наука, методи якої, активно застосовуються в багатьох природничих дисциплінах, таких як фізика, хімія і навіть біологія. Сама по собі, ця галузь знань оперує абстрактними відношеннями і взаємозв'язками, тобто такими сутностями, які самі по собі не є чимось природнім.

Але, варто лише математиці вступити в область будь-якої науки про світ, вона відразу втілюється в опис, моделювання та передбачення цілком конкретних і реальних природних процесів. Тут вона знаходить сутність, виходячи з під покриву ідеалізованих та відірваних від життя формул і підрахунків.

Отже, математика є одним з найважливіших досягнень культури і цивілізації. Без неї розвиток технологій і пізнання природи були б немислимими речами! Добре, скажете Ви, припустімо,що ця точна наука дійсно вкрай важлива для людства в цілому, але навіщо вона потрібна особисто мені? Що вона мені дасть?

Математика дозволяє розвинути деякі важливі розумові якості, такі як: аналітичні, дедуктивні (здатність до узагальнення), критичні, прогностичні (вміння прогнозувати, мислити на кілька кроків вперед) здібності.

Також ця дисципліна покращує можливості абстрактного мислення (адже це абстрактна наука), здатність концентруватися, тренує пам'ять і підсилює швидкість мислення. Ось скільки всього ви отримуєте!

Як регулярні спортивні тренування «прокачують» тіло, роблять його здоровим, дужим і витривалим, так регулярні заняття математикою «прокачують» мозок — розвивають інтелект і пізнавальні здібності, розширюють кругозір. Математика закладає навички ефективного і швидкого навчання чому завгодно. Все це відбувається завдяки «перетворенню в людину мислячу».

Розвинуте логічне мислення є необхідною передумовою успішної роботи юриста,економіста, управлінця, науковця, що відображено у стандартах вищої освіти України. Це є ознакою загальнолюдської та професійної освіченості фахівця, здатного розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у власній професійної діяльності. Така діяльність передбачає володіння певним логічним арсеналом – методами аналізу і синтезу, абстрагування й узагальнення, вмінням доводити і спростовувати, робити правильні висновки, приймати обґрунтовані, раціональні рішення.

Якщо говорити більш детально і оперувати конкретними навичками, то математика допоможе людині розвинути такі інтелектуальні здібності, як:

1. Уміння узагальнювати.

2. Здатність до аналізу складних життєвих ситуацій, можливість приймати правильне розв’язання проблем і визначатися в умовах важкого вибору.
3. Уміння знаходити закономірності.
4. Уміння логічно мислити і міркувати, грамотно і чітко формулювати думки, робити вірні логічні висновки.
5. Здатність швидко міркувати і приймати рішення.
6. Навик планування, здатність утримувати в голові кілька послідовних кроків.
7. Навички концептуального і абстрактного мислення: вміння послідовно і логічно вибудовувати складні концепції або операції.

Золоте правило – все добре в міру, доля гармонійно розвиненого розуму, універсальність на самому базовому рівні! Всі разом і книги, і математика! У своїй спеціалізації ви повинні бути професіоналом і вузьким фахівцем, знавцем саме своєї справи. Але що стосується вашої базової ерудиції та знань, тут повинно бути від усього потрошку.

Література:

1. А.О. Розуменко, А.М. Розуменко - "Розвиток критичного мислення при вивченні математики", 2020р.
2. О.М. Ящук - "Роль математики у формуванні мислення", 2015р.
3. Васильєва О.Е., Паснак І.О. Основи технічної творчості. Навч. посібник – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – 230 с.
4. D. Kahneman and A. Tversky, «On the Psychology of Prediction», Psychological Review 80 (2003): 237–251
5.W. Edwards, «Conservatism in Human Information Processing», in Formal Representation of Human Judgment, ed. B. Kleinmuntz(New York: Wiley, 1998): 17–52.

С.В. Кмита
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ГІПОТЕЗА КОЛЛАТЦА

Задача, зміст якої зрозуміє навіть третьокласник, проте найвидатніші математики ламають голову над її розв'язанням вже майже 100 років.

У книгах та в Інтернеті часто можна зустріти різні математичні фокуси. У таких фокусах вас просять взяти якесь число, а потім виконати з ним ряд арифметичних дій. Після цього співрозмовник точно називає вам число, яке у вас вийшло. Секрет більшості цих фокусів полягає в тому, що вихідне число в ході перетворень непомітно підмінюється іншим, а потім за кілька кроків зводиться до відомої відповіді. Такі фокуси, наприклад, можна зустріти у книгах Якова Перельмана.

Гіпотеза Коллатца залишає всі подібні фокуси позаду. На перший погляд здається, що це теж якийсь каверзний фокус. Однак, якщо уважно розглянути алгоритм задачі, то виявляється, що ніякої каверзи немає. Ви берете довільне число і кілька разів повторюєте йому одну з двох арифметичних дій. Дивно, але результат цих дій буде завжди одним і тим самим. Чи не завжди? Цього поки що напевно ніхто не знає, але отримати щось інше поки що нікому не вдалося.
Переконаймося на практиці. Отже, візьміть будь-яке ціле додатне число. Далі крокуйте за простим алгоритмом:

- Якщо число парне, розділіть його на 2. Якщо ж непарне, помножте його на 3 і додайте 1.
- Повторіть крок 1 із отриманим числом.

Як ви думаєте, що ми отримаємо в результаті, якщо багато разів виконуватимемо кроки 1 і 2?
Німецький математик Лотар Коллатц вважає, що для будь-якого натурального числа ми рано чи пізно отримаємо спочатку 4, потім закономірно 2, а потім 1. І після цього ми ходитимемо по колу, знову і знову одержуючи ланцюжок 4-2-1. Найдивовижніше те, що ми прийдемо до такого результату, з якого числа ми не почали б. Не вірите? Це не складно перевірити, тим паче, що умови завдання дуже прості. Мабуть, зараз це найпростіше формулювання невирішеного математичного завдання, множити і додавати навіть третьокласник. Задля справедливості варто зауважити, що для деяких вихідних чисел рахувати доведеться довго. Тож для загадування у дружній компанії цей «фокус» якщо й згодиться, то лише для невеликих вихідних чисел.

А щоб переконатися в правильності гіпотези Коллатца відносно необмежено великих чисел, можна скласти просту програмку на будь-якій мові програмування. Ось приклад для Python:

Python 3.6

```python
number = 7

def collatz(number):
    while number !=1:
        if number % 2 == 0:
            number = number/2
            print (number)
            collatz(number)
        elif number % 2 == 1:
            number = 3*number+1
            print (number)
            collatz(number)

collatz(number)
```

Спробуйте написати таку ж програму своєю мовою програмування та проекспериментувати з цією гіпотезою. До речі, у мережі можна знайти багато цікавих візуалізацій, що показують розподіл рішень та кроків для різних вихідних даних. А ще для ледачих у мережі є сайт, який містить варіанти реалізації цієї задачі для багатьох мов програмування.

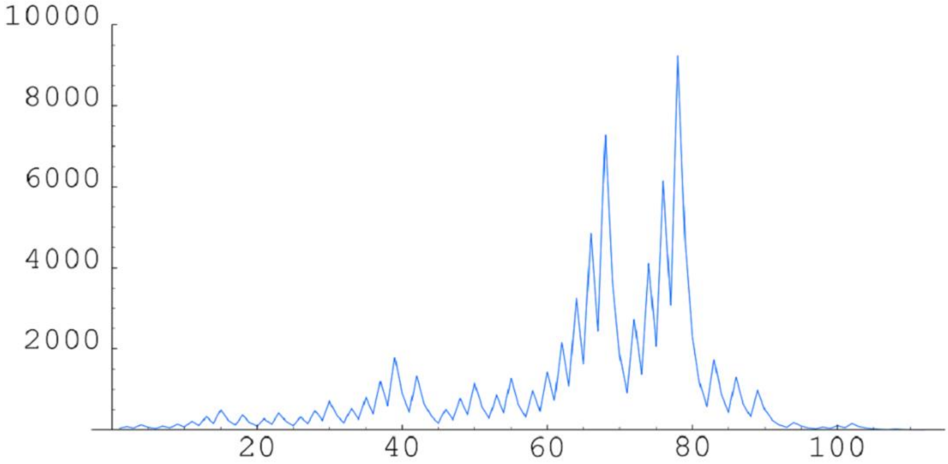
Здавалося б твердження правильне для будь-якого натурального числа. Хіба це дилема? Але гіпотеза Коллатца недарма називається гіпотезою — поки що ніхто так і не зміг її довести. Лотар Коллатц сформулював свою гіпотезу ще в 30-х роках ХХ ст. і з того часу робилися численні спроби довести чи спростувати це твердження за допомогою строгої математичної логіки. Але все, чого змогли досягти математики, це просто перевірити гіпотезу експериментально. У цьому завданні програмний пошук розв'язання насправді нічим не обмежений. Поки що гіпотеза не спростована — навіть для величезних вихідних чисел рано чи пізно алгоритм досягає 1.

Для розв'язання цієї задачі навіть організували проект добровільних розподілених обчислень. Але для класичної математики цього замало. Числа іноді бувають дуже підступні. Десь серед неймовірно великих вихідних чисел може ховатися таке вихідне число, для якого гіпотеза не підтвердиться.

До речі, гіпотеза Коллатца має ще кілька менш відомих назв:

- дилема 3n+1 – це варіант кроку для непарних чисел;
- гіпотеза Улама – в честь польського математика Станіслава Улама;
- проблема Какутані - в честь японського математика Сідзуо Какутані;
- гіпотеза Туейтса - на ім'я англійського математика Брайна Туейта;
- алгоритм Хассе – на ім'я німецького математика Хельмута Хассе;
- сіракузька проблема.

За кількістю різноманітних найменувань можна зробити висновок, що математиків серйозно зацікавила ця проблема. Проте виявилося, що це одне з тих «шкідливих» завдань, які дуже легко формулюються, але дуже важко вирішуються. Наприклад, як



Велика теорема Ферма.

Цікаво також, що числа в цій задачі поводяться вкрай дивно: у деяких випадках обчислення завершуються одиницею дуже швидко, а іноді проміжний підсумок добирається до досить великого числа, а потім швидко зривається вниз - до самої одиниці.

Наприклад, для початкового числа 27 проміжний підсумок досягає 9232, а потім за кілька кроків швидко спускається до 1. У результаті кількість кроків для 27 дорівнює 111. І це при тому, що для 26 воно дорівнює 10 (максимальне проміжне число - 40), а для 28 - 18 (максимальне проміжне число - 52).

Хоча математикам і не вдалося повністю логічно підтвердити або спростувати гіпотезу, вони все ж таки чогось досягли. Як це часто буває, вчені підбираються до вирішення поступово. Нещодавно, 8 вересня 2019 року, математик з Каліфорнійського університету Теренс Тао опублікував доведення, де показано, що гіпотеза Коллатца, щонайменше, «майже» правильна «майже» для всіх чисел. У журналах та в мережі вже неодноразово з'являлися варіанти доказу гіпотези Коллатца. Проте, на превеликий жаль, вони або містили помилки, або були неповними. Отже, гіпотеза поки що залишається гіпотезою, а ще — найкрасивішим і найкрутішим математичним фокусом.

Література:

1. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 1. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 400 с.
2. *Кузик А. Д., Карабин О.О., Трусевич О. М.* Вища математика. Навчальний посібник. Частина 2. – Львів: ЛДУ БЖД, 2014. – 215 с.
3. *Герасимчук В.С., Васильченко С.Г., Кравцов В.І.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Ч1- Книги України ЛТД. -2010. -470с.

Ю.С. Дуда
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О. Е .Васильєва*** *, доктор технічних наук ,професор кафедри ПМіМ*

МАТЕМАТИКА У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ ЛЮДИНИ

Наше розуміння математики та постійнебажання знати більше про процейсвіт створили сьогодення, яке простонеможливоуявити без математики .Завдяки їй ми вирішуємо багато питань в повсякденному житті . Ще з дитинства ми стикаємося з математикою : вага , зріст , вік , підрахунок іграшок , підрахунок цукерок . З віком ми вирішуємо все більше питань : кількість продуктів які треба купити , скільки потрібно грошей, математичні задачі у школі.

В повсякденному житті математика нам потрібна для спілкування , аналізу складних ситуацій , розвитку логіки , побудови складних операцій , швидкість прийняття рішень , планування та утримання в голові складної покрокової операції .

1.Математика сприяєу сім нашим методичним та систематичним поведінкам.Наприклад, саме математика наводить порядок у громадах наційпланеті та запобігає хаосу та катастрофам. Багато наших успадкованихлюдськихякостейвиховуються та розвиваютьсятеоріями математики, як-от наше просторовеусвідомлення, нашінавичкивирішення проблем, наша міркування (щовключаєпродуманемислення) і навіть наша творчість та спілкування.

2.Математика і режим дня.Режим – це розподіл часу і його планування протягом дня за допомогою нескладних математичних обчислень . Наприклад , прокинутись зранку , поснідати, повчити пари, зробити домашнє завдання, зробити додаткові заняття, відпочити, повечеряти і лягти спати . Так ми стежимо за часом і вчимося його правильно розподіляти .

3.Приготування їжі. Кожного дня ми готуємо їжу і в кожному рецепті є частина математики .Наприклад, на приготування панкейків потрібно: 250 мл молока;3 ст. ложки рослинного 40 гр масла; 1 яйце;4 ст. л. цукру; 1 ч. л. розпушувача; 1/4 ч. л. солі; 170 гр борошна.

4.Придбання одягу.Наприклад , щоб купити якусь кофту ми не будемо одразу бігти до продавця, а вдаючись ло математики згадаємо свій зріст щоб знати якого розміру брати річ.

5.Сімейний бюджет. Оплата комунальних, на харчування, на сімейне свято, на відпочинок, на подорожі і залишок.

6.Купівля продуктів. В магазині ми постійно вдаємось до математики купуючи продукти за списком: ковбаса 300 гр, молоко 2 л, 7 яблук, половину хлібу, яйця 20 шт.

7.Математика в професіях .

Бухгалтер. У цій професії математика просто необхідна. Бухгалтер нараховує зарплату, премію, обчислює податки.

Продавець. У цій професії математика потрібна для того, щоб рахувати гроші, продукти і товари що надійшли, кільксть продуктів, що залишилися.

Інженер. У цій професії випробовують матеріали для проектування міцних та безпечних конструкцій, використовуючи розрахунки міцності та щільності матеріалів.

8.Математика в здоров'ї. Практичне застосування математики використовується в онкології для розуміння мутації клітин та розробки лікувальних методів, які допомагають врятувати багато життів.

Важко уявити повсякденне життя без математики. Математика зустрічається у вирішенні побутових завдань, завдань економіки, наукових досліджень, сільського господарства, технічних питань. Вона потрібна викладачу, студенту, лікарю, домогосподарці, артисту і навіть художнику.

Отже, математика потрібна не тільки в певних професіях, а в повсякденному житті.

Література :

1. http://gymnasium59.org.ua/12276-chomu-potribno-vyvchaty-matematyku-9-argumentiv-dlya-batkiv-i-ditej/
2. https://ppt-online.org/157893
3. https://futurenow.com.ua/matematyka-v-zhytti-lyudyny/
4. https://www.superprof.com.ua/blog/rol-matematyky-v-zhytti-lyudyny/
5. https://naurok.com.ua/matematika-v-povsyakdennomu-zhitti-lyudini-86442.html

М. Брудна
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ НЕВИРІШЕНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

Відкриті (невирішені) математичні проблеми - це завдання, які розглядалися математиками, але досі невирішені. Вони часто мають форму гіпотез, які імовірно вірні, але потребують доведення.

У науковому світі популярна практика складання відомими вченими чи організаціями списків відкритих проблем, актуальних на сьогодні. Зокрема, відомими списками математичних проблем є:

- Проблеми Гільберта
- Проблеми Ландау
- Проблеми тисячоліття
- Проблеми Смейла

Згодом опубліковані проблеми такого списку можуть бути вирішені і, таким чином, втратити статус відкритих. Наприклад, більшість проблем Гільберта, представлених ним у 1900 році, на даний момент так чи інакше вирішено.

Отож наведемо деякі відкриті проблеми математики в різних її областях.

Теорія чисел.

- Проблема Гольдбаху. Чи кожне парне число, більше 2, можна представити у вигляді суми двох простих чисел?
- Чи безліч простих чисел-близнюків ?
- Гіпотеза Ердеша. Чи вірно, що якщо сума обернених величин для деякої множини натуральних чисел розбіжна, то в цій множині можна знайти скільки завгодно арифметичних прогресій ?

Геометрія:

- Задача про 9 кіл . Чи існує 9 кіл, таких, що кожні два перетинаються, і центр кожного кола лежить поза рештою кіл? (Час виконання перевірочного алгоритму – занадто великий).
- Чи на будь-якій замкнутій кривій Жордана на площині можна знайти чотири точки, які є вершинами деякого квадрата?
- Чи існує трикутник з цілими сторонами, медіанами та площею?

- У скільки разів об'єм неопуклого багатогранника може перевищувати об'єм опуклого багатогранника, складеного з тих самих граней?
- Чи існує точка, при розміщенні якої у будь-якій багатокутній кімнаті із дзеркальними стінами усі джерела світла світитимуть, щоб уся кімната виявилася освітленою?
- Чи можна розмістити вісім точок на площині так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій, ніякі чотири не лежали на одному колі та відстань між будь-якими двома точками була цілим числом? Рішення для сімох точок було знайдено в 2007 році.
- Гіпотеза Боннесена - Фенхеля. Яке тривимірне тіло постійної ширини має найменший об'єм?

Алгебра

- Чи є кільце періодів полем?
- Чи існують у безлічі груп операції, відмінні від операцій прямого та вільного множення і які мають їх основні властивості?
- Чи існує така лічильна група, що кожна група ізоморфна однією з її підгруп?
- Проблема відшукання всіх гіперкомплексних систем із розподілом не вирішена до кінця.

Аналіз.

- Чому дорівнює постійна Міллса ? Існуючі методи обчислення спираються ще на недоведену гіпотезу Рімана.
- Чи є будь-яке ірраціональне число алгебри нормальним?

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%B5_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D1%8B -cite_note-55Диференціальні рівняння

- Невідоме точне рішення рівняння ван дер Поля (воно ж осцилятор ван дер Поля).
- Відсутня загальна теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних змішаного типу.

Теорія ймовірностей

- Невідома точна аналітична формула для ймовірнісного розподілу площ фігур, що визначаються випадковими прямими на площині.

Література:

1. *Anciaux H., Guilfoyle B.* On Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem (англ.) // Proceedings of the American Mathematical Society. - Providence : American Mathematical Society , 2011. - Vol. 139, no. 5 . - P. 1831 - 1839 . - ISSN 0002-9939 . - Doi : 10.1090/S0002-9939-2010-10588-9 . arXiv : 0906.3217

Д. Матвіїв
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***Т.В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНИЙ МОДУЛЬ NUMPY PYTHON ДЛЯ КЕРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАМИ МАСИВІВ

NumPy - це математичний модуль мовного пакету програмування Python, який дозволяє обчислювати багатовимірні та одновимірні елементи масиву та керувати ними [1]. Він поставляється з високопродуктивним багатовимірним масивом, а також утилітами для роботи з ними. У 2005 році Тревіс Оліфант створив пакет NumPy, об'єднавши функції родового модуля Numeric з характеристиками іншого модуля Numarray. NumPy реалізує багатовимірні масиви та матриці, а також інші складні структури даних. Ці структури даних допомагають обчислювати масиви та матриці найбільш ефективним способом. NumPy дозволяє проводити математичні та логічні операції над масивами. Багато інших відомих пакетів Python, як наприклад pandas і matplotlib, сумісні з NumPy можуть використовувати його. Багато математичних процедур, які зазвичай використовуються в наукових обчисленнях, робляться швидкими та простими за допомогою NumPy, зокрема:

— множення вектора чи матриці на вектор чи матрицю;
— операції над векторами та матрицями на рівні елемента (тобто додавання, віднімання, множення та ділення на число)
— застосування функцій до вектора/матриці елемент за елементом (наприклад, степень, журнал і експоненція).
— NumPy має вбудовані функції для лінійної алгебри та генерації випадкових чисел.
— NumPy також спрощує множення матриці та зміну форми даних.
— багатовимірні масиви ефективно реалізуються за допомогою NumPy.
— масиви NumPy в Python надають можливості для інтеграції C, C++ та інших мов. Це також корисно для лінійної алгебри та генерації випадкових чисел, серед іншого. Масиви NumPy також можна використовувати для зберігання загальних даних у багатовимірному контейнері.

Він швидший, ніж стандартні масиви Python, які не мають попередньо скомпільованого коду C NumPy (попередньо скомпільований код — це файл заголовка, який скомпільовано у проміжну форму, яка швидше обробляється компілятором). Об’єкт масиву NumPy — це потужний N-вимірний об’єкт масиву з рядками та стовпцями. Масиви NumPy можна створити з вкладених списків Python, а також отримати доступ до їх елементів. Він відноситься до групи елементів, які є однаковими і доступні за допомогою індексування. Кожен елемент у ndarray має той самий розмір, що й блок пам’яті. Кожен запис у ndarray є об'єктом типу даних (званий dtype). Наприклад одновимірний масив NumPy має лише один вимір елементів. Це означає, що одновимірний масив NumPy повинен містити лише одне значення кортежу:

Багатовимірний масив NumPy може містити ряд значень кортежу:

Індексування чи доступ до індексу масиву в масиві NumPy можна зробити різними способами. Нарізання використовується для друку діапазону масиву. Вбудована функція зрізу використовується для створення об'єкта зрізу Python шляхом передачі йому параметрів start, stop і step. Розрізання масиву передбачає встановлення діапазону в новому масиві, який використовується для друку підмножини елементів вихідного масиву. Оскільки нарізаний масив містить підмножину елементів вихідного масиву, редагування вмісту змінює вміст вихідного масиву:

```
# Доступ до
імпорту елементів масиву numpy як np
val=np.array([1, 5, 2, 6])

# Індексація на основі нуля
print(val[1])
val_mul=np.array([(3, 4, 2, 5) ),(3, 6, 2, 4), (1, 5, 2, 6)])
print(val_mul[1][1])
```

Тут ми отримуємо доступ до 1-го значення індексу одновимірного масиву за допомогою запису val[1] і отримуємо доступ до значення у 2-му рядку та 2-му стовпці двовимірного масиву, оскільки масиви мають індексацію на основі нуля. Отримати доступ до значень у рядках і стовпцях, починаючи з 1-го рядка до 2-го рядка, записуючи «:2» як перший аргумент і аналогічним чином звертаючись до всіх значень, що відповідають цим рядкам, і мають стовпці від початку до 2-го можна реалізувати так:

```
#Доступ до діапазону елементів
#в масиві за допомогою нарізки
val_mul=np.array([(3, 4, 2, 5),(3, 6, 2, 4),(1, 5, 2, 6)])
slice_val = val_mul[:2, :2]
print («Перші 2 рядки та стовпці масиву\n», slice_val)
```

Значний практичний інтерес становить великий набір операцій з масивами,- транспонування, перетворення масиву в стовпець , застосування в технологіях штучного інтелекту [2] тощо.

Література

1. Яковенко А. Основи програмування: методичні вказівки до виконання комп'ютерних практикумів з дисципліни "Основи програмування". Основи програмування мовою Python / А. В. Яковенко. − Київ : НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського", 2017. − 87 с.
2. Гембара Т. Застосування технологій штучного інтелекту для сучасної педагогічної мобільності. Професійний розвиток педагога в умовах інтеграції до європейського освітнього простору: міжнародна академічна та професійна / професійно-педагогічна мобільність: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, 26 – 27 листопада 2021 року).- с.119-122.

Д. Цветков
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
*Науковий керівник **Чмир О.Ю.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПАРАЛЕЛЬНИЙ СВІТ

Терміни «паралельний всесвіт» й «альтернативна реальність», переважно є синонімами і можуть бути взаємозамінні. Однак, часом під терміном «альтернативна реальність» мається на увазі альтернатива в порівняно невеликих реаліях, тоді як фундаметальні закони чи загальні ознаки лишаються незмінними. Термін «паралельний всесвіт» є загальнішим, без будь-яких конотацій, що припускає зв'язок або відсутність відносин з нашим всесвітом. Всесвіт, де закони природи відрізняються – наприклад, в якому релятивістська швидкість світла може бути перевищена – буде в цілому паралельний всесвіт, але не альтернативна реальність. Правильне квантово-механічне визначення паралельних всесвітів – «всесвіти, які відокремлені один від одного на одну подію квантово». Конкретна група паралельних всесвітів називається «мультивсесвітом», хоча цей термін може бути також використаний для опису можливих всесвітів, які паралельно є фізичними реальностями.

Перші філософсько-наукові згадки про проблему паралельних світів можна зустріти ще в працях грецьких і римських філософів стародавнього часу. Так, на думку давньогрецьких атомістів (Левкіпп, Демокріт, Лукрецій), у безмежній порожнечі існує багато світів, серед яких і наш. Там, де атомів багато, вони притягуються одні до одних і найщільніша ділянка утворює землю, тварин і рослини. Інші атоми утворюють небо, повітря, небесні світила, душі живих істот. Атомісти поділяли думку про те, що одночасно з нашим існують інші світи, всі вони зароджуються, розвиваються і з часом помирають.

Інші світи часто розглядалися в контексті взаємовідносин мікрокосму і макрокосму – менші речі повторюють своєю будовою більші і ще менші. Гіпотеза про існування інших світів закріпилася у фантастиці завдяки англійському теологу Едвіну Ебботту. В 1884 році він видав книгу «Флатландія: роман у багатьох вимірах». У ній двовимірний розумний Квадрат подорожував по світах з різною кількістю вимірів. Крім того, Едвін Ебботт продемонстрував, що існування інших вимірів не відірвана від життя абстракція, а тема, яка містить глибоку філософську проблематику. Його однодумець – математик і містик Чарльз Гінтон, за чотири роки до того опублікував есе «Що таке четвертий вимір?». Він не тільки досліджував чотиривимірну геометрію, але і писав так звані «наукові романи» (нариси й оповідання на тему науки). Творчість Гінтона вплинула на Герберта Веллса, зокрема на фізичне обґрунтування переміщень в часі в «Машині часу» (1895). Пізніше Гінтон випустив ще кілька робіт, в яких фантазія перепліталася з науковою логікою: «Видобуття себе» (1904), «Четвертий вимір» (1904) і вільне продовження книги Ебботта «Епізод з життя

Флатландії, або Як плоский народ відкрив третій вимір» (1907). У них він першим описав тесеракт – чотиривимірний гіперкуб.

Хорхе Луїс Борхес в оповіданні «Сад з розгалуженими стежками» (1941) описав варіативність історії, де кожний вибір створює дві чи більше паралельних реальностей. В 1957 році випускник Прінстонського університету Г'ю Еверетт опублікував статтю, де обґрунтовував думку Борхеса, використовуючи сучасний науковий апарат. Фізик виходив з принципу «неповноти квантової механіки», сформульованого Ервіном Шредінгером. Суть принципу полягала в тому, що якщо ми не здійснюємо спостереження над часткою, то вона знаходиться в суперпозиції – змішуванні двох станів. При спостереженні ж відбувається «колапс хвильової функції», і один зі станів стає «справжнім». Виникає два Всесвіти, в одному з яких здійснюється один варіант розвитку подій, в іншому – інший. Таким чином, щомиті Всесвіт галузиться на різні свої версії внаслідок навіть найменших змін. Наукова спільнота не сприйняла цю гіпотезу, але вона знайшла розвиток як «еверетика» – світоглядна позиція, за якою всі можливі варіанти розвитку подій існують одночасно в паралельних світах. Така думка стала поширеною в фантастиці, особливо альтернативній історії.

У 2009 році британські вчені вперше в історії одержали наукові підстави серйозно розглядати існування паралельних світів. Учені з Лондонського університетського коледжу виявили вірогідні точки дотику нашого Всесвіту з іншими, невидимими оку Всесвітами, що стало першим не теоретичним підтвердженням «теорії струн», яка раніше тільки гіпотетично доводила існування паралельних світів. Відкриття було зроблене в ході вивчення розподілу в космосі реліктового мікрохвильового випромінювання, що збереглося після Великого вибуху, який, як вважається, дав початок нашому Всесвіту. Це випромінювання не є однорідним і містить особливі зони, що відрізняються підвищеною температурою.

Пізніше фізикам зі Стенфордського університету вдалося підрахувати можливу кількість паралельних Всесвітів. Для цього вони провели аналіз інфляції – різкого розширення космічного простору після Вибуху. В підсумку, їм вдалося встановити, що всього може існувати 10 в степені 10 в 10000000 Всесвітів.

Література:

2. Clifford A. Pickover (August 2005). Sex, Drugs, Einstein, and Elves: Sushi, Psychedelics, Parallel Universes, and the Quest for Transcendence (Discusses parallel universes in a variety of settings, from physics to psychedelic visions to Proust parallel worlds to Bonnet syndrome). Smart Publications. ISBN 1-890572-17-9.
3. Michio Kaku (2004). Parallel Worlds: A Journey Through Creation, Higher Dimensions, and the Future of the Cosmos. Doubleday. ISBN 0-385-50986-3.
4. Carr, Bernard (Hrsg.): Universe or Multiverse?. Cambridge University Press, 2007, ISBN 978-0-521-84841-1.

5. Adams, Fred: Leben im Universum, Stuttgart, Dt. Verl.-Anst., 2004.

6. Adams, Fred/Laughlin, Greg: Die fünf Zeitalter des Universums; Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart-München, 2000.

Х. Олексовська
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Науковий керівник ***О.М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ ЦІКАВІ ФАКТИ ПРО МАТЕМАТИКУ

Математика — серйозна точна наука, яку так само називають царицею всіх наук, за свою багатовікову історію існування вона накопичила безліч цікавих фактів. Наведемо деякі з них:

● Перша у світі жінка-математик жила ще за півтисячоліття до нашої ери в Стародавній Візантії і звали її Гіпатія.

● У перекладі з арабської «цифра» означає «нуль», але історично так склалося, що цим словом ми називаємо в принципі всі цифри.

● Наймістичнішим і оповитим легендами числом вважається 666 — число звіра і антихриста (назване так в одному з віршів книги Одкровення). З ним пов'язана велика кількість цікавих математичних фактів:

- Сума всіх чисел на рулетці дорівнює 666;
- У Європарламенті є крісло 666, але його за традицією ніхто не займає;
- У великої кількості об'єктів по всьому світу замінили число 666 на інше, у зв'язку з протестами вірян. Це стосується номерів шосейних трас, маршрутів громадського транспорту, телефонних кодів.

● Найдавніша математична праця була знайдена не на території Стародавнього Риму або Олександрії, а в Свазіленді, і являє собою кістку бабуїна з вибитими на ній рисками, її вік складає майже 40 000 років.

● Від'ємні числа аж до XIX століття майже не використовувалися, тому що їх вважали безглуздими і не застосовними. Однак вони мали попит у людей, які ведуть свої справи, для позначення фінансових збитків. Від'ємні числа так і з'явилися на початку XIII століття — італійський купець Пізано винайшов їх для того, щоб фіксувати свої борги.

● Релігійні євреї прагнуть уникати християнської символіки і взагалі знаків, схожих на хрест. Наприклад, учні деяких ізраїльських шкіл замість знака «плюс» пишуть знак, що повторює перевернуту букву «т».

● У перекладі з китайської «чотири» означає «смерть», тому число «4» відсутнє в нумерації будинків у багатьох китайських містах, а в ліфтах немає четвертого поверху.

● Італійці не люблять число 17. Це пішло з часів стародавнього Риму, коли на всіх надгробках писали напис «мене більше немає», який візуально мав вигляд «VIXI», тобто як римські цифри 6 і 11, які в сумі дають 17.

● Соціологічні опитування по всьому світу показали, що найбільша кількість людей вважає щасливим числом «7», друге за популярністю — «3». Такі результати не дивні, адже практично у всіх культурах і релігіях з найдавніших часів «7» пов'язане з позитивною енергетикою.

● Американський математик Джордж Данціг, бувши аспірантом університету, одного разу спізнився на урок і прийняв написані на дошці рівняння за домашнє завдання. Воно здалося йому складніше звичайного, але через кілька днів він зміг його виконати. Виявилося, що він вирішив дві «нерозв'язані» проблеми в статистиці, над якими билися багато вчених.

● Числа, які однакові в обох напрямках (наприклад, 12321) називають паліндромами.

● Деякі числа нескінченної послідовності числа ПІ мають імена вчених. Наприклад, відрізок «999999» названий на честь американського фізика Річарда Фейнмана, який вивчив всі числа після коми до дев'яток, щоб в кінці вимовити «9» шість разів.

● Найбільшим числом у світі вважається центильйон, він має 600 нулів.

● Найменше число, відкрите на сьогодні, навіть не має назви, а являє собою десятковий дріб, у якого після коми і перед одиницею стоїть 100 мільйонів трильйонів трильйонів трильйонів нулів. Воно не застосовується в прикладній математиці і використовується вченими для того, щоб обчислити ймовірність появи нового Всесвіту з атома.

● Десятинна система обчислення почала використовуватися через наявність всього 10 пальців на руках.

● У 1900 році всі математичні результати можна було вмістити в 80 книгах.

● Слово «алгебра» має однакову вимову на всіх мовах світу.

● Сумою всіх чисел від 1 до 100 буде 5050.

● Англійський математик Абрахам де Муавр в літньому віці одного разу виявив, що тривалість його сну щодня зростає на 15 хвилин. Склавши арифметичну прогресію, він визначив дату, коли вона досягла б 24 годин — 27 листопада 1754 року. У цей день він і помер.

Література:

2. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

ЗМІСТ