

**ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ
ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ**



ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ
*XII Всеукраїнської науково-практичної
конференції
курсантів та студентів*



**МАТЕМАТИКА, ЩО НАС
ОТОЧУЄ:
МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ,
МАЙБУТНЄ**
Львів 2025

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

д.т.н., професор	Василь Попович
к.ф.-м.н., доцент	Ольга Меньшикова
д. фіз.-мат. н., професор	Роман Тацій
к. т. н., доцент	Тарас Гембара
д.т.н., професор	Лідія Дзюба
к. фіз. -мат. наук, доцент	Оксана Карабин
к. пед. наук, доцент	Мирослава Кусій
к. фіз. -мат. наук, доцент	Оксана Трусевич
к. фіз. -мат. наук, доцент	Оксана Чмир
	Іванна Сов'як
	Інна Шевчук

**ОРГАНІЗАТОР
ТА ВИДАВЕЦЬ**

Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

ЛДУБЖД, вул. Клепарівська, 35
м. Львів, 79007

контактні телефони:

(032)233-24-79
тел/факс 2330088

Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє:

Зб. наук.праць XII Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. – Львів:
ЛДУБЖД, 2025 -231 с.

Збірник сформовано за матеріалами XII Всеукраїнської конференції курсантів
та студентів «**Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє**».

Збірник містить матеріали таких тематичних секцій:

- Математичні відкриття, що змінили світ
- Прикладні задачі в математиці
- Історія математики
- Математика і сучасність
- Постаті в математиці

© ЛДУБЖД 2025

За точність наведених фактів, економікостатистичних та інших даних, а також
за використання відомостей, що не рекомендовані до відкритої публікації,
відповідальність несуть автори опублікованих матеріалів. При
передруковуванні матеріалів посилання на збірник обов'язкове.

СЕКЦІЯ 1. Прикладні задачі в математиці

А.А. Ковальський

НТУ «ХПІ», м. Харків

Науковий керівник: Г.Я. Тулученко, доктор технічних наук, професор

ВИКОРИСТАННЯ АЛОМЕТРИЧНОГО ПОКАЗНИКА ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ АДАПТИВНОЇ ГНУЧКОСТІ СИГМОЇДАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ПІДГОНКИ КРИВИХ

Апроксимація емпіричних даних за допомогою математичних моделей є фундаментальною задачею в багатьох наукових дисциплінах, включаючи біологію, екологію, економіку, епідеміологію та інженерію. Часто дані демонструють нелінійну, сигмоїдальну (S-подібну) динаміку, яка описує процеси росту, насичення або поширення. Стандартні сигмоїдальні функції, такі як логістична крива, мають обмежену гнучкість через фіксовані властивості симетрії або положення точки перегину. Це може призводити до недостатньо точного опису реальних процесів, які часто демонструють асиметричну поведінку. Виникає потреба в розробці та застосуванні більш гнучких модельних функцій, здатних адаптуватися до різноманітних патернів даних. Одним із перспективних підходів до підвищення гнучкості є введення додаткових параметрів, що контролюють форму кривої, зокрема, параметрів, що відображають алометричні відношення [1-2].

Термін "алометрія" традиційно використовується в біології для опису нерівномірного росту частин організму відносно цілого або зміни пропорцій зі зміною розміру. У математичному моделюванні концепцію алометрії узагальнюють, вводячи в модельну функцію алометричний параметр – інструмент для модифікації форми кривої. Ключова ідея полягає в тому, що алометричний параметр дозволяє змінювати співвідношення між різними фазами процесу, описаного моделлю. У випадку сигмоїдальних кривих, він найчастіше впливає на асиметрію кривої та положення точки перегину. Стандартна логістична крива є симетричною відносно своєї точки перегину. Алометричний параметр дозволяє моделювати процеси, де фаза прискореного росту відрізняється за тривалістю або інтенсивністю від фази уповільнення росту. Точка перегину відповідає максимальній швидкості процесу. Введення алометричного параметра дозволяє зміщувати цю точку відносно середини між нижньою та верхньою асимптотами, що краще відображає реальність багатьох процесів, де пік швидкості не знаходиться рівно посередині.

Прикладом може слугувати узагальнена крива Річардса:

$$y(t) = A + \frac{K - A}{\left(1 + Q \cdot \exp(-B \cdot (t - M))\right)^{1/\nu}}, \quad (1)$$

де $y(t)$ – значення залежної змінної в час t ; A – нижня асимптота (початковий рівень); K – верхня асимптота (рівень насичення, ємність середовища); B – параметр, пов'язаний зі швидкістю росту; M – параметр, пов'язаний з часом досягнення точки перегину; Q – параметр, пов'язаний з початковим значенням $y(0)$ відносно асимптот A і K ; ν – алометричний параметр (параметр форми), що надає моделі Річардса значну гнучкість.

Коли $\nu = 1$, крива (1) зводиться до кривої Ферхюльста. Відносну якість статистичних моделей для заданого набору даних можна оцінювати, наприклад, за допомогою інформаційного критерію Акаїке (AIC) [3].

Якщо дані демонструють явну асиметрію, тоді модель Річардса забезпечить значно кращу підгонку. Сума квадратів відхилень (RSS) для моделі Річардса (1) буде суттєво меншою за RSS для логістичної кривої Ферхюльста. Якщо зменшення RSS є достатньо великим, щоб доданок $n \cdot \ln(RSS / n)$ для моделі Річардса зменшився більше, ніж на 2 одиниці порівняно з логістичною моделлю, тоді AIC віддасть перевагу складнішій моделі Річардса. Число 2 відповідає штрафу моделі Річардса за складність порівняно з моделлю Ферхюльста і розраховується за формулою AIC.

За допомогою модельної функції (1) була описана експериментальна залежність з роботи [4]. Окремо відзначимо, що оптимальні значення коефіцієнтів функції (1) при цьому зберегли фізичний зміст на відміну від результатів апроксимації, які отримані в першоджерелі.

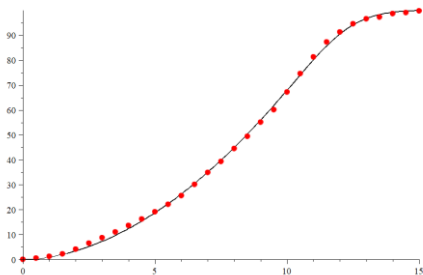


Рисунок 1 – Приклад наближення експериментальної залежності з роботи [4]

Отже, незважаючи на потенційні виклики, пов'язані зі складністю оцінки параметрів моделі, переваги у вигляді покращеної точності опису та ширшої застосовності роблять використання алометричних показників цінним інструментом для дослідників у різних галузях науки.

Література

1. Tjørve, E., Tjørve, K. M. C. (2017). The use of Gompertz and Richards functions in modelling growth – A critical review. *Communicatio Pannonica, Series Oeconomica*, 5(1), 49-63.

2. Birch, C. P. D. (1999). A new generalized logistic sigmoid growth function compared with the Richards growth function. *Annals of Botany*, 83(6), 713–723.
3. Burnham, K. P.; Anderson, D. R. (2004). Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection. *Sociological Methods & Research*, 33: 261-304, doi:10.1177/0049124104268644.
4. Wang J. et al. (2022). Influence of Soil Wetting and Drying Cycles on Soil Detachment. *AgriEngineering*, 4, 2, 533–543, doi: 10.3390/agriengineering4020036.

А.В. Братасюк, А.В. Малаш, В.Д. Скубаков

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник **Н.Б. Сокульська**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОРМИ КРИЛА БПЛА

Використання комплекснозначних функцій для оптимізації форми крила БПЛА – це досить складний процес, який вимагає глибоких знань в аеродинаміці та математичному моделюванні. Але має місце наступний узагальнений опис процесу.

Перш за все форму крила можна зобразити у вигляді комплекснозначної функції $z(t) = x(t) + iy(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – координати точок профілю крила, а t – параметр, що визначає положення точки на профілі. До прикладу, для еліптичного профілю: $x(t) = acost$, $y(t) = bsint$, де a і b – півосі еліпса. Для крил складної форми використовуються чисельні методи, але комплекснозначні функції все одно застосовуються для побудови початкового наближення та інтерпретації результатів

Щоб проаналізувати аеродинамічні характеристики крила, використовують комплекснозначні функції потенціалу швидкості $\Phi(z)$ і функції струму $\Psi(z)$. Ці функції дозволяють визначити розподіл швидкості та тиску на поверхні крила, що є особливо важливими при аналізі обтікання крила БПЛА. Вони дозволяють математично описати потік повітря навколо крила, враховуючи як швидкість, так і напрямок руху повітря. Потенціал швидкості $\Phi(z)$ - скалярна функція, градієнт якої дає вектор швидкості потоку, а функція струму $\Psi(z)$ - скалярна функція, лінії рівня якої є лініями струму потоку. Їх об'єднує так званий комплексний потенціал

$$W = \Phi(z) + i\Psi(z).$$

Останній дозволяє зручно описувати двовимірні потенційні потоки, тобто потоки, в яких немає вихорів і в'язкості, комплексну швидкість $V = dW/dz$, $z = x + iy$ - комплексна координата; розподіл швидкостей $|V| = |dW/dz|$, розподіл тиску $p = p_0 - \frac{\rho}{2}|V|^2$, де p_0 - тиск у нескінченності, ρ – щільність повітря.

Крім того, за допомогою формул, що включають інтеграли від комплекснозначних функцій знаходять коефіцієнт підйомної сили C_L (тобто відношення підйомної сили, яка утворюється корпусом-носієм до густини потоку довкола тіла, швидкості потоку і відповідної умовної площі поверхні) та коефіцієнт опору C_D (безрозмірний емпіричний коефіцієнт, який входить у формулу для сили лобового опору твердого тіла; для квадратичної ділянки опору C_D залежить тільки від форми тіла й швидкості його поверхні, а також від положення цього тіла в

потоці). Зокрема, для розрахунку розподілу швидкостей використовують перетворення Жуковського

$$z = \zeta + \frac{R^2}{\zeta},$$

де z – комплексна площина крила, а ζ – комплексна площина кола, R – його радіус.

Оскільки метою оптимізації є знаходження форми крила, яка забезпечує максимальну підйомну силу при мінімальному опорі, то для цього використовують такі методи, як генетичні алгоритми або методи градієнтного спуску. Вони дозволяють змінювати параметри комплекснозначної функції $z(t)$ та оцінювати аеродинамічні характеристики крила на кожному кроці. В той же час, функція цілі може бути зображена у вигляді:

$$F = \frac{C_L}{C_D},$$

де F – функція цілі, яку потрібно максимізувати.

Разом з тим, для більш точного аналізу аеродинамічних характеристик крила використовують методи обчислювальної гідродинаміки (CFD), які дозволяють розв'язувати рівняння Нав'є-Стокса, що описують рух повітря навколо крила. Але вони вимагають великих обчислювальних ресурсів, забезпечуючи при цьому високу точність результатів.

Важливо зауважити, що

- при оптимізації форми крила необхідно враховувати різні фактори, такі як швидкість польоту, кут атаки та умови експлуатації БПЛА;
- використання комплекснозначних функцій дозволяє ефективно зображати та аналізувати складні форми крила;
- сучасні програмні засоби для CFD-аналізу та оптимізації дозволяють автоматизувати процес вибору оптимальної форми крила.

Таким чином, комплекснозначні функції відіграють надзвичайно важливу роль в аеродинаміці, особливо при аналізі двовимірних потенційних потоків. Крім того, вони є потужним інструментом для аеродинамічного дизайну літальних апаратів, адже дозволяють інженерам аналізувати та оптимізувати форму крила для досягнення максимальної ефективності та безпеки. Тому вивчення елементів комплексного аналізу є вкрай важливим компонентом підготовки майбутніх фахівців цієї галузі в умовах сучасної збройного конфлікту та динамічних змін засобів та прийомів ведення військових дій.

Д.А. Гусак, М.М. Черпака

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник **Н.Б. Сокульська**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ПРИКЛАД МОДЕЛІ ВОГНЕВОГО БОЮ

Вогневий бій можна розглядати як систему, у якій відбувається випадковий процес з численними групами однорідних засобів ураження. Тому тут є можливість застосувати методу динаміки середніх, для якого $X_k(t)$ – випадкова величина – чисельність елементів системи, що перебувають у момент часу t у стані $E_k = 1, 2, \dots, n$. Якщо кількість елементів N системи стала, то $X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t) = N$ і $m_k(t) = Np_k(t)$ – її математичні сподівання, $D_k(t) = Np_k(t)(1 - p_k)$ – її дисперсії, $\sigma_k(t) = \sqrt{D_k(t)}$ – середньоквадратичні відхилення.

Нехай перша сторона має до початку бою N_1 однорідних вогневих засобів, а друга – N_2 . Кожен вогневий засіб може перебувати лише у двох станах: вогневий засіб веде вогонь або вогневий засіб уражено. Інтенсивність потоків ефективних стрілів окремих вогневих засобів сторін відповідно рівні Λ_1 і Λ_2 . Величини Λ_1 і Λ_2 визначають через скорострільність λ_1 і λ_2 та ймовірності p_1 і p_2 ураження за умови одного пострілу відповідно:

$$\Lambda_1 = \lambda_1 p_1 \text{ та } \Lambda_2 = \lambda_2 p_2.$$

Потоки ефективних пострілів вважатимемо пуассонівськими.

Вогневий бій розглядається як дискретний марковський процес з неперервним часом. Дана система складається з двох груп однорідних елементів, які взаємодіють між собою, кожен з яких при цьому може перебувати в одному з двох станів.

Оскільки інтенсивності потоків $\lambda_{12}^{(1)}$ і $\lambda_{12}^{(2)}$ у цій моделі залежать від випадкових кількостей досі незнищених вогневих засобів $X_1(t)$, $X_2(t)$ у будь-який момент часу t , то для знаходження $\lambda_{12}^{(1)}$ і $\lambda_{12}^{(2)}$ застосуємо наступний метод.

Сумарний потік, що визначає перехід елементів – вогневих засобів першої сторони зі стану E_1 у стан E_2 має вигляд

$$U_{\Sigma} = X_2 \Lambda_2.$$

Середня інтенсивність потоку, що відповідає одному неураженому вогневому засобу першої сторони

$$U_{\Sigma} = \frac{X_2 \Lambda_2}{X_1}.$$

Замінивши випадкові величини $X_1(t)$, $X_2(t)$ їх середніми значеннями m_1 та m_2 , отримаємо $\lambda_{12}^{(1)} = \frac{m_2}{m_1} \Lambda_2$. Аналогічно $\lambda_{12}^{(2)} = \frac{m_1}{m_2} \Lambda_1$.

Рівняння для визначення середньої кількості вогневих засобів, що перебувають у стані E_1 , і вогневих засобів, що перебувають у стані S_1 (ще не знищених вогневих засобів), матимуть вигляд відповідно

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = -m_2 \Lambda_2; \\ \frac{dm_2}{dt} = -m_1 \Lambda_1. \end{cases}$$

Початкові умови: $t = 0$; $m_1 = N_1$; $m_2 = N_2$.

Рівняння для визначення середньої кількості вогневих засобів у стані E_2 , і вогневих засобів, що перебувають у стані S_2 складати немає необхідності, адже $m_1 + r_1 = N_1$; $m_2 + r_2 = N_2$, де r_1 і r_2 – відповідно середні втрати вогневих засобів сторін.

Таку модель називають моделлю вогневого бою типу А, і вона є одним з найпростіших варіантів вогневого бою [1].

Для отримання результатів у зручній для практичного застосування формі переходять до середніх відносних величин:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}; \quad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}.$$

Дані величини вказують зміну середніх укомплектованостей сторін у ході бою. У випадку, коли Λ_1 і Λ_2 - сталі, матимемо $\alpha = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$; $\bar{t} = \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t$.

Величину α називають показником (коефіцієнтом) переваги однієї сторони над іншою, $\bar{t}$ – узагальненим часом.

Якщо $\alpha > 1$, то перша сторона перевершує другу за вогневими можливостями, якщо $\alpha < 1$ – навпаки, а якщо ж $\alpha = 1$ – противники рівні.

Важливо зазначити, що α визначає співвідношення можливостей вогневих засобів сторін, зважаючи на їх чисельність і якісні показники.

Використавши введені позначення і розв'язавши вище наведені рівняння,

отримаємо
$$\begin{cases} \mu_1 = \text{ch} \bar{t} - \frac{1}{\alpha} \text{sh} \bar{t}; \\ \mu_2 = \text{ch} \bar{t} - \alpha \text{sh} \bar{t}. \end{cases}$$

Величина α , обчислена таким чином, вказує на сильнішу за вогневими можливостями сторону. Якщо, наприклад, $\alpha > 1$, то перша сторона сильніша за другу і для будь-якого моменту часу t у ході бою матиме місце $\mu_1 > \mu_2$. Більш того,

різниця $\mu_1 - \mu_2$ лише зростатиме з часом. Середні кількості збережених вогневих засобів для будь-якого моменту часу t відповідно дорівнюватимуть цілим частинам від добутків $\mu_1 N_1$; $\mu_2 N_2$.

Література

1. Методи моделювання бойових дій військ (сил): навч. посіб. / [Т. П. Пащенко, С. А. Микусь, В. Г. Солонніков та ін.]. – К.: НУОУ ім. Івана Черняхівського, 2021. – 272 с.

Х.А. Бать, П.В. Пилип

Львівський національний університет імені Івана Франка

*Науковий керівник: Л.Ю. Фірман, старший викладач кафедри вищої математики
механіко-математичного факультету*

МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЕЧНИХ МАРШРУТІВ ДРОНІВ У БОЙОВИХ УМОВАХ НА ОСНОВІ МУРАШИНИХ АЛГОРИТМІВ

У сучасній бойовій роботі дедалі частіше використовуються безпілотні літальні апарати — дрони, які виконують розвідку, коригування вогню, доставку вантажів або ударні операції. Одним із ключових факторів ефективності дронів є здатність безпечно досягати цілі, уникаючи зон ризику: засобів протиповітряної оборони (ППО), радіоелектронної боротьби (РЕБ), рельєфу та інших перешкод. Планування такого маршруту є складною математичною задачею, і для розв'язання можна застосувати мурашині алгоритми.

Алгоритм мурашиної колонії (АМК) заснований на моделюванні поведінки мурах, які шукають найкоротший шлях до їжі, залишаючи феромонні сліди [1]. Чим ефективніший маршрут, тим більше мурах ним користується, і тим більше феромону на ньому залишається. Цей природний механізм покладено в основу математичної моделі, де точки маршруту розглядаються як вузли графа, а переходи між ними — як ребра з певною "вагою".

У плануванні маршруту дрона феромон асоціюється з успішністю використання певної траєкторії. Так, якщо в зоні активна РЕБ або там зафіксовано роботу ППО — вага ребра знижується. Якщо шлях безпечний — феромон підсилюється. Таким чином, модель з кожною новою спробою навчається знаходити найоптимальніших шлях.

Ймовірність вибору шляху з точки i в точку j розраховується за формулою [2]:

$$P(i, j) = \frac{[T(i, j)]^\alpha * [N(i, j)]^\beta}{\sum [T(i, k)]^\alpha * [N(i, k)]^\beta},$$

де $T(i, j)$ — кількість феромону, $N(i, j)$ — евристична оцінка привабливості (або небезпеки), α і β — коефіцієнти впливу феромону й евристики. Значення $N(i, j)$ може враховувати розвіддані, супутникові знімки, погодні умови та поточну карту загроз.

Побудований маршрут формується заздалегідь або пропонується операторам як оптимальний варіант. АМК дозволяє сформулювати такий маршрут швидко, адаптивно та з урахуванням багатьох змінних.

У ситуації, коли операторам потрібно провести дрон із точки А в точку В, то пряма лінія проходить через зону активного РЕБ. Алгоритм АМК генерує десятки варіантів маршрутів, симулює їх, враховуючи загрози, та обирає той, що забезпечує

найменший ризик. У результаті оператори отримують оптимальний маршрут, який можна реалізувати вручну або завантажити в навігаційну систему дрона.

Математичні моделі на основі АМК дозволяють не лише знаходити короткий шлях, а й адаптуватися до змін — переміщення ворога, погіршення погодних умов чи зміни рельєфу. Це робить мурашиний алгоритм хорошим інструментом у сучасній бойовій роботі.

Таким чином, традиційне управління дроном у бойових умовах має ряд недоліків: обмежену швидкість реагування операторів на загрози, вразливість до РЕБ і ППО, та інші. Це ускладнює виконання завдань і збільшує ризик втрати апарата.

У той же час, використовуючи мурашиний алгоритм оператори зможуть швидше та ефективніше будувати оптимальні маршрути, враховуючи загрози та змінні умови. Алгоритм допоможе швидко адаптуватись до нових даних, мінімізувати ризики та підвищити ефективність дронів. Тому ми рекомендуємо застосування мурашиних алгоритмів для планування безпечних маршрутів у бойових умовах.

Література

1. MedicineNet: definition of pheromone.
URL: <https://web.archive.org/web/20110728094758/http://www.medterms.com/script/main/art.asp?articlekey=12896>
2. Dorigo M., Stützle T. Ant Colony Optimization. — MIT Press, 2004.
3. Blum C. Ant colony optimization: Introduction and recent trends. Physics of Life Reviews, 2005.
4. Бать Х.А. Мурашині алгоритми. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2024.

С.С. Плотиця Т.Б. Гошко

ЛНУ ім. Івана Франка, факультет прикладної математики та інформатики.

Науковий керівник: Л.Ю. Фірман, старший викладач кафедри вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДОРОЖНЬОГО РУХУ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ АВАРІЙНОСТІ

Щороку у світі внаслідок дорожньо-транспортних пригод (ДТП) гине близько 1,35 мільйона людей, а ще десятки мільйонів зазнають травм різного ступеня тяжкості. В Україні, за даними Національної поліції, лише у 2023 році сталося понад 150 тисяч ДТП, з яких майже 20 тисяч – з потерпілими. Основними причинами аварій залишаються перевищення швидкості, недотримання дистанції, порушення правил маневрування та керування транспортним засобом у нетверезому стані.

Впровадження автоматизованих систем контролю дорожнього руху, зокрема відеоаналітики, систем розпізнавання номерних знаків, датчиків швидкості та інтелектуальних транспортних систем (ITS), сприяє виявленню порушень, аналізу транспортних потоків, зниженню навантаження на дорожню інфраструктуру та підвищенню безпеки на автомагістралях.

Статистичні дослідження свідчать, що впровадження камер фіксації порушень та розумних світлофорів значно скорочує кількість випадків недотримання правил дорожнього руху (ПДР). Разом з тим, автоматизований контроль допомагає зменшити затори та сприяє рівномірному розподілу транспортних потоків.

Для оцінки інтенсивності транспортного потоку використовується рівняння:

$$q = k * v \quad [2]$$

де q – інтенсивність потоку (автомобілів за годину), k – щільність потоку (автомобілів на кілометр), v – середня швидкість потоку (км/год).

Для визначення оптимальної швидкості руху застосовується рівняння:

$$v_{opt} = \frac{v_{max}}{2} \quad [4]$$

де v_{max} – максимальна допустима швидкість на ділянці дороги.

Для моделювання динаміки дорожнього руху використовується рівняння Лайтгілла–Візерса–Річардса (LWR-модель):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (kv)}{\partial x} = 0 \quad [3]$$

де k – щільність потоку, v – швидкість, x – координата вздовж дороги, t – час.

Значення постійної часу T_1 , яка характеризує інерційність водія, залежно від величини щільності транспортного потоку, представлено виразом:

$$T_1 = \frac{70 \cdot t_1}{N \cdot l_a \cdot \sigma_a \cdot L \cdot v} \quad [1]$$

де t_1 – час реакції водія на зміну дорожньої ситуації (0,6–1,4 с); N – кількість автомобілів на контрольованій ділянці; l_a – довжина автомобіля (м); σ_a – середньоквадратичне відхилення прискорення автомобілів (м/с²); L – довжина контрольованої ділянки (1000 м); v – швидкість автомобілів (м/с).

Значення постійної часу T_2 , яка характеризує інерційність автомобіля, представлено формулою:

$$T_2 = \frac{1000 \cdot M \cdot l_a}{N \cdot t_2 \cdot N_e} \quad [1]$$

де M – маса автомобіля (кг); N_e – номінальна потужність двигуна (Вт); t_2 – час на маневр (с).

Значення постійної часу, що характеризує інерційність зміни дорожньої ситуації, наведено формулою:

$$T_3 = \frac{5 \cdot t_3}{n \cdot t_2^2} \quad [1]$$

де n – кількість смуг руху; t_3 – сумарний час затримок під час руху (с).

Основними викликами залишаються забезпечення точності даних, інтеграція з існуючими системами управління трафіком та дотримання етичних норм у використанні персональних даних.

Підсумовуючи вище наведене, вважаємо що, автоматизовані системи контролю дорожнього руху відіграють ключову роль у підвищенні безпеки на дорогах. Впровадження таких систем дає змогу ефективно попереджувати порушення ПДР, оптимізувати транспортні потоки та зменшувати кількість ДТП. Подальший розвиток таких технологій сприятиме створенню безпечнішого та ефективнішого дорожнього середовища.

Література

1. Дослідження математичної моделі стійкості транспортного потоку на ділянках вулично-дорожньої мережі міста при зміні зовнішніх факторів: https://mapiea.kntu.kr.ua/pdf/8%2839%29_I/23.pdf
2. Traffic Flow Theory, Speed-Flow-Density Relationship: https://www.webpages.uidaho.edu/niatt_labmanual/chapters/trafficflowtheory/theoryandconcepts/SpeedFlowDensityRelationship.htm?utm_source
3. Traffic flow: the Lighthill-Whitham-Richards model: https://faculty.washington.edu/rjl/riemann_book/Traffic_flow.html
4. A Review Analysis of Optimal Velocity Models: <https://pp.bme.hu/tr/article/download/8753/7022>
5. Комп'ютерне моделювання ДТП: експерти КНДІСЕ розповіли, як цей тип досліджень допомагає встановити усі обставини аварій: <https://unn.ua/news/kompiuterne-modeliuvannia-dtp-eksperty-kndise-rozpovily-yak-tsei-typ-doslidzhen-dopomahaie-vstanovyty-usi-obstavyny-avarii>.

Д.В. Гандзюк, В.Т. Кузь, С.Р. Лях

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник **Н.Б. Сокульська**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ЗАСОБАХ РАДІОЕЛЕКТРОННОЇ БОРОТЬБИ

Радіoeлектронна боротьба (РЕБ) – критично важлива складова сучасних військових операцій. Ефективність засобів РЕБ значною мірою залежить від точності аналізу та обробки радіoeлектронних сигналів. Останній дозволяє швидко та надійно виявляти джерела радіовипромінювання, такі як радары, системи зв'язку та навігації. Ідентифікація типу сигналу (наприклад, радарний, комунікаційний) та його характеристик (частота, потужність, модуляція) є надзвичайно важливою для вибору ефективних методів протидії.

Для визначення параметрів сигналів потрібно точні вимірювання частоти, потужності, напрямку, які дозволяють ефективно створювати перешкоди, що порушують роботу ворожих систем. Зокрема, для ефективного глушіння радара необхідно точно визначити його робочу частоту та діапазон. Такий аналіз дозволяє виявляти спроби ворога створити перешкоди та вживати заходів для захисту власних систем. Для цього необхідно швидко та точно виявляти та ідентифікувати сигнали управління та навігації БПЛА для ефективної протидії.

Комплексні числа відіграють важливу роль у радіoeлектронній боротьбі, оскільки вони дозволяють ефективно описувати та аналізувати радіoeлектронні сигнали. З їх допомогою отримується інформація про амплітуду та фазу сигналу, спрощуються математичні операції з сигналами, такі як додавання, віднімання, множення та ділення. Комплексні числа використовуються для аналізу спектральних характеристик сигналів за допомогою перетворення Фур'є, спрощуючи, таким чином, розвинення на спектри. А також з їх допомогою проектується і реалізується цифрова фільтрація радіочастот, що дозволяє виділяти або пригнічувати певні компоненти сигналу.

Отож, радіoeлектронні сигнали зручно зображати у вигляді синусоїдального сигналу

$$s(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)},$$

де: $s(t)$ – комплексний сигнал у момент часу t , A – амплітуда сигналу, ω – кутова частота сигналу, φ – початкова фаза сигналу, i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$), яке спрощує математичні операції.

Далі комплексні числа використовуються для моделювання характеристик радіoeлектронних компонентів, таких як антени та підсилювачі, дозволяючи

аналізувати їх поведінку та оптимізувати параметри на основі аналізу спектральних характеристик (перетворення Фур'є)

$$S(f) = \int s(t) \cdot e^{-2\pi i f t} dt,$$

де $S(f)$ – спектральна складова сигналу на частоті f , $s(t)$ – сигнал у часовій області. Це перетворення дозволяє розкласти сигнал на його частотні компоненти, що дозволяє, зрештою, виявляти та ідентифікувати ворожі сигнали.

Крім того, у вигляді комплексних функцій зображуються і цифрові фільтри, що використовуються в РЕБ:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{i\theta(f)},$$

де $H(f)$ – комплексна функція передачі фільтра, $|H(f)|$ – амплітудна характеристика фільтра, $\theta(f)$ – фазова характеристика фільтра. Їх робота полягає у виділенні корисних сигналів з шуму або пригніченні сигналів противника.

Для формування променів у фазованих антенних решітках використовуються комплексні вагові коефіцієнти:

$$w_n = a_n \cdot e^{i\varphi_n},$$

де w_n – комплексний ваговий коефіцієнт для n -го елемента решітки, a_n – амплітуда сигналу для n -го елемента, φ_n – фаза сигналу для n -го елемента.

Керуючи амплітудою та фазою сигналів, що випромінюються окремими елементами решітки, можна формувати промені з заданою діаграмою спрямованості.

Отож, комплексні числа в системі РЕБ допомагають моделюванню та аналізу сигналів перешкод, генерації перешкод з заданими характеристиками, класифікації та аналізу сигналів перешкод, цифровій обробці сигналів (ЦОС), зокрема, фільтрації, спектральному аналізу; формуванню діаграми спрямованості антен таких, як розрахунок фазових зсувів для її формування, адаптивне формування діаграми для придушення перешкод; пеленгації джерел випромінювання: визначення напрямку на джерело за фазовими вимірюваннями, інтерферометрична пеленгація.

При аналізі радіолокаційних сигналів комплексні числа використовуються для визначення дальності та швидкості цілі.

При глушінні радіоелектронних систем комплексні числа використовуються для формування сигналів перешкод, які порушують роботу ворожих систем.

У засобах радіоелектронної розвідки, комплексні числа застосовуються для точного виявлення та визначення характеристик сигналів противника.

Таким чином, комплексні числа є потужним математичним інструментом, який широко використовується в засобах РЕБ для аналізу, обробки та формування радіоелектронних сигналів.

Подальший розвиток алгоритмів ЦОС на основі комплексних чисел сприятиме підвищенню ефективності засобів РЕБ.

П.О. Марусов

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного
Науковий керівник Х.І. Ліщинська, кандидат технічних наук, професор кафедри
інженерної механіки (ОТІВ)*

ТЕОРІЯ ВУЗЛІВ: ВІД МАТЕМАТИЧНОЇ АБСТРАКЦІЇ ДО БІОТЕХНОЛОГІЧНИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Всі знають, як зав'язувати вузли у мотузках, але що ж таке математичний вузол і чим він відрізняється від звичайного?

Теорія вузлів виникла в XIX столітті як галузь математичної топології, коли математики почали досліджувати формальні властивості «ідеальних» вузлів – абстрактних об'єктів, що відрізняються від звичайних вузлів у мотузках своєю замкнутістю та математичною строгістю. У цій теорії вузол – це гладкий замкнутий контур в просторі, який не перетинає сам себе. Центральним питання теорії є визначення можливості перетворення одного вузла на інший без розрізання, що спричинило розвиток складних математичних методів і концепцій.

Особливу роль у теорії вузлів відіграють інваріанти – математичні величини, що залишаються незмінними при деформаціях. Серед найважливіших інваріантів можна виділити поліном Джонса, відкритий у 1984 році, який став потужним інструментом для розрізнення вузлів, що раніше вважалися ідентичними. Класифікація вузлів залишається однією з ключових проблем цієї галузі, де прості форми (як трилисник або вісімка) добре вивчені, але складніші конфігурації залишаються предметом активних досліджень.

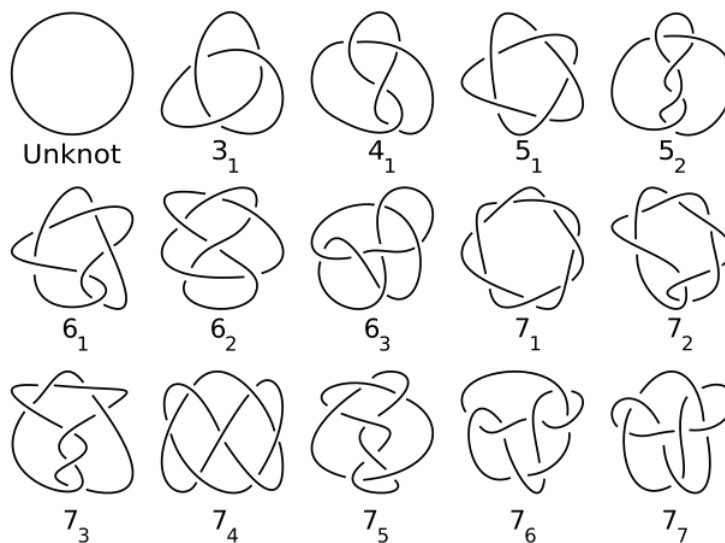


Рис. 1. Прості вузли з сімома або менше перетинами без дзеркальних варіантів

Новий етап розвитку теорії пов'язаний із вивченням зачеплень – систем з кількох взаємопов'язаних вузлів. Це стало поштовхом до створення нових математичних конструкцій, які знайшли несподіване застосування у фізиці елементарних частинок.

Проте найбільш вражаючим є практичне застосування теорії вузлів у біології та нанотехнологіях. У дослідженні ДНК вона стала незамінним інструментом для розуміння процесів суперспіралізації та топологічної організації генетичного матеріалу. Молекули ДНК у клітинах постійно піддаються скручуванню і заплутуванню, а ферменти топоізомерази, які діють за принципами, подібними до математичних операцій з вузлами, забезпечують їх правильне функціонування. Дослідження 1980-х років показали, що моделювання ДНК за допомогою теорії вузлів дозволяє передбачити її стабільність та особливості упаковки в клітині.

Особливий інтерес представляють білки з заплутаною структурою, де вузлоподібні конфігурації відіграють ключову роль у формуванні їх функціональних властивостей. Наприклад, білок ацетилхолінестераза містить складний вузол, який стабілізує його активний центр і забезпечує правильне виконання ферментативних функцій.

Вершиною практичного застосування теорії вузлів стало створення молекулярних машин, за що у 2016 році було присуджено Нобелівську премію з хімії. Жан-П'єр Соваж, Фрейзер Стоддарт і Бернард Ферінга розробили принципи конструювання механічно заплутаних молекул – катенани і ротаксани, які нагадують мініатюрні механізми. Молекулярний мотор Ферінги, що використовує принцип обертання, подібний до розплутування вузла, відкрив нові горизонти в нанотехнологіях.

Сучасні дослідження продовжують розширювати межі застосування теорії вузлів. У медицині розробляються системи для адресної доставки ліків на основі молекулярних насосів, у матеріалознавстві – нові типи полімерів з унікальними властивостями. Перспективним напрямком є створення програмованих молекулярних систем для лікування онкологічних захворювань.

Окремий інтерес представляє розвиток теорії віртуальних вузлів як узагальнення класичної концепції, що має зв'язки з квантовою фізикою та теорією струн. Комп'ютерне моделювання стало потужним інструментом у цій галузі, дозволяючи аналізувати складні вузлові конфігурації.

Таким чином, теорія вузлів пройшла шлях від математичної абстракції до важливого інструменту сучасної науки, від розуміння основ життя на молекулярному рівні до створення революційних нанотехнологій. Її вплив продовжує зростати і надалі. Майбутні відкриття в цій галузі обіцяють нові революційні розробки, які можуть кардинально змінити наш підхід до лікування хвороб, створення матеріалів тощо, демонструючи глибокий зв'язок між фундаментальною математикою та прикладними науками.

М. Федаш

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНО-РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ДЕФЕКТАМИ

У загальному випадку складного навантаження пружно-пластичного тіла при умові, що напружено-деформований стан у вершині тріщини повністю визначається коефіцієнтами інтенсивності напружень КІН - K_I , K_{II} , K_{III} і деякими сталими матеріалу C_i критеріальне рівняння записується у вигляді [1-3]

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, C_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3...) \quad (1)$$

Співвідношення (1) описує замкнуту поверхню, яка встановлює взаємовплив навантаження тіла при його руйнуванні. В граничному випадку співвідношення визначає взаємозв'язок характеристик руйнування матеріалу при складному напруженому стані. Це означає, що складне навантаження змінює умови пластичного деформування, міцність матеріалу і характеристики його тріщиностійкості. В роботах [1-3] оцінку несучої здатності матеріалу в умовах складного напруженого стану запропоновано проводити на основі співвідношення

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, C_i) = K_{ic} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

Характеристику K_{ic} визначають при руйнуванні лише за одним із макромеханізмів – нормальним відривом, поперечним чи повздовжнім зсувом. Цей критерій можна застосувати у випадку лише за реалізації механізму нормального відриву, або при незначному впливу поперечного чи поздовжнього зсувів. Збільшення складових деформації зсуву буде збільшувати відхилення від результатів досліджень, що одержані при визначенні K_{ic} за нормальним відривом. Однак за умов змішаного деформування критерій не є інваріантним, оскільки не описує зміну опірності матеріалу руйнуванню у всьому діапазоні складного навантаження. У багатьох випадках, особливо для пластичних матеріалів змішане деформування приводить до зародження мікротріщин за змішаними механізмами. В працях [1-3] проведені дослідження за умов реалізації змішаних механізмів руйнування і встановлено емпіричні критерії, які зводились до побудови діаграм руйнування

$$K_I / K_{Ic} = f(K_{II} / K_{IIc}); \quad K_I / K_{Ic} = f(K_{III} / K_{IIIc}) \quad (3)$$

(K_I , K_{II} , K_{III} – коефіцієнти інтенсивності напружень КІН; K_{Ic} , K_{IIc} , K_{IIIc} – їх критичні значення). На основі емпіричного підходу критерій руйнування для умов змішаного деформування буде

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

Цей критерій може бути представлений формулою

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^m = 1, \quad (5)$$

де n, m – структурно чутливі параметри, які визначають із експерименту.

Ці дослідження на випадок загального складного навантаження були узагальнені і критерій на основі силового підходу був представлений у вигляді

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^m + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^k = 1. \quad (6)$$

З використанням деформаційного підходу узагальнений критерій руйнування за складного навантаження був приведений до виду

$$\left(\frac{\delta_I}{\delta_{Ic}}\right)^n + \left(\frac{\delta_{II}}{\delta_{IIc}}\right)^m + \left(\frac{\delta_{III}}{\delta_{IIIc}}\right)^k = 1. \quad (7)$$

В наведених критеріях показники n, m, k є структурно-чутливими параметрами, які залежать від стану матеріалу і визначають його ступінь чинити опір руйнуванню шляхом поширення тріщин нормального відриву, поперечного чи поздовжнього зсуву. Показники цих критеріїв визначають із діаграм руйнування, які будують на основі експериментальних досліджень. Для практичного використання цих критеріїв при встановленні допустимих навантажень елементів конструкцій з дефектами, що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану необхідно із експерименту визначити характеристики тріщиностійкості матеріалу $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$ або $\delta_{Ic}, \delta_{IIc}, \delta_{IIIc}$, а також параметри n, m, k . На основі балансу енергії розсіювання пластичних деформацій і енергії руйнування біля контуру тріщини аналітично встановлений деформаційний критерій і відповідний силовий критерій.

Література

1. M. Dutkiewicz, O. Hembara, O. Chepil, M. Hrynenko and T. Hembara. A New Energy Approach to Predicting Fracture Resistance in Metals // Materials (Basel, Switzerland), 2023. -16, 1566.
2. В. Воробець, Т. Гембара. Математичне моделювання розвитку тріщин для безпечної експлуатації елементів конструкцій у середовищі водню. Проблеми та перспективи розвитку системи безпеки життєдіяльності: Зб. наук. праць XIX- ої Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених, курсантів та студентів конференції –Львів: ЛДУ БЖД, березень 2024, С.770-774.
3. Гембара Т. В., Фірман В. М., Марич В. М. Вплив багаторазових гідроударів потоку нафти на безпечність експлуатації трубопровідного транспорту. // Фіз. - хім. механіка матеріалів. - 2024.- Т.60, №3 - С. 110 – 114.

А.О. Шевчук

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного
Науковий керівник Х.І. Ліщинська, кандидат технічних наук, професор кафедри
інженерної механіки (ОТІВ)*

ДО МОДЕЛЮВАННЯ УДАРНОГО ВПЛИВУ НА ШАСІ МОБІЛЬНОГО НАЗЕМНОГО РОБОТИЗОВАНОГО КОМПЛЕКСУ

Реалії сьогодення визначають за мобільними наземними роботизованими комплексами (МНРК) важливу роль у сучасних війнах, надаючи їм численні переваги в умовах, де ризик для людського життя є надзвичайно високим. Основними напрямками застосування МНРК під час війни є: - розвідка та спостереження в небезпечних або важкодоступних районах, отримання інформації про позиції противника, його техніку та укріплення; - логістика (МНРК можна використовувати для доставки боєприпасів, медикаментів та інших необхідних вантажів на передову, зменшуючи ризик для особового складу, та для евакуації поранених з поля бою); знешкодження вибухонебезпечних предметів; - вогнева підтримка; - мінування територій. В російсько-українській війні наразі використовуються роботи, вироблені за кордоном, проте українські інженери протягом останніх років працюють над власними розробками, створивши декілька прототипів МНРК різного призначення.

МНРК – це рухомі платформи, оснащені роботом, маніпулятором чи іншими автоматичними пристроями. Вони можуть бути гусеничними або колісними, з різними типами робочих механізмів. МНРК оснащені системами штучного зору, мають систему навігації та зв'язку. Вони призначені для виконання функцій транспортування, спостереження за об'єктами, діагностування їх стану та необхідної обробки об'єктів. Комплекси оснащені системами штучного інтелекту для автоматичної навігації, визначення координат та орієнтування на місцевості.

Легкі МНРК спеціального і військового призначення мають невелику масу та розміри, при цьому вони повинні працювати в складних умовах без участі людини. Їх рух та позиціонування відбувається в умовах бездоріжжя, що впливає на їх мобільність та функціональність. Для визначення цього впливу використовують математичне моделювання. Дорожні умови, в яких працюють МНРК, поділяють на дві групи. До першої належать умови з поступово змінними в часі характеристиками дорожнього покриття, до другої – умови з різкими та непередбачуваними змінами параметрів, такі як перешкоди у вигляді виступів, траншей, сходинок та схилів тощо. Особливу увагу приділяють моделюванню руху шасі МНРК під час ударних навантажень, викликаних стрибками, поштовхами та вібраціями.

Розглянемо динамічну модель МНРК із компактно розташованими масами, а саме двохмасову модель, в якій одна маса відповідає шасі, а інша – робочому модулю комплексу. Прийнемо, що на комплекс діє вертикальний ударний імпульс, який характеризується залежними від часу пришвидшенням $a(t)$, швидкістю $V(t)$ та переміщенням $z(t)$.

Рівняння динамічної рівноваги модуля та платформи МНРК матиме вигляд

$$\begin{cases} m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = F_z - c_2(z_2 - z_1) - b_2 \left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right), \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = c_2(z_2 - z_1) + b_2 \left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) - c_1(z_1 - z_0) - \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right), \end{cases}$$

де m_1 , m_2 – маси шасі і модуля відповідно, F – ударний імпульс, z_1 , z_2 – переміщення центрів мас шасі і модуля, c_1 , c_2 – жорсткості підвіски та пружного зв'язку модуля з шасі, b_1 , b_2 – коефіцієнти опору підвіски та зв'язку шасі з модулем, z_0 – переміщення поверхні ґрунту під час дії ударного імпульсу.

Використаємо перетворення Лапласа для даної системи рівнянь за нульових початкових умов, ввівши позначення: $T_2^2 = \frac{m_2}{c_2}$, $\xi_2 = \frac{b_2}{2\sqrt{m_2 c_2}}$, $\tau_2 = \frac{b_2}{c_2}$, $K_2 = \frac{1}{c_2}$,

$T_1^2 = \frac{m_1}{c_1 + c_2}$, $\xi_1 = \frac{b_1 + b_2}{2\sqrt{m_1(c_1 + c_2)}}$, $K_c = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$, $\tau_1 = \frac{b_2}{c_1 + c_2}$, $K_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$, $\tau_3 = \frac{b_1}{c_1 + c_2}$ та розглянувши важливий випадок, коли $c_2 \gg c_1$. Матимемо:

$$\begin{cases} (T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)z_2(s) - (1 + \tau_2 s)z_1(s) = K_2 F_z(s), \\ (T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)z_1(s) - (K_c + \tau_1 s)z_2(s) = (K_1 + \tau_3 s)z_0(s). \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему рівнянь можна знайти зображення по Лапласу переміщення платформи та модуля МНРК.

Результати розрахунків показують, що основний вплив ударного імпульсу припадає на модуль, переміщення якого в декілька разів перевищує переміщення шасі. Це справедливо для руху МНРК як по недеформованому, так і по деформованому ґрунту. Це пояснюється короткочасністю дії імпульсу та підвищенням несучої здатності шасі в динаміці.

Отримані результати є наближеними, оскільки реальні умови руху МНРК є складнішими та вимагають тривимірного моделювання. Ударні навантаження також викликають деформацію ґрунту, що призводить до його просідання.

Література

1. Струтинський В.Б., Гуржій А.М. Монографія. – Житомир: ПП «Рута», 2023. – 524 с.

М.О. Попчук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки

ВИКОРИСТАННЯ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MICROSOFT EXCEL ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Сьогодні, майже у всіх сферах нашого життя ми спостерігаємо цифровізацію – одну з визначальних тенденцій розвитку людської цивілізації, яка формує більш інклюзивне суспільство та кращі механізми управління, розширює доступ до охорони здоров'я, освіти, охоплення державних послуг, а також покращує аналіз роботи органів виконавчої влади, зокрема Державної служби України з надзвичайних ситуацій.[1]

Робота рятувальників тісно пов'язана з постійним аналізом та збором інформації про надзвичайні ситуації (табл.1), кількість працівників, які заступають на добові чергування, загальна кількість техніки в підрозділах та гарнізонах тощо. Обов'язки зазначені вище виконує старший помічник начальника чергової зміни з питань оперативно-диспетчерської служби та аналітичного забезпечення. Дана посада є хорошим прикладом використання **Microsoft Excel**, як однієї з програм, для опрацювання статистичних даних.

Дані про надзвичайні ситуації	2023 рік станом на 31.12.2023	2024 рік станом на 31.12.2024	Зменшення (збільшення), у відсотках
Загальна кількість НС:	110	106	3,6 ↓
з них за характером походження:			
Техногенного характеру	49	34	30,6 ↓
Природного характеру	60	67	11,7 ↑
Соціальні	1	5	в 4 рази ↑
Воєнні	0	0	0,0
з них за рівнями:			
Державного рівня	4	1	75,0 ↓
Регіонального рівня	5	3	40,0 ↓
Місцевого рівня	55	66	20,0 ↑
Об'єктового рівня	46	36	21,7 ↓
Загинуло людей внаслідок НС*	159	148	6,9 ↓
Постраждало людей внаслідок НС*	884	295	66,6 ↓

Табл.1. Кількісні показники надзвичайних ситуацій, що виникли в Україні у 2023 році, порівняно із 2022 роком[2]

Microsoft Excel (повна назва **Microsoft Office Excel**) — таблицний процесор, програма для роботи з електронними таблицями, створена корпорацією Microsoft для Microsoft Windows, Windows NT і macOS. Програма

входить до складу офісного пакета Microsoft Office.[3] Він використовується для роботи з даними, аналізу інформації та обчислень. Табличний процесор є одним з потужних, доступних та універсальних інструментів для ефективної обробки даних, що дозволяє виявляти тенденції, прогнозувати ризики та планувати ресурси.

Вагомою перевагою табличного процесора є застосування формул та функцій, що значно полегшує обчислення без використання окремих обрахувальних пристроїв.

Формула – це вираз, який виконує обчислення ($=A1+B1$).

Основні математичні операції:

- $=A1+A2$ – додавання;
- $=A1-A2$ – віднімання;
- $=A1*A2$ – множення;
- $=A1/A2$ – ділення;
- $=A1^2$ – піднесення до степені.

Функція – вбудована команда Excel, яка спрощує обчислення ($=SUM(A1:A10)$).

Найпопулярніші функції:

- $SUM(A1:A10)$ – сума значень у діапазоні; альтернативне рішення для:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \dots + A_{10};$$

- $AVERAGE(A1:A10)$ – середнє арифметичне; альтернативне рішення для:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \dots + A_{10}}{10};$$

- $MIN(A1:A10) / MAX(A1:A10)$ – мінімальне/максимальне значення; альтернативне рішення для ручного пошуку найменшого та найбільшого значення в таблиці;

- $COUNT(A1:A10)$ – підрахунок заповнених комірок; альтернативне рішення для ручного підрахунку комірок, які містять в собі інформацію.

Отже, використання табличного процесора у професійній діяльності ДСНС України є ефективним рішенням під час опрацювання статистичних даних, яке сприяє оптимізації роботи. Це значно полегшує та пришвидшує обрахунки та аналіз інформації, яка надходить. Завдяки широким можливостям Microsoft Excel фахівці ДСНС України можуть швидко й точно збирати та аналізувати оперативну інформацію, планувати заходи реагування та покращувати якість роботи.

Література

1. Перегляд Поняття цифровізації: національні та міжнародні підходи. *Право та інновації*. URL: <https://pti.org.ua/index.php/ndipzir/article/view/834/645>
2. Інформаційно-аналітична довідка про надзвичайні ситуації в Україні у 2023 році. URL: <https://dsns.gov.ua/upload/2/0/2/2/3/1/4/2023-rik.pdf>
3. Учасники проєктів Вікімедіа. Microsoft Excel – Вікіпедія. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel

А.О. Нечко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ЕЛЕМЕНТИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Математичною оптимізацією (інколи, оптимізацією) або математичним програмуванням в математиці, інформатиці та дослідженні операцій називають відбір найкращого елементу (за певним критерієм) з множини доступних альтернатив. У найпростішому випадку задача оптимізації полягає у знаходженні екстремуму (мінімуму або максимуму) дійсної функції шляхом систематичного вибору входних значень з дозволеного набору та обчислення значення функції. Подальші узагальнення теорії та методів оптимізації до інших формулювань становлять велику область прикладної математики. Взагалі, оптимізація охоплює знаходження «найкращих можливих» значень деякої цільової функції в межах області визначення, включаючи різні типи цільових функцій та різні типи областей значення.)

У процесі проектування ставиться, звичайно, задача визначення найкращих, у деякому значенні, структури або значення параметрів об'єктів. Така задача називається оптимізаційною. Якщо оптимізація пов'язана з розрахунком оптимальних значень параметрів при заданій структурі об'єкта, то вона називається параметричною. Задача вибору оптимальної структури є структурною оптимізацією.

Методи оптимізації є невід'ємною частиною сучасних технологій та економічних процесів. Вони дозволяють знаходити ефективні рішення, зменшувати витрати та підвищувати продуктивність у різних сферах діяльності. З розвитком обчислювальних технологій оптимізаційні методи стають все більш потужними та доступними, що відкриває нові можливості для їх застосування в реальних задачах. Вибір конкретного методу залежить від специфіки задачі, її складності та доступних обчислювальних ресурсів. Застосування сучасних оптимізаційних алгоритмів дозволяє досягти значних покращень у різних сферах діяльності, сприяючи розвитку науки та технологій.

Методи оптимізації класифікують відповідно до задач оптимізації:

- Локальні методи: сходяться до якого-небудь локального екстремуму цільової функції. У разі унімодальної цільової функції, цей екстремум єдиний, і буде глобальним максимумом/мінімумом.
- Глобальні методи: мають справу з багатоекстремальними цільовими функціями. При глобальному пошуку основною задачею є виявлення тенденцій глобальної поведінки цільової функції.

Існуючі в цей час методи пошуку можна розбити на три великі групи: детерміновані; випадкові ; комбіновані.

За критерієм вимірності допустимої множини, методи оптимізації поділяють на методи одновимірної оптимізації і методи багатовимірної оптимізації.

Приклади прикладних задач оптимізації

Логістика: оптимізація маршрутів перевезень для мінімізації витрат палива.

Пожежна безпека: вибір оптимального розміщення пожежних гідрантів для мінімізації часу подачі води.

Енергетика: оптимальний розподіл навантаження між електрогенераторами для мінімізації витрат палива.

Будівництво: мінімізація вартості конструкції за умови забезпечення необхідної міцності.

Медицина: оптимізація дозування лікарських засобів для максимального ефекту при мінімальній побічній дії.

Розглянемо приклад вибору оптимального розміщення пожежних гідрантів для мінімізації часу подачі води.

Нехай U житловому кварталі розташовані три будинки: Будинок А (координати (0,0)), Будинок В (координати (60,0)), Будинок С (координати (30,40)). Необхідно встановити один пожежний гідрант так, щоб сума відстаней від нього до всіх трьох будинків була мінімальною (тобто час підключення води до кожного з будинків — найменший). Потрібно знайти координати оптимального місця встановлення гідранта.

Позначимо координати гідранта $(x; y)$. Тоді функція, яку треба мінімізувати:

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 60)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 30)^2 + (y - 40)^2} \quad (1)$$

Тобто це сума відстаней від пожежного гідранта до будинків.

Відповідно до алгоритму оптимізації, необхідно знайти частинні похідні f'_x та f'_y , прирівняти їх до нуля і розв'язати систему для знаходження $(x; y)$.

$$\begin{cases} f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-60}{\sqrt{(x-60)^2+y^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{(x-30)^2+(y-40)^2}} = 0 \\ f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-60)^2+y^2}} + \frac{y-40}{\sqrt{(x-30)^2+(y-40)^2}} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язок системи (2) важко знайти алгебраїчними методами, тому припустимо, що гідрант встановимо в центрі мас трикутника АВС, тоді $x = \frac{0+60+30}{3} = 30$, $y = \frac{0+0+40}{3} = 13,33$. При підстановці даних значень в систему, отримаємо, що частинні похідні близькі до нуля, а отже, мінімум функції буде поблизу точки (30;13,33). Для точнішого рішення потрібно використати чисельні методи оптимізації (наприклад, метод Ньютона або градієнтний спуск).

Оптимізація є ключовим інструментом для розв'язання прикладних задач у найрізноманітніших сферах людської діяльності — від техніки й економіки до безпеки та охорони довкілля. Вона дозволяє знаходити найкращі рішення за заданими критеріями, зменшувати витрати ресурсів, підвищувати ефективність

процесів і забезпечувати їх стійкість навіть у складних умовах.

Математичні методи оптимізації, такі як використання похідних для пошуку екстремумів функцій, моделювання обмежень або багатокритеріальний аналіз, забезпечують систематичний підхід до вибору оптимальних варіантів.

Література

1. Столяр В. І. Основи математичного аналізу : навч. посіб. – Київ : Каравела, 2017. – 312 с.
2. Демидович Б. П. Збірник задач і вправ з математичного аналізу / Б. П. Демидович. – 17-те вид. – Київ : Наукова думка, 2021. – 576 с.
3. Крейг А. Вступ до оптимізації : перекл. з англ. – Київ : Видавничий дім "Києво-Могилянська академія", 2010. – 348 с.
4. Лебедєв В. А. Оптимізація процесів в інженерних системах : навч. посіб. – Харків : ХНУРЕ, 2018. – 196 с.

О. Орлов

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В ПРОГРАМНІЙ СИСТЕМІ MATHCAD

Метод розкладання функції на гармонійні складові, тобто обчислення коефіцієнтів Фур'є, прийнято називати спектральним аналізом. А відтворення наближення функції рядом Фур'є, тобто отримання її тригонометричного представлення, називають спектральним синтезом [1-2]. Гармоніку з $k = 1$ називають основною, або першою гармонікою сигналу. Вона визначає його частоту повторення f_1 . Інші гармоніки називають вищими, їх частоти дорівнюють $f_k = k \cdot f_1$, де $k = 2, 3, \dots$. Таким чином, спектр періодичних сигналів дискретний він містить набір фіксованих частот f_k , де $k = 1, 2, 3, \dots$. У неперіодичних сигналів спектр буде суцільним і замість амплітуди гармонік він характеризується спектральною щільністю сигналу. Якщо сигнал представлений як вектор дискретних значень, застосовується дискретне перетворення Фур'є (ДПФ), для якого існує алгоритм ефективної реалізації обчислень, - швидке перетворення Фур'є (ШПФ, чи FFT — Fast Fourier Transform).

Для досліджень використали програмну систему Mathcad. Відмінною рисою Mathcad є робота з так званими документами, або робочими листами (worksheets), які об'єднують опис математичного алгоритму вирішення задачі (або ряду завдань), візуально-орієнтовану програму її вирішення з текстовими коментарями та результати обчислень, представлені символами, числами, таблицями. Функція **fft(v)** системи Mathcad виконує ШПФ даних, представлених дійсними числами — значеннями вихідного вектора v . Однак вектор v повинен мати 2^m складових, де m — ціле число. В іншому випадку виводиться повідомлення про помилку - неправильний розмір вектора. Якщо число елементів вектора v все ж таки інше, то його можна доповнити нулями до цієї величини.

Елементи вектора, що повертається функцією **fft(v)**, відповідають формулі

$$C_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{2\pi i(j/n)k} . \quad (1)$$

Тут n — число елементів вектора v , i — уявна одиниця, k — індекс підсумовування (від 0 до $n - 1$) та j — номер гармоніки (від 0 до $n/2$). Ці елементи вектора відповідають наступним частотам:

$$f_j = \frac{j}{n} \cdot f_s . \quad (2)$$

Тут f_s - Частота квантування сигналу, який піддається ШПФ. Елементи вектора що повертається функцією **fft(v)**, — це комплексні числа, навіть якщо сигнал представлений в області дійсних чисел.

Функція **ifft(v)** реалізує зворотне (інверсне) перетворення Фур'є вектора v з комплексними елементами. Вектор v повинен мати $1 + 2m+1$ елементів. В іншому випадку видається повідомлення про помилку. Функція **ifft(v)** спочатку створює вектор w , комплексно-пов'язаний з v і потім приєднує його до вектора v . Після цього обчислюється вектор d з елементами, розрахованими за такою формулою:

$$d_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{-2\pi i(j/n)k}. \quad (3)$$

Функції **fft(v)** та **ifft(v)** дають точні (у межах похибки чисельних розрахунків) звернення. При цьому **ifft(fft(v)) = v** можна використовувати для перевірки перетворень. Функція **cfft(A)** аналогічна до попередньої функції, але реалізує пряме перетворення Фур'є для вектора A з комплексними елементами. Якщо A - матриця, реалізується двовимірне перетворення. Введення функції **fft(v)** обумовлено тим, що перетворення для векторів з дійсними елементами реалізується за швидшим алгоритмом (ШПФ) і займає менше часу. З іншого боку, тоді простіше введення вхідних даних. На рис.1-2 вказано дані спектрального аналізу, акустичного сигналу за якими можна проводити кластеризацію та ідентифікацію за відповідних критеріїв.

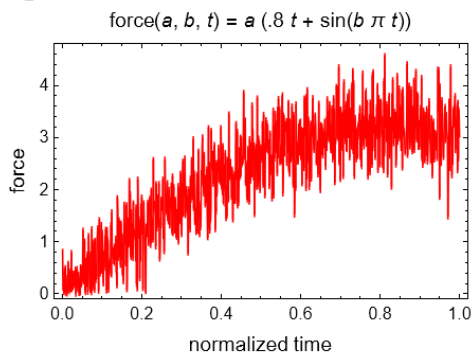


Рис.1. Амплітудно-часовий аналіз.

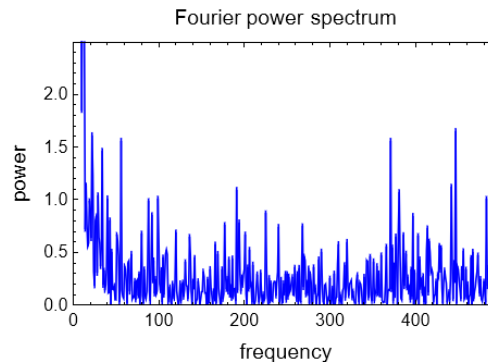


Рис.2. Частотний аналіз за рівнем.

Література

1. Т. Гембара. Математичні методи та програмне забезпечення візуалізації фазово-частотних характеристик акустичних сигналів. Зб.тез IV-ої Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційна безпека та інформаційні технології" ІБІТ 2022 "Cybersecurity and information technology", -Львів, 30.11. 2022. С.228-230.
2. Т. Гембара, В. Старчак. Розклад експоненціальної функції з параметром в ряд Фур'є. Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: Зб. наук.праць X Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. -Львів: ЛДУ БЖД 2023, с.33-36.

В. Іваник

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРИМІЩЕНЬ ЗА СПЕКТРАЛЬНИМ АНАЛІЗОМ ЗВУКОВИХ СИГНАЛІВ

Поняття «рівень сигналу» використовується широко. Якщо мова йде про стаціонарний синусоїдальний сигнал з генератора, то можна взяти середнє значення, або амплітудне, або середньоквадратичне [1]. Електричні величини, які характеризують звукові сигнали (ЗС) неперервно змінюються в часі. Графічно він може бути зображений сукупністю реалізацій вибірових функцій. Якщо реалізація представляє собою напругу, що змінюється в часі t за певний інтервал спостереження, то така залежність $u(t)$ є кривою зміни миттєвого значення ЗС в часі.

Рівень ЗС характеризує сигнал в певний поточний момент часу і являє собою виражену в децибелах випрямлену і усереднену за певний попередній проміжок часу напругу мовного сигналу $\bar{u}(t)$ (де риска зверху означає операцію усереднення в часі, t – момент часу), віднесене до деякої опорної величини U_0 . Теоретично найбільш просто усереднювати миттєве значення випрямленої напруги з постійним ваговим коефіцієнтом. Математично цю операцію можна записати в такий спосіб, наприклад, для поточного моменту часу t_1 :

$$\overline{u(t_1)} = \frac{1}{T} \int_{t_1-T}^{t_1} |u(t)| dt. \quad (1)$$

Вираз дає середнє за час T значення модуля функції $u(t)$, причому всім випрямленим значенням функції $u(t)$ приписується однакова відносна вага, яка дорівнює dt/T в інтервалі $t_1-T \dots t_1$ (T – інтервал усереднення) и нулю ззовні цього інтервалу. Форма цієї залежності $\bar{u}(t)$ виходить «згладженою», і визначається як самим ЗС, так і часом усереднення T (тобто тривалістю пам'яті вимірювального пристрою). Тому, говорячи про рівні, слід неодмінно вказувати часові параметри приладів, якими вони вимірювалися.

Прямокутна вагова функція не відповідає властивостям слуху. Відомо, що слухове відчуття в кожен момент поточного часу (наприклад, t_1) визначається не тільки миттєвим значенням сигналу в цей момент, але і більш ранніми його значеннями. Чим більше вони віддалені в минуле від теперішнього моменту часу, тим менше їх внесок в слухове відчуття. Тому при визначенні рівня ЗС усереднення його випрямлених миттєвих значень слід виконувати з перемінним множником ваги, що спадає у напрямку минулого часу.

$$\overline{u(t_1)} = \int_0^{t_1} |u(t)| h(t_1 - t) dt. \quad (2)$$

Відповідним наближенням для слуху є вагова функція виду:

$$h(t_1 - t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t_1 - t}{T}}, \quad (3)$$

де T – стала часу, пов'язана з пам'яттю слуху (30 мс).

Випрямлена напруга, яка змінюється в часі, усереднена за певний проміжок часу з заданим множником ваги і виражена в децибелах є динамічним рівнем ЗС. У звукотехніці широко застосовується з поняття «децибел» (дБ). Децибел – це одиниця вимірювання відношення величин. У класичних підручниках для вузів радіотехнічних спеціальностей дано визначення:

$$N \text{ (дБ)} = 10 \cdot \lg(A/A_0), \quad (4)$$

якщо A и A_0 – потужність, та

$$N = 20 \cdot \lg(A/A_0) \quad (5)$$

для напруги і струму. Величини A , і A_0 повинні мати одну розмірність.

Вираз «рівень сигналу зріс на 20 дБ» означає: в 10 разів збільшилася напруга і в 100 разів – потужність.

Існує велика кількість додаткових критеріїв для оцінки звукового поля в приміщенні. Більшість з них – енергетичні, і ґрунтуються на оцінці енергії E імпульсного відгуку приміщення $p_{36}(t)$ для різних часових інтервалів :

$$E(t) = \int_0^t p_{36}^2(t) dt, \quad E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_{36}^2(t) dt, \quad E(t, \infty) = \int_t^{\infty} p_{36}^2(t) dt, \quad (60)$$

де p_{36} – миттєве значення звукового тиску, що змінюється в часі;

t , t_1 і t_2 – поточні моменти часу імпульсного відгуку приміщення.

Очевидно, що для повної оцінки за критеріями необхідний математичний аналіз амплітудно-частотних характеристик сигналів [1,2].

Література

1. Т. Гембара. Математичні методи та програмне забезпечення візуалізації фазово-частотних характеристик акустичних сигналів. Зб.тез IV-ої Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційна безпека та інформаційні технології" ІБІТ 2022 "Cybersecurity and information technology ", -Львів, 30.11. 2022. С.228-230.
2. Т. Гембара, В. Старчак. Розклад експоненціальної функції з параметром в ряд Фур'є. Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: Зб. наук.праць X Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. –Львів: ЛДУ БЖД 2023 , с.33-36.

К. Бекало

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВМІСТУ ВУГЛЕКИСЛОГО ГАЗУ В ПРИМІЩЕННЯХ

Математичне моделювання вмісту вуглекислого газу у приміщенні [1,2] з припливно-витяжною вентиляційною системою передбачає метод усереднених параметрів мікроклімату у будь-якій точці приміщення. У роботі [1] дослідили припливно - витяжну систему обмінної вентиляції в приміщенні 20м×10м висотою 3м, де виконують офісну роботу 25 працівників, з початковим вмістом CO₂ 0,02 %. Кожен працівник, наприклад офісу, при основній роботі за комп'ютером видихає 24 літри CO₂ за годину (0, 0004 м³ за хвилину) . Приймаючи , що $C=C(t)$ – концентрація CO₂ в 1 м³ повітря в приміщенні в момент часу t , склали рівняння балансу, яке включає приплив CO₂ та його втрати за рахунок роботи вентиляційної системи за проміжок часу dt . Вентиляційна система постачає по припливному каналу з зовнішнього середовища 30 м³ чистого повітря з вмістом 0, 02 % CO₂ за хвилину (потужність системи по кожному каналу) і в такому ж об'ємі видаляє по витяжному. Тоді відносний приріст CO₂ протягом часу dt буде:

$$dC = \frac{n_0 V_1 + V_p C_2 - V_p C}{V} dt , \quad (1)$$

де n_0 – кількість працівників, V_1 - об'єм CO₂, який видихає працівник на м³, C_2 - концентрація CO₂ на м³ у повітрі, що надходить зовні, V_p – потужність вентиляційної системи, V - об'єм приміщення. Обчисливши швидкість зміни концентрації, отримали рівняння:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{n_0 V_1 + V_p C_2 - V_p C}{V} . \quad (2)$$

В результаті отримали співвідношення для обчислення концентрації ;

$$C(t) = 0,000533 - 0,00033e^{-0,05t} , \quad (3)$$

а отриманий вираз вказує на вихід системи на стаціонарне значення концентрації з плином часу (стаціонарний режим). Розглянули складніший випадок, якщо наявна кількість людей в приміщенні n змінюється з часом. Наприклад до сталої кількості працівників додається кількість відвідувачів офісного приміщення, яка не є сталою і залежить від моменту часу на проміжку робочого дня, є функцією $n=n(t)$. Записавши рівняння (2) у вигляді

$$\frac{dC}{dt} + \frac{V_p C}{V} = \frac{n_0 V_1 + V_p C_2}{V} , \quad (4)$$

та відповідно замінивши n_0 на $n(t)$ отримали в загальній формі лінійне неоднорідне рівняння для концентрації C

$$C' + p_0 C = q(t), \quad (5)$$

в якому питома потужність вентиляційної системи $p_0 = \frac{V_p}{V}$, $q(t) = \frac{n(t)V_1 + V_p C_2}{V}$.

Розв'язок рівняння (5) знаходили методом Бернуллі. Розглянули нестационарний режим вентиляції - випадок залежності кількості відвідувачів офісу за періодичною функцією на проміжку тривалості прийому відвідувачів t_p таким чином, що кількість відвідувачів дорівнює нулю на початку та в кінці проміжку при максимальному значенні w :

$$n(t) = n_0 + w \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right). \quad (6)$$

Для спрощення розрахункових співвідношень ввели позначення $a = \frac{V_1}{V}$, $b = \frac{\pi}{t_p}$, $d = \frac{V_p C_2}{V}$. Обчисливши відповідні інтеграли, загальний розв'язок записали, при обмеженнях $p_0 \neq 0$, у вигляді:

$$C = e^{-p_0 t} \left(D + \frac{1}{p_0^3 + b^2 p_0} [a p_0^2 w \sin(bt) - a b p_0 w \cos(bt) + e^{p_0 t} ((d + a n_0) p_0^2 + b^2 d + a b^2 n_0)] \right). \quad (7)$$

Використали ту ж початкову умову, як і в стаціонарному режимі $C(0) = 0,0002$, при $t_p = 360$ хв., $w = 30$ та решту необхідних даних стаціонарного режиму і знайшли значення сталої $D = 0,00555639$. Результати розрахунків показано на (рис.1), де верхній графік описує нестационарний режим, а нижній стаціонарний.

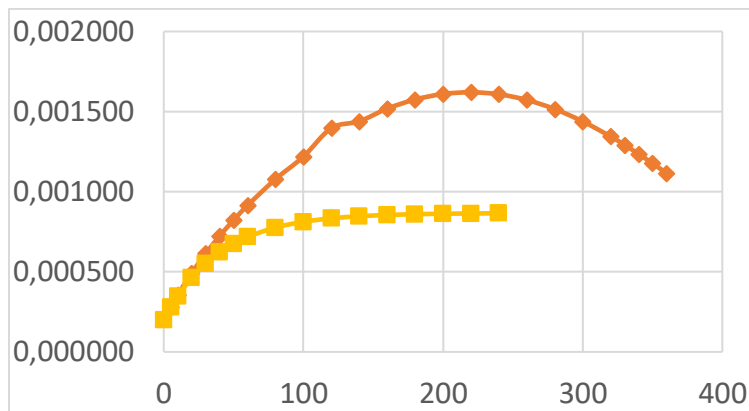


Рис.1 Залежність концентрації вуглекислого газу від часу хв.

Література

1. Гембара Т.В., Марич В.М. Диференціальне рівняння управління припливно-витяжної вентиляції за вмістом CO_2 у приміщенні. Зб. наук. праць IV Всеукраїнської науково-практичної конференції викладачів та фахівців-практиків ОХОРОНА ПРАЦІ: ОСВІТА І ПРАКТИКА – Львів: ЛДУ БЖД, травень 2024, С.34-35.
2. M. Macarulla, M. Casals, M. Carnevali, N. Forcada, M. Gangolells, Modelling indoor air carbon dioxide concentration using grey-box models, *Build. Environ.* 117 (2017) 146–153. doi:10.1016/j.buildenv.2017.02.022.

С. Повх

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Т.В. Гембара**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Комп'ютерна математика, як новий науковий напрямок на стику математики та інформатики, зародилася зовсім недавно - на початку 80-х років XX століття. Вона включає засоби математичного забезпечення комп'ютерів, що входять в мікропроцесори і математичні співпроцесори, і програмні засоби для автоматизованого вирішення широкого класу математичних завдань.

Основним програмним продуктом комп'ютерної математики стали системи комп'ютерної математики (СКМ). Кожна з СКМ має певні властивості, які необхідно враховувати під час вирішення конкретних математичних завдань. Завдяки реалізації СКМ на ПК вони доступні педагогам і вченим, студентам і школярам, причому не тільки в колективному, але і в індивідуальному їх застосуванні. Кожна СКМ може мати нюанси у своїй архітектурі чи структурі. Проте можна дійти висновку, що сучасні універсальні СКМ мають типову структуру. Центральне місце посідає ядро системи. Воно є безліч вбудованих функцій і процедур, представлених у машинних кодах і що забезпечують досить представницький набір вбудованих швидких команд, функцій та операторів системи. Роль ядра особливо велика у системах символічної математики, де у ядрі зберігаються багато сотень, або навіть тисячі правил аналітичних перетворень математичних виражень. Функції та процедури, включені в ядро, виконуються дуже швидко. З цього погляду в ядро було б вигідно включати якнайбільше обчислювальних засобів. Однак це мимоволі призводить до уповільнення пошуку потрібних засобів через зростання їх числа, збільшення часу завантаження ядра та інших небажаних наслідків. Тому обсяг ядра обмежують, але до нього додають бібліотеки більш рідкісних процедур та функцій, до яких звертається користувач, якщо в ядрі не виявлено потрібну процедуру або функцію. Деякі системи допускають модернізацію бібліотек та їхнє розширення силами досвідчених користувачів.

Кардинальне розширення можливостей СКМ та їх адаптація до вирішуваних конкретними користувачами завдань досягається за рахунок пакетів розширення систем. Ці пакети, як правило, пишуться власною мовою програмування тієї чи іншої системи, що уможливорює їх підготовку звичайними користувачами. У всьому світі створено десятки СКМ, але широку популярність здобуло лише кілька систем:

Derive, MuPAD- СКМ початкового рівня. Вони орієнтовані на шкільну та вищу освіту за спеціальностями, що не потребують розширеної математичної

підготовки. Мають недостатньо розвиненими, хоча і можливостями графічної візуалізації результатів обчислень, що постійно поліпшуються.

Mathcad- Система, орієнтована на вищу освіту, виконання помірно складних чисельних та аналітичних розрахунків з максимальним використанням природної математичної мови уявлення обчислень. Має чудовий інтерфейс та великі можливості графічної візуалізації обчислень. Є наймасовішою СКМ.

Maple, Mathematica- Універсальні системи, орієнтовані на виконання аналітичних обчислень на будь-якому рівні, аж до професійного. Широко застосовуються у системі вищої освіти та у практиці виконання наукових розрахунків.

MATLAB+Simulink- Потужні та великі (займають до 1-1,5 Гбайт на жорсткому диску) системи, орієнтовані на матричні та чисельні методи обчислень, реалізацію чисельних розрахунків підвищеної складності, математичне моделювання систем та пристроїв. Мають десятки пакетів розширення з різних галузей математики та багатьом (зокрема новітнім) сферам її застосування.

Mathcad – одна з найпопулярніших і наймасовіших систем комп'ютерної математики. Назва системи походить від двох слів – MATHeumatica (математика) та CAD (Computer Aided Design – системи автоматичного проектування, або САПР).

У вікні системи є вікно центру ресурсів, що дає доступ до підручника для нових користувачів, засобів оновлення (Upgrades), Інтернет-сайту фірми MathSoft, Inc. та засобам колективної роботи над науковими проектами (все англійською мовою). Вікно має стандартні засоби керування вікнами. Праворуч видно основну панель для виведення панелей спеціальних математичних символів. Ця панель може переміщатися по екрану мишею з лівою натиснутою клавішею і прикріплюватися до інших панелей, наприклад до панелі форматування. Відмінною рисою Mathcad є робота з так званими документами, або робочими листами (worksheets), які поєднують опис математичного алгоритму розв'язання задачі (або ряду завдань), візуально-орієнтовану програму її вирішення з текстовими коментарями та результати обчислень, представлені символами, числами, таблицями чи графіками.

Література

1. Т. Гембара. Математичне моделювання спостережень програмним пакетом MATHCAD. Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції «ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА ГАСІННЯ ПОЖЕЖ ТА ЛІКВІДАЦІЇ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ» – Черкаси: ЧПБ ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ України 25 квітня 2024. С.237-239.

І.М. Чіпчик

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **Л.Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТЕРЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Стійкістю називають властивість конструкції та її частин зберігати під дією заданого навантаження початкову форму пружної рівноваги. З історії техніки відомо чимало випадків руйнування важливих інженерних конструкцій унаслідок втрати стійкості. Явище втрати стійкості може спостерігатися в багатьох елементах конструкцій різної форми. Тонкостінна труба, навантажена зовнішнім тиском, може втратити стійкість і набрати форми еліпса, коли інтенсивність навантаження перевищує критичне значення. Втратити стійкість можуть і довгі балки, що працюють на згинання та які є стержневими елементами конструкцій. Стержнем вважають одновимірне пружне тіло, два розміри якого є малими порівняно з третім та яке володіє скінченною жорсткістю на розтяг, кручення та згин. Досліджують явище втрати стійкості за допомогою математичних моделей, якими є диференціальні рівняння другого порядку [1].

Для шарнірно обпертого вертикального стержня (рис. 1), який навантажений стискувальною силою F , що дорівнює певному критичному значенню сили $F = F_{кр}$, наближене диференціальне рівняння зігнутої осі має вигляд

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_{\min}}, \quad (1)$$

де E – модуль Юнга матеріалу стержня, $I_{\min}$ – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня, оскільки поздовжнє згинання відбувається завжди в площині найменшої жорсткості; $y(x)$ – відхилення центра ваги довільного перерізу на відстані x від початку координат; $M(x)$ – згинальний момент у довільному перерізі зігнутого стержня, який дорівнює $M(x) = -F_{кр} y(x)$. З урахуванням

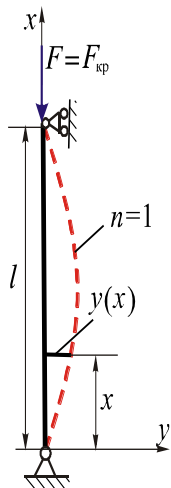


Рис.1.Стиснутий стержень

цього виразу в (1) та увівши позначення $k^2 = \frac{F_{кр}}{EI_{\min}}$,

отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 y(x) = 0. \quad (2)$$

З розв'язку рівняння (2) за крайових умов, що відповідають шарнірному обпиранню кінців стержневого елемента: на нижньому кінці $x=0; y=0$ та на верхньому кінці $x=l; y=0$, отримують вирази для критичної сили (формулу Ейлера) $F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot n^2 EI_{min}}{l^2}$ та рівняння зігнутої осі стержня $y(x) = A \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}$. Вісь стиснутого стержня є синусоїдою.

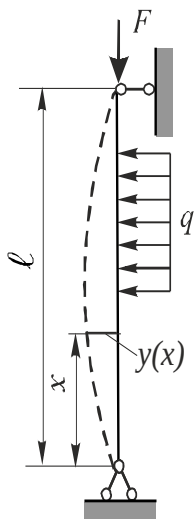


Рис. 2. Стиснутий стержень з поперечним

Коли стиснуті стержневі елементи конструкцій навантажені ще поперечними силами (рис. 2), то такий випадок називають поздовжньо-поперечним згином. Диференціальне рівняння зігнутої осі стержня має вигляд

$$EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + Fy(x) = -M_0(x) . \quad (3)$$

де $M_0(x)$ – згинальний момент лише від поперечного навантаження, $y(x)$ – прогин стержня за сумісної дії поперечного та поздовжнього навантаження.

Наближений розв'язок рівняння (3) отримують методом Бубнова, прийнявши наближено форму зігнутої осі як синусоїду. Розв'язок рівняння (3) дає вираз для прогину $y(x)$

$$y(x) = y_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{кр}}} , \quad (4)$$

де y_0 - прогин осі від поперечного навантаження.

Однак втрачати стійкість можуть не тільки стиснуті стержні, але і розтягнуті, навантажені поперечними силами. Особливим випадком є навантаження поздовжньою силою $N(t)$, що змінюється в часі, та поперечним навантаженням q на певній ділянці стержня (рис. 3).

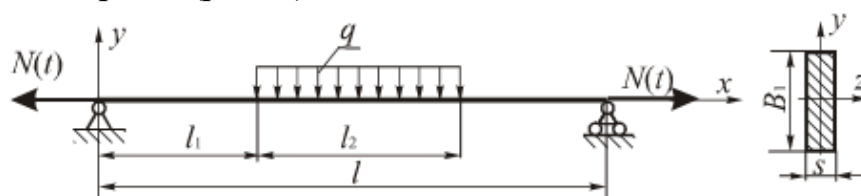


Рис. 3. Розтягнутий змінною в часі силою стержень з поперечним

Під дією циклічно змінної сили $N(t)$ стержень коливатиметься в поперечному напрямі, унаслідок цього може втратити стійкість. Диференціальне рівняння поперечних коливань стержня має вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E \cdot I_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N(t) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \begin{cases} q, & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2; \\ 0, & 0 \leq x < l_1; \\ 0, & l_1 + l_2 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

де $E \cdot I_z$ – жорсткість стержня на згин; I_z – осьовий момент інерції поперечного перерізу (для прямокутного перерізу на рис. 3 - $I_z = s \cdot B_1^3 / 12$), $w(x, t)$ – поперечне переміщення точки осі стержня з координатою x у довільний момент часу t . Для розв'язку такого диференціального рівняння окрім початкових умов, потрібно долучити і крайові умови. За шарнірного обпирання кінців стержня крайові умови мають вигляд

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

За методом Бубнова розв'язок диференціального рівняння (5) за вказаних крайових умов (6) шукають у вигляді:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (7)$$

де $T_n(t)$ – функція часу, яку визначають під час розв'язування; $X_n(x)$ – функції, що задовольняють крайові умови (6): $X_n(0) = X_n''(0) = X_n(l) = X_n''(l)$. Ці функції утворюють повну ортонормовану систему:

$$\{X_n(x)\} = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1, 2, \dots}.$$

Тоді функція прогину $w(x, t)$ для стержня набуває вигляду:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}. \quad (8)$$

Для функцій $T_n(t)$ отримують систему параметричних рівнянь, які називають рівняннями Матьє-Хілла. За цими рівняннями будують діаграми, що дозволяють дослідити динамічну стійкість розтягнутого стержня.

Як показано в [2], на стійкість таких розтягнутих стержнів мають істотний вплив різні режими натягу.

Література

1. Гуліда Е. М., Дзюба Л. Ф. Ольховий І. М. Прикладна механіка : підручник. / Львів : Світ, 2007. - 384 с.
2. Максименко О. П. та ін.: Методика вибору натягу смуги під час безперервної прокатки з урахуванням стійкості процесу / International Science Journal of Engineering and Agriculture 2024; 3(6): 88-94

Р.Т. Яницький

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Л.Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

СТАТИСТИКА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ КІБЕРІНЦИДЕНТІВ

Кіберризик – це операційний ризик, який полягає в отриманні прямих чи опосередкованих збитків економічними суб'єктами внаслідок їх функціонування у кіберпросторі. В широкому значенні кіберризик – це ймовірність загрози інтерактивним цифровим мережам, що використовують для передачі, модифікації та зберігання інформації (кіберпростору).

Одним із інструментів реалізації кіберризиків є кібератака. Федеральна рада експертизи фінансових установ США (Federal Financial Institutions Examination Council, FFIEC) розрізняє поняття кібератаки та кіберінциденту. Під кібератакою розуміють спробу пошкодити, порушити або отримати несанкціонований доступ через кіберпростір до комп'ютера, комп'ютерної системи або електронної мережі зв'язку з метою порушення, виключення, знищення або зловмисного контролю над обчислювальним механізмом чи інфраструктурою; або знищення цілісності даних, або викрадення керованої інформації. Кіберінцидент розглядають як дії через використання комп'ютерних мереж, що призводять до фактичного або потенційно несприятливого впливу на інформаційну систему або інформацію.

Система виявлення вразливостей і реагування на кіберінциденти та кібератаки – це сукупність програмних та програмно-апаратних засобів, які забезпечують проведення цілодобового моніторингу, аналізу та передачі телеметричної інформації про кіберінциденти та кібератаки, які відбулися або відбуваються на об'єктах кіберзахисту і можуть мати негативний вплив на їх стале функціонування.

Підсистема оперативного центру реагування на кіберінциденти виявляє шкідливу активність, а також системні і мережеві аномалії на об'єктах кіберзахисту шляхом аналізу даних, отриманих з мережевих пристроїв (активні сенсори, міжмережеві екрани, сканери вразливостей), робочих та серверних станцій, систем авторизації, внутрішніх і зовнішніх джерел даних про кіберзагрози.

У 2022 році кібербезпекова ситуація в Україні зазнала сильних змін. Згідно з даними Державного центру кіберзахисту Держспецзв'язку, кількість зареєстрованих кіберінцидентів зросла в 2,8 рази порівняно з 2021 роком. Адже було опрацьовано 58 мільярдів подій, отриманих за допомогою засобів моніторингу, аналізу та передачі телеметричної інформації про кіберінциденти та кібератаки. При первинному аналізі виявлено 181 мільйон підозрілих подій інформаційної безпеки (ІБ), з яких 179 тисяч були визначені як критичні та потенційні кіберінциденти після додаткового аналізу. Безпосередньо аналітиками

безпеки було зареєстровано 415 саме кіберінцидентів. Особливу увагу привертають події ІБ категорій «02 Шкідливий програмний код» та «03 Збір інформації зловмисником». У 2022 році кількість подій, пов'язаних із шкідливим програмним кодом, зросла на 18,3%, а зі збором інформації зловмисниками — на 2,2% порівняно з 2021 роком. Було детектовано 87 389 підозрілих унікальних файлів в автоматичному режимі підсистемами Системи виявлення вразливостей і реагування на кіберінциденти та кібератаки.

У 2023 році тенденція зростання кіберінцидентів продовжилася. Кількість зареєстрованих кіберінцидентів збільшилася на 62,5% порівняно з аналогічним періодом за 2022 року. Було опрацьовано 80 мільярдів подій, виявлено 133 мільйони підозрілих подій ІБ, з яких 148 тисяч були визначені як критичні. Аналітики безпеки зареєстрували 1105 кіберінцидентів. Кількість подій, пов'язаних із шкідливим програмним кодом, зросла на 36,2%, а зі збором інформації зловмисниками — на 43,8% порівняно з 2022 роком. Було детектовано 1 516 861 підозрілий унікальних файлів.

Зловмисне програмне забезпечення призначене для проникнення, порушення або пошкодження комп'ютера чи мережі, зазвичай без відома власника. Кіберзлочинці та інші зловмисники використовують зловмисне програмне забезпечення, щоб захопити пристрій і пошкодити або шпигувати за його системами. Це може призвести до відстеження, пошкодження, викрадення або видалення ваших даних.

Література

1. Волосович С. Детермінанти виникнення і реалізації кіберризиків. / Волосович С., Клапків Л. - Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. 2018. № 3, С. 101-115.
2. Архипов О. Є. Вступ до теорії ризиків: інформаційні ризики : моногр. / О. Є. Архипов. — К. : Нац. акад. СБУ, 2015. — 248 с.
3. Архипов О. Є. Застосування рефлексивних моделей ризиків для захисту інформації в кіберпросторі Захист інформації, Том 19, №3, 2017. - С. 204-213.
4. <https://scpc.gov.ua/api/files/9c21855d-74da-45d1-90f9-5d4f6795996a>
5. <https://scpc.gov.ua/api/docs/sseb6a10-b7aa-4396-8b04-e0e4b7fca111/sseb6a10-b7aa-4396-8b04-e0e4b7fca111.pdf>
6. <https://publish.com.ua/biznes/zakhist-informatsiji-aktualnist-i-metodi.html#zasoby-zakhystu-informatsii>

В.В. Перхач

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник Л.Ф. Дзюба, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки

НАУКОВІ ДОСЯГНЕННЯ ВАЛОДДІ ВЕЙБУЛЛА

Ернст Ялмар Валодді Вейбулл - видатний шведський вчений, математик і інженер, який увійшов в історію науки завдяки своїм новаторським дослідженням у галузі статистики та теорії надійності. Його найвідомішим досягненням є розподіл Вейбулла, який широко використовують для моделювання напруцювання до відмови технічних систем та аналізу втоми матеріалів.

Ернст Ялмар Валодді Вейбулл народився 18 червня 1887 року в замку Вітшьовле, Сконе, Швеція, де його батько працював управителем маєтку. Вейбулл походив із родини, яка мала тісні зв'язки зі Scania, а саме створенням прапора для компанії. Також Вейбулл був двоюрідним братом історикам Лауріцу та Курту Вейбуллам.

Після закінчення середньої школи в 1905 році він приєднався до артилерії берегової охорони в якості мічмана. У 1907 році він піднявся в ранзі до підпоручика, у 1916 році - до капітана та до майора в 1940 році. Паралельно з військовою службою Валодді Вейбулл здобув ступінь цивільного інженера у Королівському технологічному інституті Стокгольма в 1911 році, а також ступінь бакалавра у 1912 році. У 1924 році закінчив навчання і став професором. Він отримав докторський ступінь в Упсальському університеті в 1932 році.

Після служби він працював шість років у дослідницькому відділі компанії "Nordiska Kullager", що спеціалізувалася на виробництві підшипників.

Пізніше Валодді Вейбулл повернувся до Королівського технологічного інституту, де по 1941 рік був професором машинобудування, а з 1941 по 1953 рік він отримав персональну наукову посаду професора інженерної фізики в Королівському технологічному інституті в Стокгольмі від виробника зброї Bofors.

У 1914 році, під час експедицій до Середземного моря, Карибського басейну та Тихого океану на дослідницькому кораблі «Альбатрос», Валодді Вейбулл написав свою першу статтю про поширення вибухових хвиль. Розробив методику використання зарядів вибухових речовин для визначення типу донних відкладень океану та їх потужності. Ця ж техніка все ще використовується сьогодні в морській розвідці нафти.

У 1939 році він опублікував свою статтю про розподіл Вейбулла випадкових величин у теорії ймовірностей і статистиці. Сьогодні цей розподіл активно використовують в галузях надійності, втоми матеріалів, руйнувань тощо. Одним з найважливіших досягнень Валодді Вейбулла стала його робота над плануванням та інтерпретацією даних про втому матеріалів, що привела до видання книги «Випробування на втому та аналіз результатів».

У 1951 році Валодді Вейбулл представив свою статтю про розподіл Вейбулла Американському товариству інженерів-механіків (ASME), використовуючи сім прикладів. Вчений опублікував багато статей про міцність матеріалів, втому, розрив твердих тіл, про підшипники і, звичайно, розподіл Вейбулла, а також одну книгу про аналіз втоми в 1961 році, 27 із цих статей були звітами для Військово-повітряних сил США.

Після того, як Валодді Вейбулл став професором емери том у 1953 році, він впродовж дванадцяти років працював консультантом для Військово-повітряних сил США. За цей час він написав багато звітів, які містять цінну інформацію про аналіз ймовірнісних розподілів та споріднені теми. Його робота, а також інші дослідження були підсумовані у книзі, співавтором якої став його син Горан. Книга мала бути видана Шведським національним інститутом оборонних досліджень. Професор Вейбулл продовжував бути активним консультантом і вивчав нові методи оцінки параметрів розподілу Вейбулла.

Впродовж своєї тривалої та продуктивної кар'єри професор Вейбулл отримав численні нагороди, серед яких докторський ступінь з філософії у 1932 році, медаль Полгема у 1940 році. Американське товариство інженерів-механіків нагородило Вейбулла своєю золотою медаллю в 1972 році. Велика золота медаль Шведської королівської академії інженерних наук була вручена йому особисто королем Швеції Карлом XVI Густавом в 1978 році.

Валоді Вейбулл був відданий своїй родині і пишався своїми дев'ятьма дітьми та численними внуками та правнуками. Доктор Вейбулл був членом багатьох видатних шведських академій і товариств і працював до останнього дня свого чудового життя. Помер 12 жовтня 1979 року в Ансі (Франція).

Валодді Вейбулл залишив неоціненну спадщину у науці та інженерії. Його теоретичні розробки та практичні дослідження зробили великий внесок у розуміння втоми матеріалів і сприяли розвитку статистичних методів аналізу. Розподіл Вейбулла досі використовується у багатьох сферах — від технічних систем до біомедицини, підтверджуючи його універсальність та значущість. Його життя і праці стали основою для сучасних методів оцінки надійності і прогнозування відмов, а також забезпечили йому почесне місце серед найвидатніших учених 20-го століття.

Література

1. Стаття з сайту “DBpedia” – <https://dbpedia.org>
2. Стаття “Глен Бойї з Red Wing” - https://myhero.com/Weibull_minnesota_06_ul
3. Стаття з Wikipedia - <https://uk.wikipedia.org>
4. Стаття з “Journal of Engineering Materials and Technology (липень 1997 рік)” – “Валодді Вейбулл – 90 років” - <https://asmedigitalcollection.asme.org>
5. Стаття “Історичний погляд на походження прапора Scania” - <https://www.scania.org/origins-of-the-scania-flag>

Д.А. Попівняк

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник Л.Ф. Дзюба, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки

ВИКОРИСТАННЯ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛЛА У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Сучасні військові операції та стратегічне планування потребують високої точності та прогнозованості в оцінці надійності військової техніки, боєприпасів, логістики та ефективності бойових дій [1]. Одним з ключових статистичних інструментів, що використовують для таких розрахунків, є розподіл Вейбулла. Цей розподіл дає змогу аналізувати напрацювання до відмови військової техніки, боєприпасів, оптимізувати логістичні процеси та навіть прогнозувати ризики втрати техніки на полі бою. З використанням цього розподілу можна прогнозувати затримки у постачанні, оптимізувати маршрути доставки та мінімізувати ризик втрат під час перевезення зброї. Під час військових конфліктів ризики доставки є високими через можливі атаки на склади та руйнування логістичних шляхів, тому використання цього розподілу дозволяє покращити планування[1] .

Розподіл Вейбулла є статистичною моделлю, що описує ймовірність відмови техніки залежно від її напрацювання. Випадковою величиною, яка розподілена за законом Вейбулла є напрацювання, яке може бути виміряне в годинах роботи, в кількості вистрілів для стволів артилерії, в мільйонах обертів для підшипників тощо. Функція щільності ймовірності розподілу має вигляд [2]:

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a} \right)^b}, \quad (1)$$

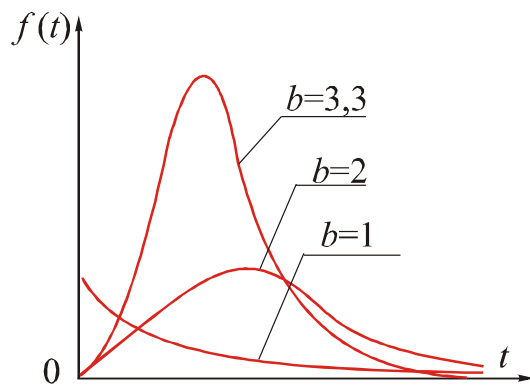


Рис.1. Функція щільності ймовірності розподілу Вейбулла

де t – напрацювання до відмови, a – параметр масштабу; b – параметр форми. Параметри розподілу оцінюють за результатами випробувань. Параметр форми визначає характер розподілу: якщо $b < 1$, то більшість відмов техніки відбувається одразу після виробництва, коли виявляються приховані дефекти. Коли $b = 1$, то відмови відбуваються з постійною ймовірністю і розподіл Вейбулла близький до експоненціального (рис. 1). Коли

$b > 1$, то відмови відбуваються унаслідок процесів деградації та старіння, тобто зростають з плином часу. При $b = 2$ розподіл Вейбулла близький до розподілу Релея, при $b \approx 3,3$ - близький до нормального розподілу (рис. 1).

Ймовірність безвідмовної роботи $R(t)$ та ймовірність відмови $F(t)$ техніки до заданого напрацювання t визначають за залежностями:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}; \quad F(t) = 1 - R(t). \quad (2)$$

У роботі [3] ймовірність безвідмовної роботи самохідної вогневої установки в умовах бойових дій описано залежністю $R(t) = e^{-\left(\left(\frac{t}{T}\right)^{a-1} + \varepsilon\right)t}$, де T - середній час напрацювання до відмови, a - параметр форми розподілу, ε - узагальнена величина відносних бойових втрат самохідних вогневих установок зенітного ракетного підрозділу від вогневого впливу з боку противника. У цій роботі наведено значення ε залежно від часу безперервної роботи та потрібних значень $R(t)$.

У сучасній війні в Україні цей розподіл застосовують для оцінки надійності дронів, прогнозування терміну служби артилерійських стволів, моделювання постачання боєприпасів і розрахунку ймовірності ураження цілей. Наприклад, аналіз ефективності систем HIMARS базується на ймовірнісних підходах, що дозволяють оцінювати результативність ударів. Також розподіл Вейбулла використовують для прогнозування часу можливої відмови боєприпасів, зокрема снарядів для самохідних артилерійських установок, термін придатності яких залежить від умов зберігання. Завдяки цьому можна визначати оптимальні умови зберігання та строки використання. Це зменшує ризики втрат і забезпечує ефективне використання ресурсів. Наприклад, снаряди для самохідних артилерійських установок мають обмежений термін придатності, який залежить від умов зберігання. Використання розподілу Вейбулла допомагає прогнозувати час можливої відмови, визначати оптимальні умови зберігання та строки використання, що зменшує ризики відмов та підвищує ефективність бойових дій.

Отже, розподіл Вейбулла є ключовим інструментом у військовій аналітиці. Його використання дозволяє оптимізувати бойові операції, військову логістику та прогнозувати надійність техніки. В умовах війни в Україні такий підхід допомагає ефективно розподіляти ресурси, оцінювати ризики та покращувати планування військових дій.

Література

1. Слюсаренко М. О., Семененко О. М., Поливода М. О., Карнаух Т. І. Методика оцінювання впливу безвідмовності військової техніки на визначення відносних втрат під час бойових дій. Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації. 2020. Вип. № 16(23). - С. 178-183.
2. Дзюба Л.Ф. Надійність технічних систем і техногенний ризик. Навчальний посібник/ Л.Ф.Дзюба, О. В.Меньшикова, М. І. Кусій – Львів: ЛДУ БЖД, 2018. – 145 с.
3. Гресь О. М. Оптимізація логістичних процесів забезпечення військових підрозділів в умовах активних бойових дій: український досвід. Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету. Сер.: Юриспруденція. 2024 № 71. - С. 4-7.

О.Я. Ожибко, Д.Р. Антоняк, О.Р. Дявіл

Львівський національний університет імені Івана Франка

Науковий керівник Л.Ю. Фірман, старший викладач вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ СЕГМЕНТАЦІЇ АВТОМОБІЛЬНИХ НОМЕРНИХ ЗНАКІВ НА ОСНОВІ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Зростання кількості транспортних засобів та інтенсивності дорожнього руху у населених пунктах і магістралях зумовлює необхідність автоматизації контролю за рухом та ідентифікацією транспортних засобів. За даними МВС України, упродовж 2024 року було зафіксовано понад 120 тисяч дорожньо-транспортних пригод, з яких більше 20 тисяч спричинили тяжкі наслідки для життя і здоров'я людей [1]. Системи автоматичного розпізнавання номерних знаків стали важливими складовими інтелектуальних транспортних систем, правоохоронних органів та систем безпеки. Ключовим етапом у процесі розпізнавання є сегментація зображень, точність якої на пряму залежить від використаних математичних алгоритмів та моделей. Згорткові нейронні мережі є одним із найефективніших сучасних методів для сегментації зображень. Основою цих мереж є операція згортки, яка дозволяє визначити взаємозв'язок між пікселями зображення за допомогою згорткового ядра. Згорткові операції забезпечують вилучення локальних ознак, які потім використовуються для подальшої класифікації. Для покращення точності сегментації застосовують метод атрофічних згорток (Atrous Convolution), який дозволяє збільшити поле огляду нейронної мережі без збільшення кількості обчислювальних ресурсів. Це досягається введенням коефіцієнта розширення. Окремим ефективним математичним модулем у сучасних мережах, зокрема в архітектурі DeepLabV3, є ASPP (Atrous Spatial Pyramid Pooling). Цей модуль забезпечує мультискалярний аналіз, застосовуючи кілька згорткових шарів з різними коефіцієнтами розширення. Завдяки використанню згорток з розширенням та модулів ASPP, сегментація стає більш точною та стійкою до змін умов освітлення і якості вхідних зображень. Згідно з результатами проведених досліджень, модель DeepLabV3 з архітектурою ResNet-101 досягає високих показників точності сегментації зображень номерних знаків (середній показник mIoU $\approx 89.57\%$)[4]. Подальші дослідження математичних моделей сегментації є перспективними для розвитку високоефективних автоматизованих систем комп'ютерного зору. Отже, використання сучасних математичних підходів у нейронних мережах і впровадження подібних математичних моделей у практичні системи дозволить значно знизити кількість помилок при ідентифікації номерних знаків, що посприятиме покращенню контролю дорожнього руху і, відповідно, підвищить загальну безпеку дорожнього руху.

СЕКЦІЯ 2. Математичні відкриття, що змінили світ

Ю.Г. Булавка

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

*Науковий керівник: **Я.П. Романчук**, кандидат фізико математичних наук, старший науковий співробітник, старший викладач кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ПІДВИЩЕННЯ МІЦНОСТІ РЕДУКТОРА ПОВЕРНЕННЯ ЛАНЦЮГІВ ТРАНСМІСІЇ МІННОГО ЗАГОРОДЖУВАЧА

Механізми приводу широко застосовують у різних галузях машинобудування для передачі енергії (перетворення руху) від джерела до робочого органу. Складовими частинами трансмісії механізму видачі мін у мінних загороджувачах є двоступеневий зубчастий черв'ячно-циліндричний редуктор, ланцюгова передача та транспортери. Їх працездатність залежить як від конструкції механізму видачі, так і від міцності зубців черв'ячного колеса редуктора, руйнування яких може привести до невиконання машиною функціонального призначення і втрат на полі бою.

Міцність деталей трансмісії є одним із ключових факторів, що визначає надійність мінного загороджувача ГМЗ-3. Сучасні технології виготовлення та підвищення міцності дозволяють значно збільшити термін їх служби. Проте важливо враховувати всі фактори, які впливають на зношування та руйнування деталей, для створення більш ефективних конструкцій.

За математичними співвідношеннями, відомими з курсу «Деталі машин», мною було перевірено контактну міцність черв'ячного колеса редуктора ГМЗ-3 – двоступеневого черв'ячно-циліндричного редуктора повернення ланцюгів дозвільного механізму.

Результати числових розрахунків підтвердили виконання умов міцності на контактні напруження та напруження згину. У роботі рекомендується використовувати черв'ячну передачу як швидкохідний ступінь, тому що зі збільшенням колової швидкості черв'яка складаються більш сприятливі умови для утворення стійкого масляного клину в черв'ячному зачепленні, і, отже, зменшуються втрати на тертя.

Тривала працездатність черв'ячної передачі може бути досягнута шляхом вибору відповідних матеріалів черв'яка і колеса та обмеження контактних і згинних напружень. Щоб підвищити надійність і довговічність роботи редукторів слід особливу увагу приділяти їх зносостійкості, втомній та контактній міцності, жорсткості, опору ударним навантаженням.

Тому потрібно модернізувати та вдосконалити окремі деталі редукторів при їх виготовленні чи ремонті (забезпечення точності розмірів і форми, надання поверхневому шару зубців необхідних фізико-механічних властивостей). Необхідно ширше впроваджувати інноваційні технології обробки контактних

поверхонь деталей машин, зокрема вдосконалені методи хіміко-термічної обробки зубчастих коліс. Якість поверхневого шару зубців коліс редуктора повинна бути високою, щоб при дії контактних напружень, температур і сил тертя робочі поверхні зубців могли протистояти їх пошкодженню та руйнуванню.

В.А. Гавалюк

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного

Науковий керівник А.П. Сенник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ САМОХІДНОГО КРАНА НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Сучасний розвиток машинобудування та підйомно-транспортного обладнання вимагає постійного вдосконалення методів дослідження та оцінки експлуатаційних характеристик технічних систем. Сьогоднішні збройні сили використовують різноманітні спеціалізовані крани, а саме мобільні автомобільні крани, гусеничні крани для важкопрохідної місцевості, кранові установки на базі військових вантажівок, порталні крани для морських та повітряних логістичних операцій тощо. Особливої уваги заслуговують самохідні крани, які відіграють надзвичайно важливу роль у військовій логістиці та забезпеченні бойової готовності сучасних збройних сил і вважається критично важливим обладнанням.

Актуальність дослідження визначається необхідністю підвищення надійності та безпеки підйомних механізмів самохідних кранів шляхом застосування сучасних математичних методів моделювання. Традиційні підходи до оцінки міцнісних характеристик мають певні обмеження, оскільки не завжди враховують складні динамічні навантаження та комплексні фактори впливу на структурні елементи механізму.

Мета дослідження полягає в розробці та апробації математичної моделі для комплексного визначення міцнісних характеристик підйомних механізмів самохідного крана. Математичне моделювання дозволяє з достатньою точністю створити віртуальну модель підйомного механізму, яка максимально наближена до реальних умов експлуатації. За допомогою комп'ютерного моделювання можна проводити віртуальні експерименти, спрямовані на визначення напружено-деформованого стану основних конструктивних елементів.

Загальна математична модель підйомного механізму може бути представлена системою диференціальних рівнянь, що описують взаємозв'язок між діючими силами, переміщеннями та швидкостями. Розглянуто механічну систему, що складається з підйомного крана з вантажем масою m , підвішеним на тросі жорсткістю k . Рух вантажу описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k y = F(t),$$

де $y(t)$ - вертикальне переміщення вантажу, c - коефіцієнт демпфування, $F(t)$ - зовнішня сила, яка може бути пов'язана з роботою двигуна.

Важливим аспектом є також розрахунок потужності двигуна, необхідної для підйому вантажу. Окремо, для багатоланкових механізмів, таких як крани-маніпулятори, застосовуються відомі з курсу механіки методи кінематики та динаміки. Положення кінцевого ефектора описується матрицею перетворення, яка залежить від кутів повороту ланок $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Наприклад, для дволанкового механізму:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

де l_1, l_2 - довжини ланок.

Таким чином, математичне моделювання дає можливість точно описувати динаміку підйомних механізмів, що є основою для їх проектування та вдосконалення. Використання диференціальних рівнянь, методів кінематики та енергетичних розрахунків забезпечує ефективне управління та мінімізацію енерговитрат.

Сучасні методи математичного моделювання дозволяють використовувати чисельні методи та комп'ютерне моделювання для більш точного прогнозування поведінки підйомних механізмів. Застосування методів скінченних елементів, імітаційного моделювання та комп'ютерної механіки суттєво підвищує точність та інформативність розрахунків.

Практичне значення математичного моделювання підйомних механізмів полягає в можливості попереднього визначення їхніх характеристик, прогнозування ресурсу, оцінки надійності та безпеки експлуатації. Розроблені математичні моделі дають змогу здійснювати оптимізацію конструктивних параметрів, передбачати поведінку механізму за різних навантажень та умов навколишнього середовища.

Р.Р. Швагла

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник: М.І. Войтович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СИЛ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ РАМНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВІЙСЬКОВИХ МОСТІВ ЗА ДІЇ ПЕРІОДИЧНОГО В ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ

В процесі виконання завдань інженерного забезпечення в зоні бойових дій на сході і півдні України виникає необхідність відновлення зруйнованих мостів, а також їх дублювання у стислі терміни. Тому вимоги щодо підготовки особового складу інженерних підрозділів зростають, що в свою чергу вимагає поглиблення знань як матеріальної частини мостобудівної техніки, так і більш якісного виконання завдань зведення військових мостів. Для забезпечення нормальної роботи інженерних споруд в процесі їх експлуатації на стадії проектування необхідно оцінити міцність і жорсткість їх елементів, зокрема і рамних, в умовах дії як статичних, так і динамічних навантажень.

В роботі розглядається мостовий елемент у вигляді плоскої рами, один кінець якої жорстко затиснутий, другий – шарнірно закріплений. Рама складається з двох вертикальних і одного горизонтального елементів, що жорстко з'єднані між собою. На горизонтальному елементі рами розміщений електродвигун маси m , який здійснює n обертів за хвилину і створює при цьому відцентрову силу інерції Q , що виникає внаслідок незрівноваження рухомих мас двигуна. Розглянуто поперечний переріз рами у вигляді двотавра №10. Досліджено існування небезпеки виникнення резонансу; обчислені максимальні нормальні динамічні напруження в рамі.

Для визначення статичного переміщення центра мас двигуна, через яке виражається колова частота власних коливань системи двигун-рама, і статичних нормальних напружень у рамі використано метод сил розрахунку статично невизначуваних стрижневих систем. Цей метод, як відомо, зводиться до складання і розв'язування системи канонічних рівнянь, яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь на додаткові зусилля, які виникають у таких системах. Коефіцієнти і вільні члени цих рівнянь виражаються через відповідні інтеграли, які обчислюються способом Сімпсона - Корноухова або способом Верещагіна. Кількість цих рівнянь рівна числу додаткових в'язей, накладених на стрижневу систему (у даному випадку раму). Оскільки розглядувана рама є один раз статично невизначувана, то система канонічних рівнянь для неї вироджується і буде складатись з одного канонічного рівняння, розв'язавши яке визначимо так зване «зайве» зусилля. Таким чином отримаємо вже статично визначувану систему.

Визначені колові частоти власних і змущених коливань системи рама-електродвигун. Встановлено, що для заданих в роботі параметрів системи

небезпеки виникнення явища резонансу немає, оскільки колові частоти власних і змущених коливань системи відрізняються більше, ніж на 30%. Визначені коефіцієнт зростання коливань та динамічний коефіцієнт при коливаннях. Визначені також характеристики циклу напружень: максимальні, мінімальні та середні нормальні напруження, а також коефіцієнт асиметрії циклу.

В.А. Гавалюк

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного

Науковий керівник А.П. Сенник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ САМОХІДНОГО КРАНА НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Сучасний розвиток машинобудування та підйомно-транспортного обладнання вимагає постійного вдосконалення методів дослідження та оцінки експлуатаційних характеристик технічних систем. Сьогоднішні збройні сили використовують різноманітні спеціалізовані крани, а саме мобільні автомобільні крани, гусеничні крани для важкопрохідної місцевості, кранові установки на базі військових вантажівок, порталні крани для морських та повітряних логістичних операцій тощо. Особливої уваги заслуговують самохідні крани, які відіграють надзвичайно важливу роль у військовій логістиці та забезпеченні бойової готовності сучасних збройних сил і вважається критично важливим обладнанням.

Актуальність дослідження визначається необхідністю підвищення надійності та безпеки підйомних механізмів самохідних кранів шляхом застосування сучасних математичних методів моделювання. Традиційні підходи до оцінки міцнісних характеристик мають певні обмеження, оскільки не завжди враховують складні динамічні навантаження та комплексні фактори впливу на структурні елементи механізму.

Мета дослідження полягає в розробці та апробації математичної моделі для комплексного визначення міцнісних характеристик підйомних механізмів самохідного крана. Математичне моделювання дозволяє з достатньою точністю створити віртуальну модель підйомного механізму, яка максимально наближена до реальних умов експлуатації. За допомогою комп'ютерного моделювання можна проводити віртуальні експерименти, спрямовані на визначення напружено-деформованого стану основних конструктивних елементів.

Загальна математична модель підйомного механізму може бути представлена системою диференціальних рівнянь, що описують взаємозв'язок між діючими силами, переміщеннями та швидкостями. Розглянуто механічну систему, що складається з підйомного крана з вантажем масою m , підвішеним на тросі жорсткістю k . Рух вантажу описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k y = F(t),$$

де $y(t)$ - вертикальне переміщення вантажу, c - коефіцієнт демпфування, $F(t)$ - зовнішня сила, яка може бути пов'язана з роботою двигуна.

Важливим аспектом є також розрахунок потужності двигуна, необхідної для підйому вантажу. Окремо, для багатоланкових механізмів, таких як крани-маніпулятори, застосовуються відомі з курсу механіки методи кінематики та динаміки. Положення кінцевого ефектора описується матрицею перетворення, яка залежить від кутів повороту ланок $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Наприклад, для дволанкового механізму:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

де l_1, l_2 - довжини ланок.

Таким чином, математичне моделювання дає можливість точно описувати динаміку підйомних механізмів, що є основою для їх проектування та вдосконалення. Використання диференціальних рівнянь, методів кінематики та енергетичних розрахунків забезпечує ефективне управління та мінімізацію енерговитрат.

Сучасні методи математичного моделювання дозволяють використовувати чисельні методи та комп'ютерне моделювання для більш точного прогнозування поведінки підйомних механізмів. Застосування методів скінченних елементів, імітаційного моделювання та комп'ютерної механіки суттєво підвищує точність та інформативність розрахунків.

Практичне значення математичного моделювання підйомних механізмів полягає в можливості попереднього визначення їхніх характеристик, прогнозування ресурсу, оцінки надійності та безпеки експлуатації. Розроблені математичні моделі дають змогу здійснювати оптимізацію конструктивних параметрів, передбачати поведінку механізму за різних навантажень та умов навколишнього середовища.

Д.О. Панко

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Науковий керівник: Р.А. Ковальчук, кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

РОЗРОБКА РЕКОМЕНДАЦІЙ ЩОДО ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ З ОДНОВІСНИМИ ПРИЧЕПАМИ ПІД ЧАС РУХУ ПО ПЕРЕСІЧНІЙ МІСЦЕВОСТІ

Одновісні причепа активно застосовуються для транспортування різноманітних вантажів, апаратури та спеціалізованого обладнання. Однак вибір базової підвіски, що використовує ресорні або пружинні елементи, не завжди гарантує оптимальні умови експлуатації. Це особливо актуально для віброчутливих вантажів або апаратури, закріпленої стаціонарно на причепі. Для таких спеціалізованих моделей необхідна модернізація системи підресорювання або встановлення додаткового віброзахисного обладнання.

Розрахункова модель одновісного причепа зі стаціонарно закріпленим вантажем представлена як система двох тіл: невідресорена маса та відресорена маса разом із встановленим обладнанням. Ці елементи поєднані відресорювальною системою, що включає пружні амортизатори та демпферні пристрої. На відміну від стандартного (безмоментного) з'єднання півпричепа з тягачем, у даній моделі передбачено додатковий пристрій, який передає від тягача крутний момент. Цей момент прагне утримати відресорену частину причепа у горизонтальному положенні, обертаючи її навколо поздовжньої осі, що проходить через точку з'єднання причепа з тягачем і середню точку між амортизаторами. Величина цього моменту прямо пропорційна куту повороту відресореної частини причепа навколо поздовжньої осі.

Для опису відносного положення відресореної частини причепа достатньо використати одну узагальнену координату – кут її повороту навколо поздовжньої осі. Дослідження зосереджене на аналізі впливу поперечних кутових коливань відресореної частини на стійкість руху причепа вздовж криволінійної траєкторії.

У дослідженні розглядаються виключно власні коливання відресореної маси причепа. Вони можуть виникати, зокрема, внаслідок наїзду на окрему нерівність, що враховується через початкові умови. Максимальні значення сил опору є незначними порівняно з піковими значеннями відновлюючої сили пружних амортизаторів.

Аналітичні залежності, отримані на основі розробленої моделі, та відповідні графіки свідчать, що критична швидкість стійкого руху на криволінійній ділянці зменшується зі збільшенням амплітуди поперечно-кутових коливань. Зокрема, зростання амплітуди коливань півпричепа на 20–30% призводить до зниження критичної швидкості на 10–20%. Встановлення на тягачі додаткового пристрою,

який протидіє перекиданню причепа, дозволяє підвищити критичну швидкість стійкого руху. Чим вищі жорсткісні характеристики цього пристрою, тим більшим є значення критичної швидкості.

О.О. Ковтунович, Д.С. Заїченко

Національний університет «Львівська політехніка»

Науковий керівник **В.В. Бариляк**, кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУР У ЗАЛІЗОБЕТОННІЙ КОНСТРУКЦІЇ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ “FEMAP WITH NASTRAN”

Метою роботи є моделювання методом скінчених елементів пожежі і дослідження поширення температури в конструкції залізобетонної плити перекриття. Для вирішення даної нестационарної температурної задачі методом скінчених елементів було застосовано програмний комплекс Femap with Nastran. Процес моделювання включає наступні етапи:

- створення 3D-моделі плити із урахуванням механічних характеристик бетону та сталі;
- моделювання процесу займання та поширення полум'я;
- визначення температури елементів плити перекриття під час пожежі та визначення та встановлення часу, протягом якого температура досягне критичних значень.

Для моделювання плити перекриття було обрано конструкцію пустотілої плити типу ПК із стандартними розмірами 1200x220x6000. Спосіб кріплення – опираєння на стіни з двох коротших сторін (шарнірні опори).

Залежність для моделювання поширення пожежі обрано наступну [1]:

for Fire in Office (European standard)

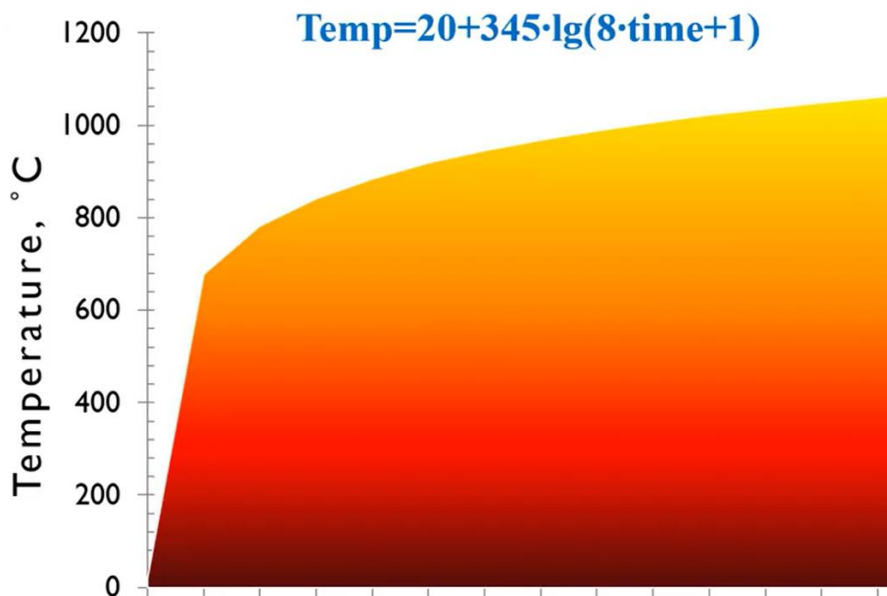


Рис. 1. Часова залежність розподілу температури під час пожежі.

Отримано модель розподілу температури в залізобетонній конструкції та визначено встановлено час, за який температура сягатиме критичних значень:

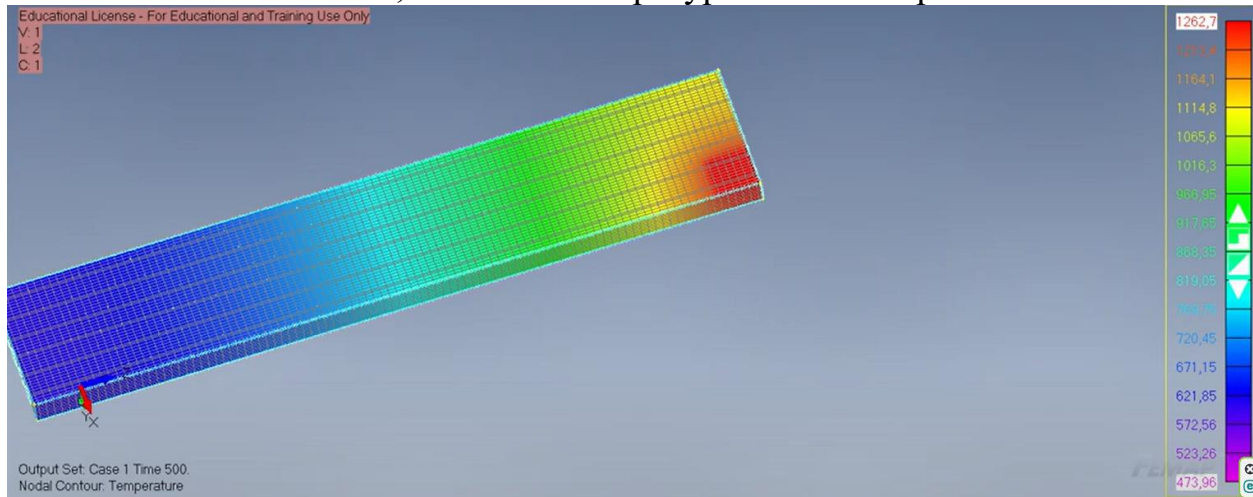


Рис. 2. 3D- модель розподілу температури в залізобетонній плиті під час пожежі.

Отримані результати моделювання показують, що критичні температурні зміни виникають тільки в області загоряння і температура перевищує 1600 градусів Цельсія. Важливий вплив на величину максимальної температури має температура навколишнього середовища і інтенсивність тепловіддачі конструкції.

Література

1. Peter Lombergar, Karel Flisar, Damijan Miklavčič, Samo Mahnič-Kalamiza. Time-dependent model of temperat'ure distribution in continuous flow pulsed electric field treatment chambers. University of Ljubljana, Faculty of Electrical Engineering, Tržaška c. 25, SI-1000 Ljubljana, Slovenia. 2024. -10 p.

О. Грищенко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЧИСЛО π : ОДВІЧНА ЗАГАДКА

Число π – це одне з найвідоміших і найзагадковіших чисел у математиці. Воно є ірраціональним і трансцендентним числом, що визначає співвідношення між довжиною кола і його діаметром. Його значення приблизно дорівнює 3,14159...

$$\pi = \frac{l}{d}$$

Так як число π є ірраціональним числом, то його не можна виразити дробом. Проте дріб $\frac{22}{7}$ часто застосовуються для наближення числа π .

1. Походження символу π

Символ π вперше був використаний валлійським математиком Вільямом Джонсом у 1706 році. Він обрав грецьку літеру π як скорочення від слова периметр, шістнадцята літера грецької абетки, в системі грецьких чисел, має значення 80. Символ став популярним завдяки працям Леонарда Ейлера в XVIII столітті.

2. Історичні витоки

Його історія починається в часи античних греків Архімеда та Евкліда. Його перші записи є вже на папірусах Стародавнього Єгипту й Месопотамії. У XIV ст. індійський математик Мадхава із Сангамаграми відкрив ряд для обчислення цієї константи, який згодом вдосконалили європейські математики у XVII ст.

Своє «ім'я» π вперше отримало від британського математика Вільяма Джонса в 1706 році. Але загальноприйнятим це позначення грецькою літерою π стало завдяки Леонарду Ейлеру. Швейцарський математик використав позначення « π » у своїх роботах (1737 рік). Впродовж століть науковці намагалися розрахувати значення константи, проте було відомо лише кілька знаків після коми. З появою комп'ютерів з'явилася можливість максимально точно розрахувати чимало знаків після коми.

3. Математичне значення

Число π не тільки використовується для обчислення довжини кола та площі круга, але й зустрічається в багатьох інших галузях математики та фізики, наприклад:

- Формули тригонометрії (періоди синусоїди та косинусоїди).
- Аналіз (рівняння Фур'є та розв'язки диференціальних рівнянь).
- Теорія ймовірностей.

4. Цікаві факти про число π :

- У 1882 році німецький математик Фердинанд фон Ліндеман довів, що π є трансцендентним числом, тобто його неможливо отримати як корінь жодного алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами.
- День числа π святкується щороку 14 березня (3/14 за американським форматом дати). Це також день народження Альберта Ейнштейна.
- Число π — це більше, ніж просто математична константа. Воно є символом нескінченності та гармонії у світі чисел і природи.

5. Значення та використання числа π в різних галузях:

Значення π знайшло своє місце в багатьох галузях науки та техніки. Його використовують у прогнозі погоди, світовій статистиці та інших потужних обчислюваннях. Завдяки своїй ірраціональності й нескінченності, π використовується в деяких алгоритмах криптографії. У геометрії воно дає змогу обчислити площу кола та об'єм кулі. У статистиці ця константа допомагає визначити ймовірність випадкової події. У комп'ютерних науках воно застосовується в алгоритмах моделювання та обробки сигналів, у деяких методах шифрування. В астрономії цю математичну константу використовують під час визначення орбітальних параметрів планет, супутників, під час вимірювання відстані в космосі.

6. Сучасні досягнення

Сучасні обчислення числа π включають трильйони знаків після коми, використовуючи суперкомп'ютери. Однак у практичних розрахунках зазвичай вистачає кількох десяткових знаків. Число π символізує гармонію між простими геометричними формами та складними математичними концепціями. Його дослідження продовжують надихати математиків, фізиків і філософів.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

В. Іванишин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ДЕЯКІ ЗАБУТІ ІМЕНА УКРАЇНСЬКИХ МАТЕМАТИКІВ

Вища математика асоціюється із формулами, теоремами, доведеннями тощо. Проте, історія розвитку математики в Україні має свої унікальні корені, які залишаються маловідомими. Забуті імена українських предків, що зробили значний внесок у математичну науку, заслуговують на особливу увагу. У Середньовіччі та в епоху Відродження українські землі були важливим осередком культурного та наукового розвитку. Київська Русь, а пізніше Гетьманщина, підтримували освітні та наукові інституції, де розвивалися математика. Одним із таких центрів був Острозький колегіум, заснований у 1576 році, де викладали арифметику, геометрію та інші основи математики. Ці знання були необхідними не лише для торгівлі та будівництва, а й для астрономічних спостережень, військової стратегії та навігації. Важливо зазначити, що математика, проникала у різні сфери суспільного життя, наприклад, обчислення податків і регулювання торгівлі, будівництво укріплень для захисту держави та навігація для міжнародної торгівлі – все це базувалося на математичних розрахунках. Відтак, математична культура українців розвивалася разом із загальною освітою та культурою. Згадаємо деяких українських корифеїв – математиків.

Юрій Дрогобич (Котермак) був одним із перших українських науковців, які здобули європейське визнання. У XV столітті він викладав в університеті Болоньї, де вивчав і викладав астрономію та математику. Його праці містять математичні обчислення для астрономічних прогнозів, що стали важливими у розвитку науки. У праці "Прогностична оцінка 1483 року" він використав математичні методи для передбачення астрономічних явищ, що мало велике значення для науки того часу. Ю. Дрогобич був автором перших друкованих астрономічних праць у Європі. Його викладацька діяльність сприяла популяризації математики серед студентів університету. Ю. Дрогобич мав важливу роль у розвитку перших шкіл астрономії та математики на українських землях.

Мелетій Смотрицький, хоча й більше відомий як мовознавець і автор "Граматики словенської", також відомий своїм захопленням у сфері математики. Його праці в Острозькій академії сприяли поширенню математичної грамотності серед української еліти. Завдяки його зусиллям, математика стала частиною освітньої програми для майбутніх поколінь українських науковців. Важливим було інтегрування знань із математики у релігійні студії, що сприяло розвитку аналітичного мислення серед українських духовних і освітніх лідерів. Праці Мелетія використовувалися для підготовки перших підручників, які містили елементи арифметики та геометрії.

Іван Феценко-Чопівський був видатним інженером, математиком та педагогом початку ХХ століття. Він активно займався популяризацією точних наук, викладав математику та механіку в Київському політехнічному інституті. Його роботи включають дослідження з теорії еластичності та прикладної математики, які стали головною основою для подальших досліджень у цій сфері. Він також був автором кількох підручників із математичних дисциплін, які використовувалися у вищій освіті України. І. Феценко-Чопівський розробив методики викладання математики, які допомогли підвищити рівень знань студентів у технічних спеціальностях. Багато його учнів стали відомими науковцями.

Василь Каразін, засновник Харківського університету, був ентузіастом точних наук. Хоча його ім'я більше пов'язують із природничими науками, він сприяв популяризації математики. Завдяки його зусиллям було створено умови для викладання та дослідження математичних дисциплін у Харкові, що заклало основу для розвитку науки у Східній Україні. Він був активним ініціатором інтеграції математичних знань у природничі науки. Каразін також сприяв залученню іноземних науковців, які викладали математику в Україні, що підвищило рівень освітніх програм.

Знання та відкриття цих науковців заклали основи для подальшого розвитку математики в Україні, до прикладу, праці Остроградського залишаються фундаментальними у сучасній фізиці та інженерії, а праці Ю. Дрогобича показують, як математика використовувалася у поєднанні з іншими науками для вирішення практичних завдань тощо.

Вивчення забутих імен українських математиків має не лише історичну, але й освітню цінність. Це надихає молодих науковців, допомагає зрозуміти багатство української науки та сприяє формуванню національної ідентичності. Популяризація досягнень українських корифеїв сприяє зміцненню української науки у світовій спільноті. Відновлення пам'яті про забуті імена допомагає не лише формувати національну ідентичність, але й створює місток між минулим і майбутнім, підкреслюючи значення освіти, науки та культури для суспільства.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

В. Іванишин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКИ ГАЛИЧИНИ МІЖВОЄННОГО ПЕРІОДУ ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ

Період між першою та другою світовими війнами став часом значних змін для Галичини, яка входила до складу Польської Республіки. У цей час регіон стає центром розвитку наукової думки, завдяки активній діяльності університетів та наукових установ. Львів, як один із головних академічних центрів регіону, дав початок багатьом науковим відкриттям і став домівкою для видатних математиків, таких як Стефан Банах, Гуго Штейнгауз, Станіслав Улам Владислав Орліч, Герман Ауербах, Владислав Нікліборц, Юзеф Шраєр, Станіслав Улям, Мирон Зарицький, Марк Кац, Маєр Айдельгайт. До цієї групи також належали і професори Львівської Політехніки Антоній Ломницький, Казимир Куратовський, Влодзімеж Стожек.

Після закінчення Першої світової війни територія Галичини увійшла до складу Польської Республіки, що зумовило появу нових політичних та соціальних викликів для наукової спільноти. Львівський університет та Львівська політехніка стали важливими осередками освіти та досліджень у Галичині. У цей час польська наукова школа активно розвивалася, а досягнення математиків регіону вплинули на світову науку.

Львівська математична школа стала одним із найвизначніших явищ у математиці міжвоєнного періоду. Її засновником і натхненником був Стефан Банах — один із найвизначніших математиків XX століття. Основною галуззю досліджень школи був функціональний аналіз, зокрема теорія банахових просторів, яка згодом отримала широке застосування в різних наукових дисциплінах.

Стефан Банах - був центральною фігурою Львівської математичної школи. Його роботи в галузі функціонального аналізу стали революційними, зокрема монографія "Теорія операцій", надрукована у 1932 році, яка заклала основи сучасного функціонального аналізу. Банах також був співавтором багатьох важливих наукових результатів у теорії множин, топології та функціональних рівняннях.

Гуго Штейнгауз, близький колега Банаха, зробив значний внесок у розвиток теорії ймовірностей та математичного аналізу. Його наукова праця "Математичний словник" стала корисним джерелом для науковців у різних галузях. Крім того, він активно займався популяризацією математики, сприяючи залученню молоді до наукової роботи.

Одним із унікальних елементів Львівської математичної школи була так звана "Львівська кафешка" — неформальне місце зустрічей математиків у кав'ярні "Шотте". У цій атмосфері математичних дискусій народжувалися нові ідеї та вирішувалися складні задачі. У "кафешці" був "Математичний зошит", де записували найцікавіші задачі та їх рішення. Дослідження, проведені у Львівській математичній школі, стали основою для багатьох сучасних напрямків математики. Записи велися переважно польською мовою, велися протягом 1935—1941 років і припинилися лише з окупацією Львова німецькими військами. Загалом у книзі записано 193 математичні задачі, серед яких є як фундаментальні проблеми функціонального аналізу, так і просто цікаві головоломки. А саме, теорія банахових просторів знайшла застосування в квантовій механіці, обчислювальній математиці та економіці. Методи, розроблені у Львові, сприяли створенню нових математичних теорій, які використовуються й сьогодні.

Станіслав Улам, учень Львівської школи, згодом став одним із провідних математиків США. Він зробив значний внесок у розвиток теорії ймовірностей, комбінаторики та математичної фізики.

Маріан Смолуховський працював у галузі статистичної фізики та математичного аналізу, зробивши важливі відкриття в теорії броунівського руху.

Юзеф Перацкий був відомий своїми роботами в теорії чисел та математичній логіці.

Математики Галичини міжвоєнного періоду заклали фундамент для багатьох сучасних галузей науки. Їх спадщина продовжує надихати науковців у всьому світі, а методи та теорії, розроблені у Львівській математичній школі, залишаються актуальними й сьогодні. Науковий подвиг цих видатних математиків є яскравим прикладом того, як навіть у складних історичних умовах можна досягти визначних результатів.

Література

1. Koziński J. Banach — geniusz ze Lwowa. — Warszawa: Żak, 1999. — 112 s. — ISBN 83-88149-02-4. (пол.)
2. R. Daniel Mauldin The Scottish Book: Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book. — Cham: Birkhäuser, 2019. — 340 s. — ISBN 978-3-319-79432-7. (англ.)
3. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
4. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
5. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

А. Коржик

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА В ЕКОНОМІЦІ ТА ФІНАНСАХ

Математика пронизує всі сфери людської діяльності, включаючи економіку та фінанси. Уявити сучасний світ без математичних обчислень неможливо. Від простих обчислень у торгівлі до складних фінансових моделей — все це ґрунтується на математичних законах. Розглянемо історичний розвиток математичних методів в економіці та фінансах, їхнє сучасне застосування та перспективи в майбутньому.

Математика в економічній діяльності з'явилася ще за часів Стародавнього Вавилону та Єгипту. У Вавилоні, понад 4 тисячі років тому, розраховували податки, документували боргові зобов'язання на глиняних табличках. Система числення була шістдесятковою, що дозволяло здійснювати складні розрахунки, зокрема розподіл земель чи оцінку товарів. В Єгипті геометрія застосовувалася для визначення площі сільськогосподарських угідь після розливів Нілу, а також для обчислення обсягів зерносховищ. Ці знання стали фундаментом економічного обліку.

У Середньовіччі математика отримала нове застосування у фінансах. У XIV столітті в Італії з'явилися перші банки, які використовували арифметику для обчислення відсотків та управління кредитами. Векселі — попередники сучасних боргових інструментів — дозволяли здійснювати міжнародні транзакції. У цей же час Фібоначчі ввів десяткову систему числення в Європу, що значно полегшило обчислення у фінансовій діяльності. У XVIII-XIX століттях економіка почала перетворюватися на науку завдяки працям Адама Смітта, Девід Рікардо та Томаса Мальтуса. Вони використовували математичні методи для формулювання економічних законів.

Сьогодні математика є фундаментом сучасної економіки та фінансів. Завдяки досягненням у галузі інформатики та математичного моделювання, економісти можуть аналізувати великі масиви даних, створювати прогнози та оцінювати ризики. Одним із головних математичних інструментів є статистичний аналіз, який дозволяє досліджувати залежності між економічними змінними. Також широке застосування має теорія ймовірностей, яка використовується для оцінки ризиків у фінансах. Наприклад, модель VaR (Value at Risk) дозволяє визначити можливі втрати інвестиційного портфеля у певний часовий період з заданою ймовірністю. Іншою важливою галуззю є алгоритмічна торгівля, яка використовує складні математичні моделі для автоматизованого укладання угод на фондовому ринку. Такі моделі працюють із мілісекундною швидкістю, здійснюючи тисячі операцій за секунду. Це значно підвищує ефективність торгівлі, але створює ризики, якщо

алгоритми працюють із помилковими даними. Математика є основою криптовалют. Алгоритми шифрування забезпечують безпеку. Математика буде відігравати вирішальну роль у майбутньому економіки. Розвиток таких технологій, як штучний інтелект, великі дані (Big Data) і квантові обчислення, відкриває нові горизонти для застосування математичних моделей.

Штучний інтелект здатний аналізувати величезні масиви фінансових даних, знаходячи закономірності, які неможливо виявити традиційними методами. Наприклад, моделі машинного навчання використовуються для прогнозування цін на акції або створення рекомендацій для інвесторів. Квантові комп'ютери обіцяють революцію у фінансовій сфері, оскільки саме вони можуть вирішувати задачі, які недоступні для класичних комп'ютерів. Зокрема, вони можуть значно прискорити обчислення для оптимізації інвестиційних портфелів, оцінки фінансових ризиків.

У майбутньому розвиток криптовалют і технологій блокчейн сприятиме створенню нових фінансових інструментів. Алгоритми криптографії стануть ще складнішими, забезпечуючи високий рівень безпеки для фінансових систем. Математика дозволить створити більш стабільні моделі для регулювання міжнародної торгівлі, боротьби з кризами та впровадження інноваційних економічних механізмів.

Отже, математика є основою всіх фінансових і економічних процесів. Вона дозволила людству розвивати банківські системи, створювати нові фінансові інструменти та забезпечувати стабільність економік. У сучасному світі її роль стає ще більш вагомою, особливо у зв'язку з автоматизацією та цифровізацією.

Майбутнє математики в економіці виглядає дуже перспективно. Інновації в галузі квантових обчислень, штучного інтелекту та блокчейну обіцяють змінити уявлення про фінанси та економіку. Освіта в галузі математики та її інтеграція в реальні економічні процеси стануть запорукою розвитку майбутніх поколінь.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

М.І. Беззубка

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.М. Сов'як**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ЯК РОЗПЛУТАТИ ВСЕСВІТНЄ ПАВУТИННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Сучасний світ нерозривно пов'язаний із цифровими технологіями, у центрі яких — інтернет. Але мало хто замислюється, що в основі багатьох сервісів, які ми використовуємо щодня, лежать фундаментальні математичні концепції. Однією з таких є лінійна алгебра — розділ математики, що вивчає вектори, матриці та лінійні перетворення. Класичним прикладом застосування лінійної алгебри у цифровій сфері є алгоритм PageRank, розроблений Ларрі Пейджем і Сергієм Бріном — засновниками Google. Цей алгоритм дозволяє оцінити важливість вебсторінки на основі структури посилань, а не змісту. Основна ідея полягає в тому, що сторінка вважається важливою, якщо на неї ведуть посилання з інших важливих сторінок.

Математично це формалізується як система лінійних рівнянь, де кожна сторінка отримує оцінку (PageRank), яка ітеративно оновлюється на основі оцінок сторінок, що на неї посилаються. У спрощеному прикладі з трьома сторінками X, Y і Z, ранг кожної сторінки оновлюється за формулами:

$$x' = z \quad y' = \frac{1}{2}x \quad z' = \frac{1}{2}x + y$$

Цей процес ітерацій триває до стабілізації значень. Отримана система рівнянь легко зводиться до лінійної та розв'язується за допомогою методів лінійної алгебри, зокрема — обчислення власних векторів матриць. У реальних умовах таких сторінок — мільярди, тому оптимізація обчислень є критичною. Саме тому створення ефективних алгоритмів розв'язання систем лінійних рівнянь — одне з головних завдань прикладної лінійної алгебри. Покращення навіть на кілька відсотків у масштабах глобальної мережі має величезне значення: це дозволяє точніше формувати результати пошуку, ефективніше підбирати рекомендації для користувачів і навіть економити ресурси серверів.

Таким чином, завдяки лінійній алгебрі математика не просто «оточує» нас — вона визначає спосіб, у який ми бачимо й інтерпретуємо інформацію в цифрову епоху.

Лінійна алгебра є невід'ємною складовою цифрової цивілізації. Її методи і принципи лежать в основі алгоритмів, які формують логіку роботи інтернету та багатьох інших інформаційних систем. Це яскраво ілюструє, як абстрактна наука перетворюється на інструмент практичного пізнання й управління складними структурами сучасного світу.

І.С. Недодаєв

Херсонський аграрно-економічний університет

Науковий керівник **Т.П. Білоусова**, старший викладач кафедри менеджменту, маркетингу та інформаційних технологій

ЗАКОНОПРОЕКТ ПРО ЧИСЛО π В ІНДІАНИ: ІСТОРІЯ МАТЕМАТИЧНОГО КУРЙОЗУ

Протягом багатьох століть число π , ця дивовижна та незбагненна математична константа, бентежило уми та надихало (а часом і доводило до відчаю) математиків, фізиків та філософів у всьому світі. Воно визначається як *відношення довжини кола до його діаметра* і має фундаментальне значення для геометрії та багатьох інших галузей науки. Вже з найпростіших геометричних міркувань, порівнюючи довжину кола з периметрами вписаного та описаного навколо нього квадратів, стає очевидним, що π більше 2 і менше 4. Однак значно складніше довести, що π є ірраціональним числом, тобто його неможливо виразити у вигляді простої дробі a/b , де a і b - цілі числа. Ця ірраціональність робить обчислення π нескінченним та неперіодичним, що завжди кидало виклик людському розуму та обчислювальним можливостям. Сучасні суперкомп'ютери обчислили вже трильйони знаків після коми числа π , розкриваючи його дедалі нові глибини, але жодної явної закономірності чи повторюваної послідовності в цій нескінченній низці цифр так і не було виявлено.

Мабуть, найдивовижніша та найабсурдніша спроба "спростити" число π , звільнивши його від "тягаря" ірраціональності, пов'язана з курйозним випадком, що стався в 1897 році в штаті Індіана, США. Ця історія, відома як "Законопроект про число π в Індіані"[1], є яскравим прикладом того, як математичне невігластво та самовпевненість можуть призвести до спроб законодавчого регулювання наукових констант.

Головним "героєм" цієї історії був Едвард Джонстон Гудвин, лікар за професією, але з сильною схильністю до математики (хоча й без належної математичної підготовки). Гудвин вважав себе математичним генієм і був переконаний, що розв'язав давню проблему "квадратури круга" — завдання побудови квадрата, площа якого дорівнює площі заданого круга, використовуючи лише циркуль та лінійку. Ця проблема була доведена до неможливості ще в 1882 році Фердинандом фон Ліндеманном, який довів трансцендентність числа π .

У 1894 році Гудвин опублікував свій "розв'язок" у статті під назвою "Квадратура круга", яка з'явилася в "American Mathematical Monthly", поважному математичному журналі. Стаття була сповнена математичних помилок та нелогічних міркувань, але дивним чином була надрукована. У своїй статті Гудвин стверджував, що довів, ніби π дорівнює 3,2 (або, за його виразом, $16/5$), що значно відрізняється від його істинного значення ($\pi \approx 3,14159\dots$). Крім того, він висловив

претензії на авторство свого "відкриття", заявивши, що отримав патентні права на "правильне" значення $\pi = 3,2$ у США, Великій Британії, Німеччині, Франції, Іспанії, Бельгії та Австрії.

У 1896 році Гудвин вирішив піти далі та спробувати легітимізувати своє "відкриття" на законодавчому рівні. Він звернувся до Тейлора Рекорда, представника свого округу в Палаті представників законодавчого органу штату Індіана, і переконав його представити на розгляд Палати законопроект, який би "встановив нове математичне знання" про квадратуру круга. Він стверджував, що цей закон принесе велику користь штату Індіана, оскільки дозволить його жителям використовувати "правильне" значення π безкоштовно, тоді як жителі інших штатів будуть змушені платити йому авторські відрахування.

Законопроект Гудвина, відомий як Законопроект № 246, був внесений на розгляд Палати представників у січні 1897 року [1-2]. Історія набула ще більш абсурдного повороту, коли, після схвалення двома комітетами, 67 членів Палати представників проголосували за нього одногосно! Місцева преса спочатку висловила певне занепокоєння, але в цілому поставилася до законопроекту з легковажністю. У лютому 1897 року законопроект було передано на розгляд Сенату штату для остаточного затвердження. Саме тут у цю неймовірну історію втрутився випадок. У той день, коли Сенат штату Індіана активно обговорював цю "революційну" законодавчу ініціативу, до столиці штату по службових справах прибув Кларенс Абіатар Вальдо (1852–1927), професор математики з Університету Пердью, розташованого в місті Лафайєтт. Вальдо був відомим математиком, який спеціалізувався на алгебрі та теорії функцій. Для Вальдо сенатські слухання щодо законопроекту про π стали повною несподіванкою. Він був шокований тим, що законодавці штату серйозно розглядають можливість прийняття закону, що суперечить елементарним математичним істинам. У статті, написаній 19 років потому, Вальдо згадував: "Член законодавчих зборів, який показав мені законопроект, поцікавився, чи не бажаю я познайомитися з його автором, вченим-лікарем. Від такої високої честі я з вдячністю відмовився, зазначивши, що вже знайомий з великою кількістю божевільних".

Після виступу професора Вальдо сенатори, нарешті, усвідомили абсурдність ситуації та відсутність підстав для законотворчості в цій сфері. Вони вирішили не продовжувати розгляд законопроекту та відклали його затвердження на невизначений термін. Законопроект про число π в Індіані став хрестоматійним прикладом математичного дилетантизму та небезпеки, яка виникає, коли наукові питання намагаються вирішувати законодавчим шляхом. Ця курйозна історія нагадує нам про важливість наукової грамотності та критичного мислення, особливо в епоху дезінформації та псевдонаукових теорій.

Література

1. Wilkins, Alasdair (31 January 2012). "The Eccentric Crank Who Tried To Legislate The Value Of Pi".io9. Retrieved 23 May 2019.
2. Singmaster, D. The Legal Values of Pi. *The Mathematical Intelligencer* 7, 69–72 (1985).
<https://doi.org/10.1007/BF03024180>

А.І. Андрущишин, Я.І. Юсип

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.М. Сов'як**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА ЯК ІНСТРУМЕНТ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ: ВІД ЛОГІКИ ДО РЕАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Логіка та дедукція відіграють ключову роль у формуванні критичного мислення, оскільки вони дозволяють аналізувати інформацію, робити обґрунтовані висновки та уникати хибних аргументів. Математична логіка базується на чітко визначених правилах і структурах, які допомагають вибудовувати послідовні міркування. Завдяки застосуванню законів логіки, таких як закон тотожності, суперечності та виключеного третього, людина навчається відрізняти істинні твердження від помилкових. Дедуктивне мислення, яке є важливою частиною математичного підходу, полягає у виведенні нових висновків на основі вже відомих фактів і правил. Використовуючи аксіоми та теореми, можна робити точні й логічно-обґрунтовані припущення, що є надзвичайно корисним у різних сферах – від науки та техніки до юридичних та економічних рішень. Математична логіка також допомагає аналізувати аргументи та виявляти маніпуляції в інформаційному просторі. Розуміння логічних помилок і принципів доказів сприяє розвитку аналітичного мислення, що дозволяє ухвалювати раціональні рішення в повсякденному житті.

Теорія ймовірностей є потужним інструментом, який допомагає аналізувати невизначеність, оцінювати ризики та ухвалювати зважені рішення. Часто люди схильні покладатися на інтуїцію, яка може ввести в оману, особливо коли йдеться про випадкові події чи статистичні дані. Завдяки розумінню ймовірностей можна уникати поширених помилок у судженнях, таких як неправильно оцінені ризики або хибні причинно-наслідкові зв'язки. Однією з найбільш розповсюджених когнітивних помилок є ефект упередженості, коли люди переоцінюють імовірність рідкісних подій, як-от виграш у лотерею чи авіакатастрофа, і недооцінюють більш вірогідні, але менш видовищні загрози, наприклад, дорожні аварії. Наприклад, ситуація: Людина кидає монету, й п'ять разів поспіль випала «решка». Вона каже: «Тепер точно буде «орел», бо давно не випадало!» , але: ймовірність залишається 50/50. Теорія ймовірності допомагає уникнути хибних логічних ходів і не робити висновків на основі хибної інтуїції. Вміння правильно аналізувати статистичні дані та розуміти ймовірнісні розподіли допомагає уникнути надмірного ризику або, навпаки, надмірної обережності. Статистика є важливим інструментом для аналізу інформації, проте її часто використовують для маніпуляцій.

Маніпуляція може відбуватися через вибіркове подання інформації, зміщення вибірки або використання некоректних середніх значень. Наприклад,

середня зарплата у певному регіоні може здаватися високою, якщо кілька осіб отримують значно більше за інших, хоча медіана може показати зовсім іншу картину. Розпізнавання таких прийомів вимагає критичного аналізу та вміння перевіряти джерела даних. Математичне моделювання – це спосіб зробити невидиме видимим. Завдяки йому можна оцінювати економічні тенденції, прогнозувати погоду, аналізувати поведінку фінансових ринків або передбачати епідемії. Евристика та алгоритми допомагають структурувати мислення й знаходити ефективні рішення в складних ситуаціях. Евристичні методи дозволяють швидко приймати рішення на основі попереднього досвіду, навіть якщо вони не завжди є абсолютно точними. Алгоритми, навпаки, формують послідовні кроки для вирішення завдань, що є основою сучасних технологій, штучного інтелекту та аналізу даних. Математичний підхід до структурування інформації дозволяє уникати хаосу у міркуваннях і приймати зважені рішення на основі логіки, а не лише інтуїції.

Можна зробити висновок, що математика є незамінним інструментом для формування критичного мислення, оскільки її методи дозволяють аналізувати інформацію, робити логічно-обґрунтовані висновки та ухвалювати раціональні рішення. Логіка та дедукція допомагають структурувати мислення й уникати помилкових суджень, теорія ймовірностей дає змогу правильно оцінювати ризики, а статистика вчить розпізнавати маніпуляції та фейки. Математичне моделювання дозволяє прогнозувати майбутні події на основі наявних даних, а евристика й алгоритми сприяють ефективному вирішенню складних завдань. Застосування математичних принципів у повсякденному житті допомагає уникати когнітивних спотворень, покращує аналітичні здібності та підвищує якість прийнятих рішень. Таким чином, математика є не лише сукупністю формул і розрахунків, а й важливим засобом для глибшого розуміння світу та впевненого орієнтування в сучасному інформаційному просторі.

Література

1. Жумік О. В. До питання розв'язування завдань з теорії ймовірностей підвищеного рівня складності [Електронний ресурс] / О. В. Жумік // Міжнародний науковий журнал "Інтернаука". 2022. № 5. С. 21-23. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/mnj_2022_5_7
2. Палій А. М. Критичне мислення як навичка XXI століття: роль освіти [Електронний ресурс] / А. М. Палій, Т. М. Єльчанінова, О. П. Ступак // Перспективи та інновації науки (Серія "Педагогіка", Серія "Психологія", Серія "Медицина"). 2025. № 1. С. 1646-1656. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/prainnsc_2025_1_140
3. Кравченко О. В. Критичне мислення як життєва навичка [Електронний ресурс] / О. В. Кравченко // Креативний простір. 2021. № 1. С. 23. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/krpr_2021_1_13
4. Павловська О. В. Логіка та дологічне мислення [Електронний ресурс] / О. В. Павловська // Актуальні проблеми філософії та соціології. 2021. Вип. 29. С. 24-27. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aprfc_2021_29_7

А.Д. Шихалєєва, Б.-М.Б. Малець

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник І.М. Сов'як, викладач кафедри прикладної математики і механіки

ЕВРИСТИКИ УПЕРЕДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ: КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПОМИЛОК МИСЛЕННЯ

У повсякденному житті ми постійно приймаємо рішення — від буденних до важливих. Часто ці рішення не ґрунтуються на раціональному чи математичному аналізі, а формуються швидко, автоматично, завдяки ментальним скороченням, якими керується Система 1. Такі скорочення ігнорують закони логіки, ймовірностей і статистики, що призводить до когнітивних упереджень — систематичних помилок мислення, які спотворюють наше бачення реальності. Згідно з концепцією, запропонованою Даніелем Канеманом (ізраїльсько-американським психологом), мислення людини можна поділити на дві системи:

Система 1 — швидка, інтуїтивна, емоційна. Вона спрацьовує автоматично і швидко, з мінімальною кількістю зусиль чи взагалі без них, без відчуття вольового контролю. Коли Система 1 стикається з неоднозначною або частковою інформацією, вона прагне заповнити прогалини, створюючи логічну і цілісну історію. Це створює ілюзію розуміння та узгодженості.

Система 2 — повільна, аналітична, логічна. Вона зосереджує увагу на розумовій діяльності, що потребує розумових зусиль, зокрема складних обчислень. Функціонування Системи 2 часто пов'язують із суб'єктивними відчуттями діяльності, вибору та концентрації. Проте її активація вимагає зусиль і ментальної енергії, тому вона часто поступається Системі 1, особливо в щоденних рішеннях.

У нашому житті евристика відіграє важливу роль, адже це галузь знань, що вивчає творчу діяльність, визначає шляхи відкриття нового в ідеях, судженнях, способах діяння. Проте ці шляхи та ідеї у багатьох випадках ведуть до когнітивних упереджень. Розглянемо ключові приклади:

Закон малих чисел: у математичній статистиці важливе поняття — репрезентативність вибірки. Проте Система 1 часто порушує цю логіку, покладаючись на обмежені приклади. Це призводить до упередження репрезентативності: ми віримо, що навіть мала вибірка відображає загальну закономірність. Така помилка критична в статистичному аналізі — наприклад, при хибному узагальненні результатів опитування на всю популяцію.

Причина і випадковість: у математиці важливо розрізняти кореляцію і каузальність. Система 1 має схильність бачити причинно-наслідкові зв'язки навіть у випадкових подіях, що суперечить статистичним принципам, зокрема гіпотезі про випадковість. Така помилка веде до хибних висновків у моделюванні й

прогнозуванні — наприклад, у фінансовій аналітиці або в інтерпретації даних досліджень.

Ефект якорування: якорування — класичний приклад впливу попередньої інформації на оцінку числових значень. У математиці це може спотворювати результати при оцінці величин або побудові моделей, особливо коли відсутня перевірка вихідних даних. Навіть фахівці можуть піддатися якорю, що підтверджується експериментами у сфері біхевіористичної економіки.

Коли людині пропонують певне числове значення (наприклад, ціну або вік), це значення стає "якорем", навколо якого будується подальше судження. Система 1 автоматично підхоплює якір і починає мислити у його межах, навіть якщо ця інформація не має реального підґрунтя. Наприклад, якщо людині запропонувати вгадати ціну товару після того, як вона почула завищене число, її оцінка буде вищою, ніж за відсутності "якоря".

Індекс якорування: цей ефект демонструє, як числове значення, навіть якщо воно задане випадково, стає точкою відліку в ментальних розрахунках. Це порушує логіку незалежної оцінки і вводить систематичну похибку, що шкодить як у викладанні математики, так і в професійній діяльності — наприклад, під час оцінки ризиків чи вартості.

Таким чином, можна зробити висновок, що когнітивні упередження впливають не лише на побутові рішення, а й на формальні процеси мислення в математиці, спотворюючи оцінку, логіку й аналітику. Критичне осмислення дії Системи 1 та навчання активному включенню Системи 2 є важливою частиною розвитку математичної культури та аналітичної грамотності.

Література

1. Канеман Д. Мислення, швидке й повільне (Thinking, Fast and Slow). — К.: Наш Формат, 2016.
2. Тверсі Д., Канеман Д. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. — Science, 1974.
3. Станович К. Що заважає нам мислити? — К.: Наш Формат, 2018.
4. Аріелі Д. Передбачувано ірраціональні (Predictably Irrational). — К.: Наш Формат, 2017.

В. Паламарчук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник Чмир О.Ю., кандидат фізико-математичних наук, доцент

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З ПРОМІЖНИМИ ПУНКТАМИ

Транспортна задача являється однією із задач лінійного програмування. Транспортна задача з проміжними пунктами відповідає реальній ситуації, коли між початковими та кінцевими пунктами перевезень є проміжні пункти (транзитні пункти). В транспортній задачі з проміжними пунктами транзитні перевезення можуть здійснюватись через будь-які пункти мережі (відповідно до напрямків дуг на схемі), в тому числі через деякі пункти відправлення і призначення. Ця модель є більш загальною, ніж звичайна транспортна, в якій перевезення здійснюються безпосередньо між пунктами відправлення та призначення [1]. Багато математичних задач можна вирішити за допомогою програмного пакету аналітичних обчислень Maple. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач лінійного програмування simplex, який базується на симплекс-методі. Продемонструємо цей пакет на транспортній задачі з проміжними пунктами.

Задача. Підприємства постачають вантажі роздрібним магазинам через розподільчі центри. Можливі напрямки перевезень, потужності заводів та потреби магазинів наведено на рисунку 1. Вартість перевезень (в сотнях у. о. на одиницю продукції) наведено в таблиці. Знайти оптимальний план та загальну вартість перевезень.

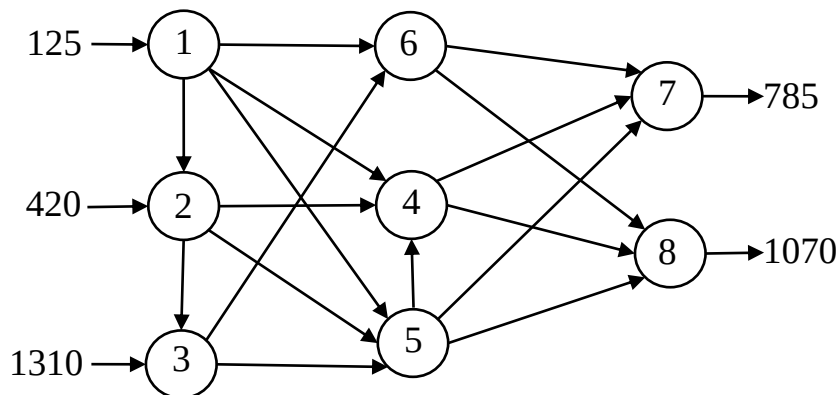


Рис. 1. Транспортна задача з проміжними пунктами

Вартість перевезення по маршруту															
1-2	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	2-5	3-5	3-6	4-7	4-8	5-4	5-7	5-8	6-7	6-8
4	1	2	3	6	6	4	2	4	3	2	4	1	7	7	1

Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [2].

```
> restart: with(ExcelTools):
> with(simplex):
```

$$B := \begin{bmatrix} 125 \\ 420 + B \\ 1310 + B \\ B \\ B \\ B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : b := \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ B \\ B \\ B \\ 785 \\ 1070 \end{bmatrix} : p := \text{Import}("matrix.xls", "1", "B2:I9") : p := \text{convert}(p, \text{Matrix}) : x$$

```
> := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} & m_{1,7} & m_{1,8} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} & m_{2,6} & m_{2,7} & m_{2,8} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} & m_{3,7} & m_{3,8} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & m_{4,7} & m_{4,8} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} & m_{5,7} & m_{5,8} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} & m_{6,7} & m_{6,8} \\ m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{7,7} & m_{7,8} \\ m_{8,1} & m_{8,2} & m_{8,3} & m_{8,4} & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{8,8} \end{bmatrix} :
```

```
> \sum_{i=1}^8 'a_i' = \sum_{j=1}^8 'b_j':
> F := \sum_{i=1}^8 \left( \sum_{j=1}^8 "p"[i,j] \cdot "x"[i,j] \right) :
```

```
> obmez := \left[ \sum_{i=1}^8 'x'[i,1] = b[1], \sum_{i=1}^8 'x'[i,2] = b[2], \sum_{i=1}^8 'x'[i,3] = b[3], \sum_{i=1}^8 'x'[i,4] = b[4], \sum_{i=1}^8 'x'[i,5] = b[5], \sum_{i=1}^8 'x'[i,6] = b[6], \sum_{i=1}^8 'x'[i,7] = b[7], \sum_{i=1}^8 'x'[i,8] = b[8], \sum_{j=1}^8 'x'[1,j] = a[1], \sum_{j=1}^8 'x'[2,j] = a[2], \sum_{j=1}^8 'x'[3,j] = a[3], \sum_{j=1}^8 'x'[4,j] = a[4], \sum_{j=1}^8 'x'[5,j] = a[5], \sum_{j=1}^8 'x'[6,j] = a[6], \sum_{j=1}^8 'x'[7,j] = a[7], \sum_{j=1}^8 'x'[8,j] = a[8] \right] :
```

```
> minimize(F, obmez, NONNEGATIVE) :
> assign(minimize(F, obmez, NONNEGATIVE)):'x' = x; 'F' = F;
```

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1855 & 0 & 0 & 420 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1855 & 0 & 365 & 945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1730 & 0 & 0 & 0 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1070 & 0 & 785 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 910 & 0 & 945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F = 8295.0$

Виходячи з результатів, отриманих у програмі Maple, приходимо до висновку, що загальна вартість перевезень становить 8295 у.о. «Транзитний» ефект розв'язку є таким: з підприємства Р1 відправляється 125 одиниць вантажу у розподільчий центр Т4; з підприємства Р2 – 420 одиниць вантажу у розподільчий центр Т5; з підприємства Р3 – 365 одиниць вантажу у розподільчий центр Т5 та 945 одиниць вантажу у розподільчий центр Т6. Далі вантажі надходять до магазинів так: магазин D7 отримує вантаж 785 одиниць з розподільчого центру Т5, магазин D8 – вантаж 125 одиниць з розподільчого центру Т4 та 945 одиниць з розподільчого центру Т6.

Література

1. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. (2007) Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник. Львів. "Магнолія 2006". 212 с.

О. Погорецька

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Карабин О.О.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки.*

ЗОЛОТИЙ ПЕРЕРІЗ

Людина сприймає світ, насамперед, через форми. Іноді це питання практичного значення, але дуже часто – питання естетики. Предмет, форма якого побудована на поєднанні симетрії та золотого перетину, сприймається нами як досконалий, гармонійний, привабливий. Золотий переріз – це особливий математичний принцип, що виражає найвищий ступінь відповідності між частинами й цілим. Його можна зустріти як у природі, так і в мистецтві, техніці, архітектурі.

Одне з визначень золотого перерізу пов'язане з нескінченним ланцюговим дробом, усі елементи якого дорівнюють одиниці. Якщо позначити цей дріб як x , він задовольняє рівнянню: $x = x + \frac{1}{x}$. Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Це число називають *золотим перерізом* і позначають грецькою літерою ϕ (фі). Наприклад, поштові листівки або банківські картки часто виготовляють у форматі прямокутника зі сторонами, співвідношення яких дорівнює ϕ . Якщо від такого прямокутника відрізати квадрат, залишок матиме ті ж пропорції — цей процес нескінченний, що відображає ірраціональність ϕ . У математиці пропорцією називають рівність двох відношень. Якщо відрізок поділити таким чином, що відношення цілого до більшої частини дорівнює відношенню більшої до меншої, отримаємо *золотий перетин*.

Існує геометрична побудова цієї пропорції лише за допомогою циркуля й лінійки. Наприклад, якщо прийняти відрізок АВ за одиницю, то точка Е, яка ділить його у золотому відношенні, поділить його так, що:

- $AE \approx 0.618$ (більша частина)
- $EB \approx 0.382$ (менша частина)

Ці значення часто округлюють до 62% і 38% відповідно.

Цікаву модифікацію золотого поділу — так званий *другий золотий перетин* — описала болгарська дослідниця Цветана Цекова. Він утворюється внаслідок геометричних побудов на основі класичного золотого перерізу і дає співвідношення 44:56. Ця пропорція також знаходить застосування в архітектурі та композиціях витягнутих горизонтальних форматів.

Особливо тісно з ідеєю золотого перерізу пов'язана фігура *золотого трикутника* — рівнобедреного трикутника з кутом 36° при вершині. Він є базовим елементом у побудові *пентаграми* — фігури, яка здавна вважалася символом гармонії та досконалості. Всі діагоналі правильного п'ятикутника, що утворюють

пентаграму, поділяють одна одну в золотому відношенні. Спосіб побудови правильного п'ятикутника описав ще Альбрехт Дюрер.

Історично поняття золотого перерізу пов'язане з ім'ям Леонардо Пізанського, відомого як *Фібоначчі*. У своїй «Книзі абака» (1202 р.) він наводить задачу про розмноження кроликів, яка приводить до числової послідовності:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...

Це – *ряд Фібоначчі*, в якому кожен наступний елемент дорівнює сумі двох попередніх. Відношення сусідніх чисел у цьому ряді поступово наближається до $\varphi \approx 0.618$. Таким чином, ряд Фібоначчі є числовим наближенням до золотого перетину.

Золотий перетин часто називають *асиметричною симетрією*. Він є не чимось протилежним до симетрії, а її більш гнучким і природним варіантом. Статична симетрія відображає рівновагу та спокій (наприклад, у кристалах), тоді як динамічна симетрія — ріст, рух, розвиток. Саме в динамічній симетрії ми найчастіше спостерігаємо прояви золотого перерізу — у зростаючих спіралях, вітках дерев, тілі людини.

Художники епохи Відродження активно досліджували візуальну силу золотого перетину. Вони помітили, що існують *зорові центри* — точки, які мимоволі привертають увагу глядача. У картинах ці точки найчастіше розташовані на відстані $3/8$ та $5/8$ від країв полотна — саме це співвідношення відповідає золотій пропорції.

У 1509 році Лука Пачолі видав у Венеції працю «*Божественна пропорція*», ілюстровану, як вважається, Леонардо да Вінчі. У цій книзі золота пропорція була представлена як втілення божественної триєдності.

Приклади використання золотого перерізу в мистецтві:

1. Леонардо да Вінчі, «Мона Ліза» — обличчя побудоване за золотим прямокутником; спіраль Фібоначчі накладається на усмішку.
2. «Таємна вечеря» Леонардо — композиційний центр Христа розташований у точці золотого перетину.
3. «Створення Адама» Мікеланджело — відстань між пальцями Бога й Адама ділить простір у золотій пропорції.
4. «Народження Венери» Боттічеллі — розміщення фігур і ліній підпорядковане законам золотої гармонії.
5. «Таємна вечеря» Сальвадора Далі — полотно є золотим прямокутником, апостоли вписані в золоті трикутники.

Золотий переріз — це не просто математична формула. Це універсальна мова гармонії, що об'єднує природу, науку, мистецтво, архітектуру і музику. Його краса — у простоті, а сила — у здатності гармонізувати складне. Недарма ще в давнину люди інтуїтивно вбудовували його в орнаменти, композиції й сакральну геометрію. Його універсальність доводить, що гармонія — це не випадковість, а закон, закладений у саму суть Всесвіту.

Х. Кінаш

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **Карабин О.О.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ФРАКТАЛИ

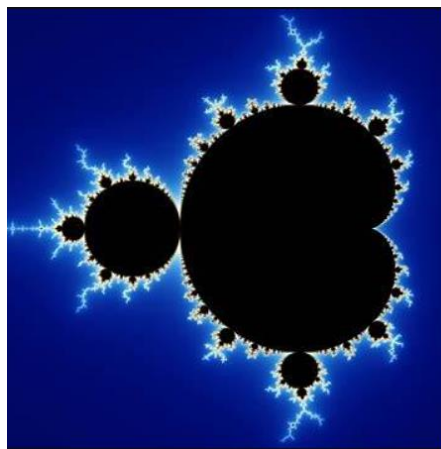
Світ навколо нас сповнений повторюваних візерунків і форм, які при уважному спостереженні виявляють дивовижну закономірність — вони виглядають подібно незалежно від масштабу. Саме такою є природа фракталів — геометричних об'єктів, структура яких повторюється на різних рівнях деталізації. Цю властивість називають самоподібністю. Якщо збільшувати зображення фракталу, то щоразу можна побачити в його частинах форму, подібну до цілого.

У природі фрактальна будова трапляється повсюдно. Гілкування дерев, блискавки, берегові лінії, форма гір, хмари, судинні системи й нервові закінчення — усе це приклади фрактальних структур. Їхнє вивчення стало ключем до розуміння того, як природа формує складні, гармонійні, але не завжди симетричні системи. Фрактали мають кілька характерних властивостей. По-перше, самоподібність — кожен фрагмент структури повторює загальний вигляд об'єкта. По-друге, вони створюються через ітеративну побудову: від початкової фігури за одним і тим самим алгоритмом багаторазово формуються нові рівні. Ще одна унікальна характеристика — фрактальна розмірність. Вона може бути дробовою, тобто такою, що не дорівнює ні цілій лінії, ні площині, ні об'єму. Наприклад, крива Коха має розмірність близько 1.26. І нарешті, кожен фрактал має нескінченну деталізацію: навіть при максимальному наближенні з'являються нові мікроструктури, які повторюють саму форму. Поняття фракталів має глибоке історичне коріння. Ще у XVIII–XIX століттях математики створювали приклади «патологічних» кривих — таких, що не піддавались опису класичною геометрією. Зокрема, крива Вейєрштраса, крива Пеано, килим Серпінського — це предтечі сучасного фрактального мислення. Проте саме Бенуа Мандельброт у 1975 році увів термін «фрактал» і в своїй книзі «*Фрактальна геометрія природи*» показав, що ці об'єкти є не математичним курйозом, а природною нормою. Завдяки розвитку комп'ютерної графіки у 1980-х стало можливим візуалізувати складні структури, як-от знаменита множина Мандельброта, — яскравий приклад фракталу, побудованого на основі комплексних чисел.

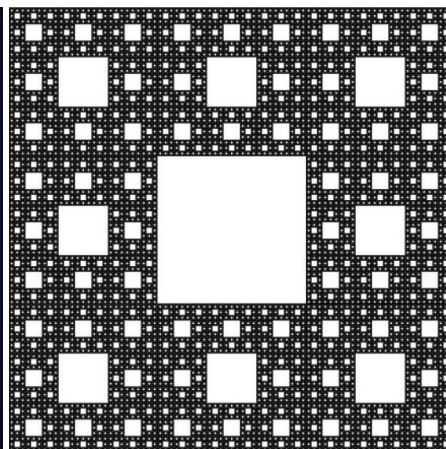
Фрактали можна описати математично кількома способами. Найчастіше вони створюються за допомогою рекурсивних формул, ітераційних функціональних систем або за методами комплексної динаміки. Наприклад, множини Жюліа та Мандельброта виникають через ітерації комплексних функцій і є основою багатьох комп'ютерних фракталів. Сучасні технології дедалі активніше використовують фрактали як інструмент моделювання, обчислення й візуалізації. У комп'ютерній

графіці фрактальні алгоритми застосовуються для генерації реалістичних ландшафтів, хмар, дерев, текстур поверхонь. Завдяки своїй здатності моделювати складні й багаторівневі структури, фрактали ідеально підходять для створення візуальних ефектів у кіно та відеоіграх — наприклад, у таких фільмах, як *Доктор Стрендж* або *Інтерстеллар*.

У телекомунікаціях фрактали стали основою для створення компактних багаточастотних антен, здатних працювати в кількох діапазонах одночасно. У стисненні даних використовується фрактальна компресія, яка дозволяє зберігати складні зображення з меншим обсягом інформації завдяки виявленню самоподібних фрагментів. У біомедицині фрактальний аналіз допомагає досліджувати структуру судин, легенів і тканин, а також виявляти пухлини за ступенем складності їх контурів. У науковому моделюванні фрактали використовуються для опису процесів, що мають нерівномірну або випадкову природу: ерозії ґрунтів, поширення вогню, розростання кристалів, поведінки фондових ринків. Фрактальні алгоритми знайшли місце й у штучному інтелекті. Вони використовуються для генерації нових образів, створення глибоких генеративних моделей і класифікації даних. Навіть архітектура черпає натхнення з фрактальної симетрії: складні фасади, елементи дизайну, внутрішні перегородки — усе це можна побачити в сучасних офісах і храмах, зокрема в архітектурі Індії чи кампусах Apple. Фрактали надихають і митців. Художники створюють абстрактні композиції, базовані на фрактальних принципах, а композитори — музичні твори з фрактальними ритмами, що повторюють природну багаторівневу гармонію. Серед найвідоміших прикладів фракталів — крива Коха (сніжинка), килим Серпінського та множина Мандельброта. Усі вони є зразками нескінченної самоподібної краси.



Множина Мандельброта



Килим Серпінського

Сучасна наука ставить перед фракталами нові виклики: оптимізація алгоритмів їх побудови в реальному часі, інтеграція в машинне навчання, застосування в нанотехнологіях і біоінженерії. Все це свідчить про те, що фрактали — не просто красива ідея, а дієвий інструмент для моделювання складних систем. Фрактали стали

своєрідним мостом між математикою та природою. Вони дозволяють побачити порядок у, здавалося б, хаотичних формах, і допомагають не лише глибше зрозуміти світ, а й формувати нові технології для його дослідження та вдосконалення.

Н.М. Понич

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ У ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ

Штучний інтелект (ШІ) — це не просто набір алгоритмів і програм, а результат глибоких математичних досліджень. Однією з найважливіших галузей математики, яка лягла в основу машинного навчання, комп'ютерного зору та інших напрямків **ШІ**, є **математичний аналіз**. Якщо говорити просто, математичний аналіз допомагає знаходити оптимальні рішення, оцінювати помилки, розуміти, як змінюються функції, і будувати прогнози. У **ШІ** він використовується практично всюди — від тренування нейромереж до аналізу великих обсягів даних.

Як математичний аналіз використовується в ШІ?

Коли нейромережу навчають, вона поступово покращує свої параметри, щоб зменшити помилку. Це робиться за допомогою градієнтного спуску — методу, який використовує похідні для знаходження мінімуму функції втрат.

Інтеграли та ймовірнісні методи. Уявіть, що ви йдете по гірському схилу в тумані. Ви не бачите вершину чи долину, але можете відчувати нахил під ногами. Якщо схил йде вниз, ви йдете в тому ж напрямку, доки не досягнете найнижчої точки. Так само працює градієнтний спуск у **ШІ**: він "рухається" за градієнтом, поки не знайде оптимальне значення.

ШІ часто працює з ймовірностями, особливо у випадках, коли є невизначеність (наприклад, прогнозування погоди чи розпізнавання образів). Тут використовуються інтеграли, які допомагають знайти середні значення, ймовірності певних подій і обчислити розподіли даних.

Збіжність та границі. Для аналізу текстів та зображень використовуються методи, що оцінюють ймовірність того, що певне слово або об'єкт належить до конкретної категорії. Наприклад, нейромережа може оцінити з якою ймовірністю на зображенні є кішка чи собака.

Щоб ШІ працював ефективно, потрібно розуміти, як алгоритми поведуться при збільшенні кількості даних або складності моделей. Тут допомагає аналіз границь і збіжності. Коли тренують нейромережу, важливо знати, чи покращується її точність з додаванням більше даних. Іноді після певного моменту додавання даних вже не допомагає, і математичний аналіз дозволяє зрозуміти, де ця межа.

Функціональний аналіз та простори функцій у глибокому навчанні часто використовуються активаційні функції, які вирішують, які нейрони будуть активовані в кожному шарі нейромережі. Функціональний аналіз допомагає вивчати їх властивості, щоб обирати найефективніші. Популярна активаційна функція **ReLU (Rectified Linear Unit)** працює дуже просто: якщо вхідне значення

позитивне — воно проходить далі, якщо ні — замінюється на нуль. Математичний аналіз допомагає довести, що це працює швидше, ніж класичні сигмоїдні функції. **Сигмоїда** — це неперервно диференційована монотонна нелінійна S-подібна функція, яка часто застосовується для «згладжування» значень деякої величини.

Диференціальні рівняння в глибокому навчанні коли моделі **III** працюють з динамічними процесами (наприклад, прогнозуванням змін на фондовому ринку), вони часто використовують диференціальні рівняння, які описують, як змінюється система з часом. У фізиці та економіці багато процесів описуються рівняннями, які вказують, як щось змінюється за певний проміжок часу. В машинному навчанні ці рівняння можуть моделювати потоки інформації в нейронних мережах або розповсюдження хибних новин у соцмережах.

Висновок. Штучний інтелект — це не магія, а результат глибоких математичних обчислень. Без математичного аналізу ми б не могли оптимізувати алгоритми навчання нейромереж, покращувати точність прогнозів, аналізувати поведінку моделей та їх помилки, будувати ефективні алгоритми роботи з великими даними. Хоча багато сучасних інструментів для роботи з **III** вже автоматизовані розуміння основ математичного аналізу дає можливість не просто користуватися **III**, а створювати власні інноваційні рішення. Математичний аналіз — це фундамент для сучасного штучного інтелекту. Він допомагає зрозуміти, як працюють алгоритми, оптимізувати процеси навчання та робити моделі більш точними та ефективними.

Література

1. Дейзенрот М.П., Фейсал А.А., Онг Ч.С. *Математика для машинного навчання*. — К.: Cambridge University Press, 2020. — 398 с.
2. Гудфеллоу І., Бенджіо Й., Курвілль А. *Глибинне навчання*. — К.: MIT Press, 2016. — 775 с.
3. Сімовічі Д.А. *Математичний аналіз для машинного навчання і добування даних*. — Нью-Йорк: Wiley-IEEE Press, 2020. — 510 с.
4. Шилов Г.Є. *Основи функціонального аналізу*. — М.: Дрофа, 2002. — 368 с.

Х. Рибчич

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики*

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ

Сучасний штучний інтелект (ШІ) неможливо уявити без чисельних методів оптимізації. Практично всі алгоритми машинного та глибокого навчання базуються на ідеї налаштування великої кількості параметрів з метою покращення роботи моделі. Оптимізація, у цьому контексті, виступає як фундаментальний механізм навчання.

Оптимізація — це процес пошуку таких значень параметрів, при яких певна функція (як правило, функція втрат) досягає мінімального значення. У задачах штучного інтелекту функція втрат відображає, наскільки добре модель виконує поставлене завдання. Чим нижче її значення — тим точніше модель.

Основні сфери застосування чисельної оптимізації у ШІ:

- навчання нейронних мереж;
- класифікація та кластеризація даних;
- побудова рекомендаційних систем;
- алгоритми підкріплювального навчання.

Ключові методи чисельної оптимізації

Градiєнтний спуск (Gradient Descent) - один із найпростіших і найпоширеніших методів. На кожному кроці алгоритм зменшує функцію втрат, рухаючись у напрямку, протилежному градієнту. Він дозволяє поступово наближатися до мінімуму функції.

Стохастичний градієнтний спуск (SGD). На відміну від класичного градієнтного спуску, тут оновлення параметрів відбувається на основі окремих прикладів або невеликих підвибірок (batch), що знижує обчислювальні витрати і сприяє швидшій збіжності.

Адаптивні методи (Adam, RMSprop, Adagrad). Ці алгоритми автоматично регулюють швидкість навчання для кожного параметра, зважаючи на історію градієнтів. Adam (Adaptive Moment Estimation) поєднує ідеї методів моментуму та RMSprop, забезпечуючи високу стабільність і швидке навчання.

Методи Ньютонa та квазі-Ньютонa (BFGS, L-BFGS). Використовують не лише інформацію про градієнт, а й про другу похідну функції (або її апроксимацію). Такі методи швидко збігаються у задачах з гладкими функціями.

Еволюційні методи (генетичні алгоритми, рій частинок). Ці підходи імітують природні процеси, як-от добір або колективну поведінку. Вони ефективні при розв'язанні задач з великою кількістю локальних мінімумів або там, де функція не є диференційованою.

Практичний приклад

Задача: навчання простої нейронної мережі для розпізнавання рукописних цифр із датасету MNIST.

- **Мета:** мінімізувати функцію втрат (кросентропію) на тренувальному наборі.
- **Архітектура мережі:** один прихований шар із 128 нейронами, активація ReLU.
- **Метод оптимізації:** Adam, швидкість навчання — 0.001.
- **Навчання:** 20 епох, розмір батчу — 64 приклади.

Результат: модель досягла точності 92.3% на тестовому наборі. Для порівняння, при використанні класичного SGD точність була на 2–3% нижчою, а навчання тривало довше.

Чисельна оптимізація — це невід'ємна складова штучного інтелекту. Від ефективності алгоритму оптимізації залежить не лише точність моделі, а й швидкість її навчання, стійкість до переобучення та здатність працювати в складних умовах.

Оптимізація є фундаментом процесу навчання моделей ШІ.

Кожен метод має свої переваги: прості — ефективні при обчисленнях; адаптивні — прискорюють і стабілізують процес; еволюційні — універсальні й надійні при складних функціях.

Метод Adam — один з найефективніших і найпопулярніших у практиці глибокого навчання.

Еволюційні методи оптимізації — ідеальні для нетрадиційних, нерівномірних або сильно зашумлених задач.

Практичні результати підтверджують: без оптимізації неможливо створити точну, надійну та адаптивну модель штучного інтелекту.

Література

1. Гудфеллоу І., Бенджіо Й., Курвілл А. (2017). Глибоке навчання. Київ: ВД “Києво-Могилянська академія”.
2. Chollet F. (2021). *Deep Learning with Python*. Manning Publications.
3. Мітчелл М. (1999). *Вступ до генетичних алгоритмів*. Львів: БаК.
4. Нестеренко А.В. (2016). Методи оптимізації в машинному навчанні. Харків: УФМЛ.

П. Дольний

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ПОЖЕЖ: КОЛИ ЦИФРИ РЯТУЮТЬ ЖИТТЯ

Пожежа — це стихія, яка не залишає часу на роздуми. У критичних умовах кожна секунда може коштувати людського життя, а кожне рішення — мати непоправні наслідки. Саме тому рятувальники дедалі частіше вдаються до математичних моделей, щоб заздалегідь передбачити поведінку вогню. Такі моделі допомагають не тільки оцінити ризики, а й ефективно координувати дії на місці події.

Метою математичного моделювання є кількісна оцінка процесів, що супроводжують пожежу, та виявлення закономірностей її поширення. Це дозволяє:

- оперативно евакуювати людей;
- попередити руйнування стратегічних об'єктів;
- розумно розподіляти ресурси пожежно-рятувальних підрозділів;
- планувати протипожежні заходи до виникнення надзвичайної ситуації.

Математична модель — це спрощене, але формалізоване уявлення про реальний процес горіння. Вона враховує численні змінні: температуру, вологість, швидкість вітру, тип пального матеріалу, топографію місцевості тощо.

Диференціальні моделі. Базуються на рівняннях теплопровідності та конвекції. Найточніші, але складні в реалізації. Дають змогу точно спрогнозувати момент займання і зону дії високих температур.

Клітинні автомати. Простий і наочний метод, у якому простір поділяється на клітинки зі станами («незаймана», «горить», «вигоріла»). Перехід між станами описується простими правилами, наприклад — поширення вогню на сусідні клітинки за фіксований час. Широко використовуються у навчальних симуляціях і системах підготовки.

Інтегральні, зональні та польові моделі

- **Інтегральні моделі** описують середні характеристики для всього приміщення. Ефективні при рівномірному поширенні продуктів горіння.
- **Зональні моделі** розбивають простір на частини з окремими умовами — наприклад, гарячі та холодні зони.
- **Польові моделі** — найдеталізованіші. Вони враховують зміну параметрів у кожній точці простору і часу. Вимагають значних обчислювальних ресурсів.

Моделювання пожеж має низку труднощів:

- складність калібрування моделей на основі реальних даних;

- потреба в компромісі між точністю та оперативністю;
- багато змінних — стохастичність, хаотичність вітру, змінні матеріали;
- нестача повних даних про реальні сценарії пожеж.

Для зменшення невизначеності застосовуються методи статистичного аналізу та багатоваріантного моделювання.

Основні фактори, що враховуються у моделюванні

- швидкість і напрямок вітру;
- вологість повітря та горючого середовища;
- температура навколишнього середовища;
- тип і розміщення пального матеріалу;
- геометрія об'єкта, рельєф місцевості;
- джерело займання та його енергія.

Практичне застосування

- *Планування евакуації*: визначення безпечних маршрутів та зон ризику;
- *Підтримка оперативного реагування*: вибір оптимального місця для розгортання техніки;
- *Оцінка ймовірного розвитку подій*: прогнозування масштабів поширення і часу досягнення критичних точок;
- *Інженерна безпека*: проектування систем димовидалення, протипожежних бар'єрів.

Приклади використання

- У США, Канаді, Австралії — моделі поширення пожеж працюють у реальному часі, інтегруючись з даними дронів і супутників.
- В Україні — такі моделі застосовують у промисловості (хімічні виробництва, шахти) та в межах систем попередження на об'єктах критичної інфраструктури.

Висновок

Математичне моделювання пожеж — це не просто академічна справа. Це практичний інструмент, що допомагає боротися зі стихією, дає змогу ухвалювати обґрунтовані рішення і, найголовніше, — рятує життя. Поєднання точних наук із системами підтримки рішень — ключ до майбутнього ефективної роботи рятувальних служб.

М. Аверін

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ЯК ПРАЦЮЄ GOOGLE: РОЛЬ МАТРИЦЬ І ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

Сучасна інтернет-навігація значною мірою базується на математичних принципах. Одним із найвідоміших прикладів є алгоритм PageRank, створений у 1996 році Ларрі Пейджем і Сергієм Бріном під час навчання у Стенфордському університеті. Саме він став основою пошукової системи Google, що згодом змінила уявлення про доступ до інформації.

Суть цього алгоритму полягає у визначенні важливості вебсторінок. Ідея проста: сторінка вважається важливою, якщо на неї посилається багато інших важливих сторінок. Математично цю ідею реалізовано через інструменти лінійної алгебри — матриці, вектори та власні значення.

Інтернет моделюється як орієнтований граф, де вузли — це вебсторінки, а дуги — гіперпосилання. На основі цього графа формується матриця суміжності, яка згодом нормалізується до матриці переходів. Вона показує ймовірність переходу з однієї сторінки на іншу — тобто поведінку умовного користувача, що випадково переходить за посиланнями.

З кожним переходом «вага» відвіданої сторінки зростає. Коли кількість таких переходів стає великою, система досягає стабільного стану — формується власний вектор цієї матриці. Компоненти цього вектора й задають рейтинг сторінок — їхню відносну важливість у мережі.

Щоб уникнути ситуацій, коли користувач потрапляє на сторінку без жодного посилання (так звану «пастку»), в алгоритм додається механізм випадкового переходу на будь-яку іншу сторінку. Це забезпечує стійкість алгоритму й гарантує, що кожна сторінка має шанс отримати рейтинг.

Хоча сучасні алгоритми Google враховують сотні інших факторів — зміст сторінки, її швидкість, зручність користування — саме PageRank став фундаментом, на якому було побудовано найпотужнішу пошукову систему у світі.

Цей приклад демонструє, як фундаментальні математичні ідеї можуть мати практичне застосування в найсучасніших технологіях, глибоко впливаючи на повсякденне життя мільярдів людей.

Література

1. Wikipedia. PageRank <https://uk.wikipedia.org/wiki/PageRank>
2. Wikipedia. Теорія графів https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_графів
3. Wikipedia. Власні вектори та власні значення https://uk.wikipedia.org/wiki/Власні_вектори_та_власні_значення
4. Wikipedia. Матриця (математика) [https://uk.wikipedia.org/wiki/Матриця_\(математика\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Матриця_(математика))

А.І. Сем'янів

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник: **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Похідна функції є одним із фундаментальних понять математичного аналізу, яке широко використовується в різних прикладних галузях. З її допомогою можна дослідити поведінку функції, зокрема, знайти точки екстремуму, проміжки зростання та спадання, побудувати графік функції, а також вирішувати задачі з фізики, біології, хімії, економіки тощо. Відкриттю похідної та основ диференціального числення передували роботи французьких математиків П'єра Ферма, який у 1629 р. запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функцій, а також Рене Декарта, який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії.

У 1670-1671р. англійський математик і механік Ісаак Ньютон і дещо пізніше німецький філософ і математик Готфрід Вільгельм Лейбніц незалежно один від одного побудували теорію диференціального числення.

Одне з основних застосувань похідної – знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції. Це має велике значення, наприклад, при визначенні максимальної продуктивності, мінімальних витрат, оптимальної траєкторії руху. У багатьох задачах часто виникає потреба знайти такі значення, при яких функція досягає максимуму або мінімуму на певному проміжку. Похідна також використовується для побудови графіків функцій. Знаючи знак похідної, можна визначити, де функція зростає, а де спадає, знайти точки перегину (друга похідна) та асимптоти. Це дозволяє точно зобразити поведінку складних математичних моделей, що використовуються в науці та техніці.

У фізиці похідна описує швидкість зміни величин. Наприклад, похідна координати за часом є швидкістю, а похідна швидкості — прискоренням. Таким чином, похідна дозволяє моделювати рух тіл, розраховувати силу, тиск, потужність тощо.

В економіці похідна застосовується для аналізу граничних величин. Наприклад, гранична вигода — це похідна прибутку за кількістю виробленої продукції. Аналізуючи похідні, можна визначити ефективні стратегії використання ресурсів, виявити критичні точки функції витрат, доходу або попиту.

Похідну функції також можна застосувати у сфері пожежної безпеки та цивільного захисту.

Наприклад, площа пожежі в лісовому масиві зростає за законом

$$S(t) = 5t^2 + 20t, \quad (1)$$

де $S(t)$ - площа пожежі в гектарах через t годин після початку займання. Знайти швидкість збільшення площі пожежі через 3 години після початку.

Розв'язання:

Швидкість зростання площі пожежі — це похідна функції площі за часом:

$$v(t) = S'(t) = 10t + 20, \quad (2)$$

В момент часу 3 год $v(3) = 10 \cdot 3 + 20 = 50$ га/год. Отже, через 3 години площа пожежі збільшується зі швидкістю 50 гектарів на годину.

Ще одним прикладом застосування похідної буде визначення максимальної зони зараження в хімічній аварії.

Радіус зони небезпечного зараження залежить від часу за функцією:

$$R(t) = \sqrt{100t - 3t^2}, \quad (3)$$

(модель розсіювання хмари токсичних речовин, t у хвиликах).

Знайти час, коли зона ураження буде максимально великою.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$R'(t) = \frac{100-6t}{2\sqrt{100t-3t^2}}. \quad (4)$$

Похідна дорівнюватиме нулю тоді, коли чисельник дорівнюватиме нулю, тобто в момент часу $t = \frac{100}{6} = 16,67$. Оскільки в цей момент часу похідна змінюватиме знак з $+$ на $-$, робимо висновок, що в момент часу 16,67 хв радіус зони небезпечного зараження буде найбільшим.

Крім того, похідна використовується для розрахунків у будівництві, аеродинаміці, екології, біології, хімії, прогнозуванні тенденцій, оптимізації мереж зв'язку тощо. В усіх цих сферах необхідно аналізувати зміни, передбачати майбутній стан системи та обґрунтовано приймати рішення.

Сучасний світ неможливо уявити без математичних моделей, у яких ключову роль відіграє похідна. Завдяки цьому поняттю ми можемо передбачити наслідки різних дій, оптимізувати процеси та ефективно розв'язувати прикладні задачі.

Література

1. Адамчук М. М., Бакулін А. В. *Математичний аналіз: похідна та її застосування* : навч. посіб. – Київ : Видавничий дім "Слово", 2020. – 220 с.
2. Столяр В. І. *Диференціальне числення функцій однієї змінної* : підручник. – Київ : Либідь, 2017. – 328 с.
3. Демидович Б. П. *Збірник задач і вправ з математичного аналізу* / Б. П. Демидович. – 17-те вид. – Київ : Наукова думка, 2021. – 576 с.
4. Stewart J. *Calculus: Early Transcendentals*. – 8th ed. – Boston : Cengage Learning, 2016. – 1368

Ю. Пиріг

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ХАОСУ: ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ТА САМОПОДІБНІСТЬ В ПРИРОДНИХ СИСТЕМАХ

Упродовж століть математика вважалася наукою про порядок: вона описувала ідеальні фігури, чіткі рівняння та передбачувані структури. Проте у XX столітті це уявлення було докорінно переглянute завдяки появі нової галузі, фрактальної геометрії, яка відкрила неймовірний світ математичного хаосу. Виявилось, що навіть у найбезладніших і, здавалося б, непередбачуваних явищах — від структури хмар до розгалуження кровоносних судин — криються суворі математичні закономірності.

Розглянемо математичні засади фрактальної геометрії, феномену самоподібності, а також, як ці ідеї пояснюють складні явища у природі.

Хаос і порядок: дві сторони однієї медалі

У повсякденному розумінні **хаос** означає безлад, непередбачуваність, відсутність структури. Але в науці це слово має інше значення.

Детермінований хаос — це поведінка систем, які формально описуються точними рівняннями, але виявляють дуже складну, чутливу до початкових умов динаміку. Такий хаос не є випадковим у класичному розумінні — він приховує структуру, яку можна описати за допомогою математики. Саме вивченням таких складних, але закономірних структур займається фрактальна геометрія.

Традиційна геометрія, започаткована ще Евклідом, оперує простими фігурами: точками, лініями, колами, трикутниками. Проте вона безсила перед реальними формами природи: берегова лінія, гілка дерева, контур хмари або блискавка — все це не вкладається у класичні геометричні уявлення. Фундаментальний прорив стався завдяки Бенуа Мандельброту, французько-американському математику, який у 1975 році запровадив термін "*фрактал*" (від лат. *fractus* — "зламаний", "нерівний"). Він довів, що багато природних об'єктів мають самоподібну структуру: їхні частини схожі на ціле. Це властивість стала центральною у фрактальній геометрії.

Фрактал — це геометричний об'єкт, який має такі характеристики:

самоподібність: частини об'єкта подібні до всього об'єкта на різних масштабах. Ця подібність може бути точною (як у штучних фракталах) або статистичною (як у природних об'єктах).

деталізація на кожному масштабі: фрактал має складну структуру незалежно від рівня збільшення.

фракційна розмірність: на відміну від класичних об'єктів, які мають цілу розмірність (лінія — 1, площа — 2), фрактали часто мають дробову розмірність (наприклад, розмірність берегової лінії може бути між 1 і 2).

Одним із найвідоміших фракталів є *множина Мандельброта*, яка створюється за простою рекурсивною формулою, але має нескінченну кількість рівнів складності. Її візуалізація стала символом фрактальної геометрії.

Один із найцікавіших аспектів фракталів полягає в тому, що вони не є лише математичними абстракціями. Навпаки, природа буквально наповнена фракталами. Ось кілька прикладів.

Дерева і рослини. Розгалуження дерев, коріння і листя демонструють самоподібність: кожна гілка повторює форму всього дерева. Лист папороті, наприклад, містить дрібніші листочки, які за формою і структурою нагадують цілий листок.

Судинна і бронхіальна системи. У біології фрактальні структури зустрічаються у мережах кровоносних судин, альвеол легенів, нейронних зв'язках мозку. Такі системи повинні охоплювати великий об'єм з мінімальними витратами, тому фрактальна організація є оптимальною.

Геологічні утворення. Гори, русла річок, берегові лінії, тріщини в скелях — усе це фрактальні об'єкти. Їхня структура створюється природними процесами: ерозією, землетрусами, осипами, які генерують складні, але закономірні візерунки.

Хмари, полум'я, блискавка. Атмосферні явища, зокрема хмари, утворюються турбулентними потоками повітря, які формують фрактальні контури. Полум'я та блискавка також мають самоподібну структуру: велика блискавка поділяється на менші гілки, кожна з яких повторює форму основної.

Фрактали часто виникають у так званих хаотичних динамічних системах — тобто таких, які підпорядковуються точним законам, але демонструють складну, непередбачувану поведінку. Прикладами є: моделі популяцій у біології, метеорологічні прогнози, біржові коливання в економіці. Ці системи чутливі до початкових умов — навіть мікроскопічна зміна може призвести до кардинально іншого результату. І хоча поведінка таких систем виглядає випадковою, їхні траєкторії у фазовому просторі часто утворюють *фрактальні аттрактори* — геометричні множини, які описують межі можливих станів системи.

Фрактали використовуються в комп'ютерній графіці для генерації природних пейзажів, текстур, ландшафтів. Їхня здатність моделювати складні форми з простої формули робить їх ідеальними для візуалізації реалістичних середовищ у відеоіграх та кіно.

Антени фрактальної форми дозволяють працювати на багатьох частотах одночасно при зменшених розмірах. Це використовується у сучасних смартфонах і системах зв'язку.

Митці черпають натхнення у фрактальних узорах, створюючи картини, скульптури й будівлі з використанням принципу самоподібності. Відомим

прикладом є творчість японського архітектора Тойо Іто, що інтегрує фрактальні концепти у сучасний урбанізм.

Фрактальна геометрія змінює наше уявлення про структуру Всесвіту. Вона демонструє, що порядок і хаос не виключають, а доповнюють одне одного. Те, що здавалося безформним або випадковим, насправді має внутрішню логіку. Математика дозволяє побачити красу складності та закономірності там, де її раніше не помічали. Самоподібність фракталів нагадує про універсальність законів природи. Від найменших структур — сніжинки чи листка — до гігантських — галактик чи хмарових систем — світ побудований за повторюваними принципами. І фрактали дають нам ключ до їхнього розуміння.

Фрактальна геометрія — це мова, якою природа описує себе. Вона дозволяє бачити у хаосі — закономірність, у складності — структуру, а в безмежному — повторювану простоту. Математичні закономірності хаосу через фрактали відкривають нові горизонти пізнання: у науці, мистецтві, технологіях і навіть у філософії. Саме тому вивчення фракталів — це не лише математичне заняття, а подорож до глибин самої сутності Всесвіту.

СЕКЦІЯ 3. Історія математики

В.П. Притула, В.С. Демидов

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Науковий керівник: Н.М. Гузик, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Гіперболічні функції – математичні функції, які мають широке застосування в аналізі, диференціальних рівняннях, фізиці та інженерії. Вони виникли в результаті вивчення гіперболи, аналогічно до того, як тригонометричні функції пов'язані з одиничним колом. До основних гіперболічних функцій відносять гіперболічний синус $sh x$, гіперболічний косинус $ch x$, гіперболічний тангенс $th x$.

Вивчення гіперболічних функцій має глибоке історичне підґрунтя, яке сягає XVII–XVIII століть. Їх поява була тісно пов'язана з розвитком математичного аналізу та дослідженням нових класів функцій, що описують незвичайні геометричні об'єкти та фізичні явища. Ще в середині XVIII століття італійський математик Вінченцо Ріккати у своїх працях з інтегрування диференціальних рівнянь зіштовхнувся з функціями, які нагадували сучасні гіперболічний синус і косинус. Хоча він не ввів їх як окремий математичний апарат, його роботи стали важливим кроком до подальших досліджень. Незабаром німецький учений Йоганн Генріх Ламберт у 1760-х роках досліджував зв'язок між експоненційними функціями та геометрією, зокрема в контексті неевклідових просторів. Ці дослідження підготували ґрунт для подальшого формального визначення гіперболічних функцій. Значний прорив у вивченні гіперболічних функцій відбувся у XIX столітті завдяки працям видатних математиків. Французький фізик і математик Жан Батист Фур'є у 1822 році активно використовував ці функції під час розробки теорії теплопровідності, де вони виявилися необхідними для розв'язання певних типів диференціальних рівнянь. Незабаром ірландський вчений Вільям Роуен Гамільтон досліджував їхній зв'язок із кватерніонами та комплексними числами, що значно розширило сферу їх застосування. Важливу роль у формалізації гіперболічних функцій зіграв Огюстен-Луї Коші, який чітко визначив їх через експоненційні вирази:

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ці формули стали класичними і дозволили систематично вивчати властивості гіперболічних функцій. У 1830-х роках німецький математик Іпполіт Міндинг довів

аналогію між тригонометричними та гіперболічними функціями, що знайшло відображення в диференціальній геометрії.

На початку XX століття гіперболічні функції знайшли нові сфери застосування. Французький математик Анрі Пуанкаре використовував їх у теорії спеціальної відносності, де вони стали невід'ємною частиною перетворень Лоренца. Німецький учений Фелікс Клейн досліджував їхній зв'язок із геометрією Лобачевського, що підкреслило їх важливість у неевклідовій геометрії.

Гіперболічні функції часто називають "гіперболічною тригонометрією", оскільки вони виникають при вивченні гіперболи $x^2 - y^2 = 1$, аналогічно до того, як звичайні тригонометричні функції пов'язані з одиничним колом $x^2 + y^2 = 1$. Між цими двома класами функцій існує багато спільних властивостей, що підкреслюється фундаментальною тотожністю: $ch^2 x - sh^2 x = 1$, яка є аналогом основної тригонометричної тотожності $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ця аналогія дозволяє переносити багато результатів зі звичайної тригонометрії на гіперболічний випадок, що значно розширює можливості їх застосування.

Сьогодні гіперболічні функції залишаються потужним інструментом у сучасній математиці, фізиці та інженерії, продовжуючи відкривати нові перспективи в різних галузях науки. Гіперболічні функції знаходять несподівано широке застосування у військовій техніці, балістиці, радіолокації та системах управління. Їхні унікальні математичні властивості дозволяють точно моделювати складні динамічні процеси, пов'язані з рухом снарядів, траєкторіями ракет, розподілом хвиль у радіозв'язку та навігацією.

При стрільбі на великі відстані (наприклад, артилерійськими снарядами) траєкторія не є параболічною через опір повітря. Її форма ближча до ланцюгової лінії, яка описується гіперболічним косинусом:

$$y(x) = y_0 + a(ch(ax - x_0) - 1),$$

де $a = \frac{T_0}{w}$ – параметр форми траєкторії (T_0 – горизонтальна складова сили натягу,

w – вага снаряда на одиницю довжини); (x_0, y_0) – точка запуску.

У системах радіолокації та супутникового стеження сигнал поширюється не по прямій, а з урахуванням рефракції в атмосфері. Наслідком цього є поява гіперболічної залежності між часом затримки сигналу та відстанню:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + h^2},$$

де d – горизонтальна віддаль до цілі, h – висота цілі, c – швидкість світла. Якщо врахувати кривизну Землі (R – радіус Землі), то ця формула набуде вигляду:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{Rh} \operatorname{sh} \left(\frac{d}{R} \right).$$

Зокрема, для цілі на відстані $d = 300$ км та висоті $h = 10$ км час затримки сигналу дорівнює $\Delta t = \frac{2}{3 \cdot 10^8} \sqrt{6371 \cdot 10} \operatorname{sh}\left(\frac{300}{6371}\right) \approx 2$ мс.

Отже, гіперболічні функції є важливим інструментом у сучасній військовій справі. Вони використовуються для точного розрахунку балістичних траєкторій, корекції радіолокаційних вимірювань, усунення релятивістських похибок у навігаційних системах. Без них неможливо було б досягти високої точності сучасних озброєнь та систем стеження.

В.О. Довженко

Одеський фаховий коледж економіки, права та готельно-ресторанного бізнесу
Науковий керівник Р.П. Подолян викладач математики вищої категорії

ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ У ПРИРОДІ ТА ЇХ НЕРОЗГАДАНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ

Числа Фібоначчі з'являються в навколо нас будь-де — від розташування листя на стеблах рослин до кількості пелюсток у квітів і навіть у пропорціях людського тіла. Однак вчені досі не можуть дати остаточне пояснення тому, чому саме ця послідовність є настільки поширеною. Чи є це наслідком випадковості, чи існують приховані математичні закономірності в біологічних структурах? Чому числа Фібоначчі настільки поширені в природі? Чи можна пояснити ці закономірності з точки зору еволюції або фізичних законів?

Числа Фібоначчі широко зустрічаються в природі, проте їх поширення лишається науковою загадкою. Встановлено, що розташування листя, насіння соняшника, шишок сосни та мушель підпорядковується цій послідовності, забезпечуючи оптимальне зростання. У біології пропорції людського тіла та структура ДНК також демонструють закономірності, пов'язані із золотим перерізом. Навіть пропорції висоти та ширини картини Мона Ліза Леонардо да Вінчі наближені до золотого перетину.

На по сей день немає єдиного пояснення щодо цього явища: одні вчені вбачають у ньому результат еволюційної адаптації, інші — наслідок фундаментальних фізичних принципів.

Послідовність Фібоначчі — це ряд чисел, де кожне наступне є сумою двох попередніх: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 тощо. Цей математичний феномен широко проявляється в природі, зокрема в біологічних структурах і процесах.

Послідовність Фібоначчі визначається як:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

де F_n — це n -не число в послідовності

$F_{n-1} + F_{n-2}$ — два попередні числа.

Приклад. Обчислення n -го числа Фібоначчі (формула Біне)

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

де

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ - золотий переріз.}$$

Приклад обчислення 10-го числа Фібоначчі:

$$F_{10} = \frac{1.618^{10} - (1 - 1.618)^{10}}{\sqrt{5}}$$

$$F_{10} \approx \frac{161.8 - 0.006}{2.236} \approx 55$$

Отримуємо $F_{10} = 55$, що відповідає реальному 10-му числу Фібоначчі

Розташування листя та гілок. У багатьох рослин листя розташоване на стеблі під кутами, що відповідають дробам, пов'язаним із числами Фібоначчі. Це забезпечує оптимальне поглинання світла та ефективне використання простору. Подібно, гілки дерев часто формуються за схемами, що відповідають цій послідовності, сприяючи рівномірному розподілу ресурсів.

Квіти та суцвіття. Кількість пелюсток у квітках часто відповідає числам Фібоначчі. Наприклад, лілії мають 3 пелюстки, жовтець — 5, а деякі айстри — 21. У соняшниках насіння розташоване у вигляді двох наборів спіралей, що обертаються в протилежних напрямках, причому кількість спіралей у кожному наборі є сусідніми числами Фібоначчі, що сприяє щільному пакуванню насіння.

Шишки та плоди. Шишки сосни демонструють спіральні візерунки, де кількість спіралей у кожному напрямку відповідає числам Фібоначчі. Подібні закономірності спостерігаються в ананасах, де лусочки формують спіралі, кількість яких також відповідає цій послідовності.

Мушлі та раковини. Форма спіралей у мушлях наутилусів та інших молюсків наближається до логарифмічних спіралей, пов'язаних із золотим перерізом, який тісно пов'язаний із послідовністю Фібоначчі. Ця форма забезпечує структурну міцність та ефективне зростання.

Галактики та природні явища. Спіральні галактики, такі як Чумацький Шлях, мають рукави, що формують спіралі, подібні до логарифмічних, пов'язаних із послідовністю Фібоначчі. Це свідчить про універсальність цих математичних принципів у природі.

Наявність послідовності Фібоначчі в природі підкреслює глибокий зв'язок між математикою та біологією, демонструючи, як числові закономірності можуть визначати структуру та функціонування живих організмів.

Числа Фібоначчі та золотий переріз є фундаментальними закономірностями, що проявляються у природі — від розташування листя та суцвіть до спіралей мушель і будови галактик. Вони забезпечують ефективність росту та організації структур, однак механізми їхнього виникнення досі остаточно не пояснені. Подальші дослідження можуть розкрити зв'язок між цією математичною послідовністю, еволюційними процесами та фізичними законами.

Література

1. Knott, R. (2024). Fibonacci Numbers and Nature. Retrieved from r-knott.surrey.ac.uk
2. Insteading. (2023). The Fibonacci Sequence in Nature. Retrieved from insteading.com
3. Golden Number. (2023). Fibonacci Numbers in Plants. Retrieved from goldennumber.net

4. Livio, M. (2002). The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. Broadway Books.
5. Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2007). The Fabulous Fibonacci Numbers. Prometheus Books.
6. ScienceDirect. (2016). *Golden ratio: A subtle regulator in our body and cardiovascular system*. Retrieved from [sciencedirect.com](https://www.sciencedirect.com)

О.В. Демєнков

Одеський фаховий коледж економіки, права та готельно-ресторанного бізнесу
Науковий керівник **Подолян Р.П.**, викладач математики вищої категорії

ПАРАДОКС МОНТІ ГОЛЛА

Парадокс Монті Голла - одна з відомих задач теорії ймовірностей, розв'язок якої, на перший погляд, суперечить здоровому глузду. Задача формулюється як опис гіпотетичної гри, заснованої на американському телешоу «Let's Make a Deal». Ця задача названа на честь ведучого цієї передачі Монті Голла. Суть парадоксу полягає в протиріччі між інтуїтивним і математично обґрунтованим вибором.

Мета полягає в поясненні суті парадоксу Монті Голла з точки зору теорії ймовірностей, аналіз поведінки учасника, а також спростування поширеної інтуїтивної помилки, що шанси після відкриття одних дверей стають рівними.

«Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір?» - Саме так було поставлене на перший погляд легке питання в журналі Parade Magazine. Звичайна людина вирішить, що з самого початку шанси на знаходження машини в кожній з цих дверей будуть дорівнювати $\frac{1}{3}$ або 33,3%, бо за теорією ймовірності:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}.$$

Тепер, коли ведучий відкриває одну з дверей, то залишається 2 двері. Людина думає, що зараз шанси складають 50 на 50, бо за цією же теорією ймовірності ми отримаємо

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Але чи це правильно? Записавши варіанти розвитку подій в формі таблиці ми отримаємо:

Двері 1	Двері 2	Двері 3	Ведучий відкриває	Результат, якщо міняти двері	Результат, якщо не міняти двері
Авто	Коза	Коза	2 або 3	Коза	Авто
Коза	Авто	Коза	3	Авто	Коза
Коза	Коза	Авто	2	Авто	Коза

З цього ми отримаємо, що коли гравець міняє свій вибір, то ймовірність того, що за тими дверима буде авто складає $\frac{1}{2}$ або 66,7%, коли при незмінності вибору ймовірність успіху складає все ті самі 33,3% або $\frac{1}{3}$.

В чому тоді логічна помилка в першому варіанті рішення цієї задачі? На перший погляд все вірно: в формулах помилок немає. Але крім формул є ще одна умова – ведучий знає за якими дверима знаходиться автомобіль і відкриває ті двері, де точно його не має. З цього виходить, що хоча дверей і залишилося дві, але вони не є рівноймовірними, бо спочатку всі двері й мали однакову ймовірність бути виграшними, але згодом мали вже різні шанси бути обраними ведучим. Для більшості цей висновок суперечить інтуїтивному сприйняттю ситуації, і завдяки суперечності між цим висновком і відповіддю, на яку схиляє інтуїтивне мислення, задача так і називається – *парадокс Монті Голла*.

Для більшого розуміння замінімо три двері на сто і ведучий відкрив не одну, а зразу 98 дверей, залишаючи двері, які вибрав гравець і ще одні. З початку ймовірність правильного вибору двері була за теорією ймовірності:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{100}.$$

Але коли ведучий відкрив двері вже на ум не лізе сказати що ймовірність того, що вибрані двері будуть виграшні з ймовірністю 50%. Тут вже ясно що шанс залишився таким же самим - $\frac{1}{100}$. Тоді, якщо змінити свій вибір, то шанс вгадати буде вже 99%.

Також можна замінити умову на коефіцієнти. Тоді представимо що гравцю зразу говорять що за дверима, які він вибрав (нехай двері 1) автомобіль може бути з ймовірністю 33,3%. Потім говорять, що в одній з дверей (двері 2 або 3) не має автомобіля, тобто шанс його знаходження там дорівнює нулю. Тоді в нас виходить, що ймовірність знаходження автомобіля в останній двері складає 66,7%.

Ще можна розсудити так: якщо гравець вже знає, що двері можна поміняти, після того, як ведучий відкриє одні двері, в яких немає автомобіля, то він може зразу обрати двері, в яких, як йому здається, автомобіля немає, тоді шанс того, що він помилиться складає $\frac{1}{3}$. Тим самим це вказує на те, що в двері, яка залишиться, шанс знаходження автомобіля буде складати $\frac{2}{3}$.

Висновок. Парадокс Монті Голла є яскравим прикладом того, як людська інтуїція може помилятися у сфері ймовірнісного мислення. Незважаючи на простоту формулювання задачі, правильна відповідь суперечить логіці більшості людей. Аналіз парадоксу допомагає краще зрозуміти природу випадковості, ймовірностей і важливість математичних моделей при прийнятті рішень в умовах невизначеності. Його вивчення має практичне значення не лише у статистиці, а й у сферах, що пов'язані з аналізом ризиків, стратегічним плануванням і поведінковою економікою.

Література

1. Tierney, John (1991-07-21), Behind Monty Hall's Doors: Puzzle, Debate and Answer?
2. Selvin, Steve. A problem in probability // American Statistician : journal. — Vol. 29, no. 1. — P. 67. — JSTOR 2683689.

3. Rosenthal, J. S. (2005). Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities. HarperCollins
4. Vos Savant, M. (1990). Game Show Problem. Parade Magazine.
5. Morgan, J. P., & Chaganty, N. R. (1991). Let's Make a Deal: The Player's Dilemma. The American Statistician.

Ю.В. Хопта

Одеський фаховий коледж економіки, права та готельно-ресторанного бізнесу
Науковий керівник Р.П. Подолян, викладач математики вищої категорії

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ

Яким чином математичні відкриття вплинули на розвиток науки, технологій і суспільства? Чому їхній внесок часто залишається недооціненим широкою аудиторією?

Математичні інновації стали основою для безлічі ключових проривів у фізиці, інформатиці, економіці та техніці. Наприклад, закони Ньютона заклали фундамент класичної механіки, алгоритми стали ядром цифрових технологій, а статистичні методи дали змогу прогнозувати глобальні явища. Проте навіть за всеохоплюючого застосування математики її значення часто лишається поза увагою, адже результати відкриттів часто інтегруються у складні системи, невидимі для непрофесіоналів. Це створює необхідність популяризації математики, аби продемонструвати її критичну роль у формуванні сучасного світу та заохотити нові покоління до вивчення й дослідження цієї фундаментальної науки.

Сучасна математика постійно розширює свої межі, знаходячи застосування в різних галузях науки та технологій. У криптографії актуальні дослідження зосереджуються на розвитку квантових методів шифрування, які забезпечують максимальну безпеку цифрових даних. У біології математичне моделювання допомагає аналізувати поширення вірусів і функціонування екосистем. Теорія ймовірностей і статистика активно використовуються у фінансовій сфері для прогнозування ризиків і прийняття рішень. Водночас математичні алгоритми залишаються основою штучного інтелекту, від розпізнавання образів до аналізу великих даних. Однак, попри весь цей вплив, багато фундаментальних результатів математики залишаються маловідомими загалу, що створює потребу у їх популяризації.

Мета статті полягає у висвітленні впливу математичних відкриттів на розвиток науки, технологій і суспільства, популяризації фундаментальних ідей математики та демонстрації її значення у сучасному світі. Це також спрямовано на формування позитивного сприйняття математики, інформування широкої аудиторії про її ключові досягнення й надихання молодих дослідників до подальших наукових пошуків та інновацій.

Математика здавна слугує фундаментом наукових знань. Протягом історії людства численні математичні досягнення не лише сприяли розвитку цієї науки, а й суттєво вплинули на хід цивілізації, технічний прогрес і світогляд людства. Розглянемо ключові відкриття, що стали поворотними моментами в історії науки

1. Теорема Піфагора.

Одним із перших визначних відкриттів в геометрії є теорема Піфагора. Вона встановлює зв'язок між сторонами прямокутного трикутника. Квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Цей закон активно використовується в архітектурі, інженерії, навігації, а також у комп'ютерному моделюванні.

Аерокосмічна техніка, сфера застосування: обчислення оптимальної траєкторії польоту ракети між двома точками, з урахуванням горизонтальної й вертикальної відстані. Формула:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Дизайн віртуальної реальності (VR). Сфера застосування: розрахунок відстані між об'єктами у 3D-просторі для забезпечення реалістичного сприйняття середовища. Формула в 3D-просторі:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. Константа π - безкінечне число в колі.

Число π (пі) - незмінне співвідношення довжини кола до його діаметра. Це ірраціональне число застосовується в обчисленнях, що стосуються кола та сфери:

$$C=2\pi r, S=\pi r^2,$$

де C - довжина кола, S - площа круга, r - радіус. Число π знаходить застосування у сучасній техніці.

Формули з числом π широко використовуються при проєктуванні компонентів техніки - таких як труби, двигуни, обмотки в електричних колах, ролики, елементи передач, та інші циліндричні або круглі елементи.

$$V = \pi r^2 H.$$

3. Диференціальне та інтегральне числення.

Математичний аналіз дав змогу вивчати процеси зміни та руху. Похідна описує миттєву швидкість зміни, а інтеграл дозволяє обчислювати площу фігур, обмежених графіком функції:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

4. Екологія та біологія.

Опис біологічних процесів, як-то ріст популяції чи обсяг води в річці. Об'єм води, що протікає через річку (інтегрування) можна обчислити за формулою:

$$V = \int_a^b Q(t)dt.$$

5. Теорія ймовірностей.

Ймовірність допомагає аналізувати події у випадкових або невизначених ситуаціях. Основна формула виглядає так:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n},$$

де $P(A)$ - ймовірність виникнення події A , $n(A)$ - кількість сприятливих результатів, n - загальна кількість можливих випадків. Теорія ймовірностей є основою сучасної статистики, ризик-менеджменту, штучного інтелекту та фінансових моделей.

Ця ж формула застосовується і для моделювання ризиків, управління ризиками в авіації, використовуючи статистичні дані для аналізу аварійності, оцінки ймовірності аварій та інцидентів, прогнозування небезпек на основі історичних даних.

6. Енергія та маса - формула Ейнштейна.

Одне з найвідоміших рівнянь XX століття:

$$E = mc^2,$$

де E - енергія, m - маса, c - швидкість світла у вакуумі. Ця формула демонструє взаємозв'язок між масою та енергією і стала основою для ядерної енергетики та нових наукових уявлень про будову матерії.

Для створення елементарних частинок, у колайдерах, формула застосовується для опису енергетичних процесів.

В космічній енергетиці застосовується для розрахунку кількості енергії, яка виробляється у зірках через ядерний синтез.

Висновки. Математичні відкриття залишаються ключовими рушіями прогресу у науці, технологіях та суспільстві. Від історичних проривів до сучасних інновацій, таких як штучний інтелект та математичне моделювання, математика формує основу для розуміння світу та його вдосконалення. Попри це, багато її досягнень залишаються недооціненими, що підкреслює важливість популяризації математики й залучення молодого покоління до її вивчення.

Подальші дослідження можуть зосереджуватись на розвитку квантових обчислень, інтеграції математики у медицину й біологію, а також на математичному моделюванні для розв'язання глобальних викликів, таких як зміни клімату. Математика має великий потенціал для забезпечення інноваційного майбутнього, яке зробить наше життя більш ефективним і гармонійним.

Література

1. Бойко, В.І. Вступ до математичного аналізу. Київ: Освіта, 2010.
2. Дорофєєв, Г.В. Математика і сучасний світ. Харків: Ранок, 2015.
3. Клайн, М. Математика: втрата впевненості. Москва: Наука, 1985.
4. Ньюман, Дж. Світ математики: від Евкліда до сучасності. Львів: Світ, 1996.
5. Філдс, Дж. Математичні моделі та аналіз. Одеса: Фоліо, 2012.
6. Хілберт, Д. Основа геометрії. Харків: Ранок, 2009.

В.Р. Скорик

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ІСТОРІЯ ЧИСЛА π

Число π — це математична константа, незмінне число, яке визначає співвідношення між довжиною кола та його діаметром, $\pi \approx 3,14159265358979$. Число π дозволяє вирахувати площу круга за формулою $S = \pi R^2$, де R — радіус кола та обчислити довжину кола за формулою $C = 2\pi R$, також зустрічається у багатьох областях математики, зокрема в геометрії, математичному аналізі, теорії чисел, фізиці та інших науках. Число π має безліч цікавих властивостей і формул, зокрема його можна виразити через нескінченні ряди, інтеграли та інші математичні структури.

Перші згадки про число π з'явилися ще близько 2000 року до н.е. у Вавилоні. Там його наближене значення дорівнювало 3,125, а в Стародавньому Єгипті — 3,143 (записано в папірусі Рінда). Хоча тоді ще не існувало самого поняття « π », люди вже інтуїтивно використовували це співвідношення для практичних розрахунків.

Першим, хто підійшов до наукового обчислення числа π , був Архімед (близько 250 р. до н.е.). Він застосував метод вписаних і описаних багатокутників до кола і визначив, що значення π знаходиться між 3,1408 і 3,1429. Це був значний крок вперед, адже Архімед вперше використав логіку і геометрію для точного наближення.

У V столітті н.е. китайський математик Цзу Чунчжи обчислив число π до семи знаків після коми ($\approx 3,1415929$), що було надзвичайно точним на той час. Також індійський математик Мадхава з Сангамаграми у XIV столітті відкрив ряд Мадхави–Лейбніца, що став основою для обчислення числа π через нескінченні ряди:

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots (I)$$

У 1706 році британський математик Вільям Джонс вперше використав грецьку літеру π позначення цього числа. Згодом, у 1737 році, знаменитий швейцарський математик Леонард Ейлер почав широко використовувати цей символ, що зробило його загальновизнаним у науковій спільноті.

Ісаак Ньютон обчислив багато знаків π за допомогою біноміального ряду. Було відкрито нові формули (наприклад, формула Бруна, ряд Рамануджана), які давали швидку збіжність до точного значення π . З появою комп'ютерів почалося справжнє «полювання» за десятковими знаками π :

У 1949 році комп'ютер ENIAC обчислив число π до 2037 знаків.

У 2022 році було обчислено понад 100 трильйонів знаків після коми

Число π застосовується у багатьох розділах науки:

- Фізика: допомагає при розрахунках обертання, електромагнітних явищ, хвильових процесів, моментів імпульсу.
- Інженерія: використовується у будівництві мостів, арок, тунелів, де необхідно точно обчислювати розміри круглих або криволінійних форм.
- Геометрія: з його допомогою знаходять площу круга, об'єм кулі, довжину дуги та інші параметри.
- Статистика і теорія ймовірностей: π з'являється у багатьох формулах, зокрема в нормальному розподілі.
- Інформатика: використовується у комп'ютерному моделюванні, 3D-графіці, алгоритмах стискання і криптографії.
- Астрономія: допомагає в обчисленні орбіт планет, супутників і відстаней у Всесвіті.

Цікаві факти:

У багатьох країнах відзначають День числа π — 14 березня (3/14 за американським форматом дати).

У Палаці відкриттів (музей науки в Парижі) існує кругова кімната, яка називається «пі-кімната». На її стіні вписано 707 цифр π . Ці цифри було засновано на розрахунку 1853 року англійського математика Вільяма Шенкса, який містив помилку, починаючи з 528-ї цифри. Цю помилку було виявлено 1946 року й виправлено 1949 року

Оскільки π — ірраціональне та трансцендентне число, вважається, що воно містить усі можливі послідовності цифр, зокрема твою дату народження, номер телефону, і навіть будь-який текст, якщо його закодувати в числа.

Простий метод запам'ятати число π з точністю до шести значущих цифр після коми: випишемо парами перші три натуральних непарних числа: 113355. Розділивши список навпіл, поділимо друге число на перше $\frac{355}{113} = 3,141519$.

Отже, число π є одним із найдавніших і водночас найзагадковіших математичних констант, відкритих людством. Від перших наближених обчислень у стародавніх цивілізаціях до сучасних високоточних розрахунків, π супроводжує розвиток науки, техніки та культури. Його універсальність проявляється не лише в геометрії кола, а й у фізиці, інженерії, теорії ймовірностей та комп'ютерних технологіях. Сьогодні число π символізує безмежність наукового пізнання і незгасаючу цікавість людини до таємниць природи.

Література

1. Боярчук А. М. Історія числа π : від стародавніх цивілізацій до сучасності // Математичні студії. – 2020. – Т. 45. – № 2. – С. 15–21.
2. Стюарт І. Число π : як одна константа змінила світ / перекл. з англ. О. Демиденко. – Київ : Наш Формат, 2018. – 232 с.

3. Лівшиц Ф. М. Число π і його властивості // Вісник Київського університету. Серія: Математика. – 2017. – № 1. – С. 32–40.
4. Beckmann P. A History of Pi. – New York : St. Martin's Press, 1971. – 180 p.

А.А. Фіщук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

СТАЛА ЕЙЛЕРА

Стала Ейлера – e - математична константа, яка є трансцендентним числом. $e \approx 2,71828182845904523536$. Частіше за все називається числом Ейлера. Трансцендентне число — це дійсне або комплексне число, яке не є алгебраїчним — іншими словами, число, яке не може бути коренем многочлена з раціональними коефіцієнтами. Число e відіграє важливу роль в диференціальному та інтегральному численні, а також в багатьох інших розділах математики, так як функція e^x не змінюється під час інтегрування та диференціювання.

1618 р. - число e вперше з'явилося в математиці як щось неважливе в додатку до роботи Джона Непера, де була таблиця натуральних логарифмів, однак воно не входило туди як основа. В 1624 р. Бріггс дав наближене значення десяткового логарифма. Та саме число e в його роботі не згадується.

У 1647 р. Сен-Вінсент обчислив площу сектора гіперболи. Тільки в 1661 р. Гюйгенс зрозумів зв'язок між рівнобічною гіперболою і логарифмами. Він довів, що площа під графіком рівнобічної гіперболи на проміжку від 1 до e дорівнює 1. Опираючись на цю властивість число e є основою натуральних логарифмів. Далі у 1661 р. Гюйгенс визначив криву виду $y = k^a$, яку назвав логарифмічною.

1668 р. - Нікола Меркатор опублікував роботу *Logarithmotechnia*, що містить розкладання в ряд, де уперше використовує назву "натуральний логарифм".

Вперше e виникає не у зв'язку з логарифмами, а у зв'язку з числовими рядами.

1683 р. - Якоб Бернуллі досліджував складні відсотки, та задався питанням: що буде, якщо відсотки нараховуються безперервно, кожену секунду, кожену мілісекунду? Виявилося, що при такому «безперервному» зростанні сума збільшується в e разів. Рахунок, який починається від 1 долара і пропонує річну відсоткову ставку R , через три роки буде отримувати e^{Rt} доларів при неперервному складанні. R – десятковий еквівалент відсоткової ставки, вираженої у відсотках, тому для 5%, $R=5/100=0,05$. Таким чином Якоб Бернуллі став першим, хто розрахував: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Бернуллі доводив, що ця границя знаходиться між 2 і 3 використовуючи біноміальну теорему. Це можна розглядати як перше наближення до числа e , але він не зрозумів зв'язку між своєю роботою і логарифмічними роботами.

У 1684 р. Джеймс Грегорі все таки усвідомив зв'язок між степенями і логарифмами. Та не можна точно стверджувати, що він був першим.

В 1690 р. Число e з'явилося у листі Лейбніца до Гюйгенса, у звичному для нас вигляді, але тоді його позначали «b» .

Йоганн Бернуллі почав вивчення показникової функції і в 1697 році публікує «Principia calculi exponentialum seu percurrentium», де обчислюються суми експоненційних рядів, та отримано деякі результати почленим інтегруванням.

Вперше позначення « e » з'явилося в 1731 р. у листі Ейлера, яке було адресоване Гольдбаху. Вивчаючи e Ейлер зробив багато відкриттів. Тільки в 1748 році в *Introductio in Analysin infinitorum* він повністю обґрунтував всі ідеї, які були пов'язані із e , зокрема, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$

Ейлер знайшов перші 18 десяткових знаків експоненти. Також він знайшов розклад e в неперервні (ланцюгові) дроби і навів зразки цього розкладу. Це стало першою спробою доведення ірраціональності числа e , тому більшість думає, що саме він довів її. Насправді у 1873 році Ерміт досяг цього. До сьогодні лишилось відкрите питання чи e алгебраїчне число, останнє, що відомо в цьому напрямку, що e^e чи e^{e^2} - трансцендентні.

Далі продовжився розрахунок наступних десяткових символів. Бурман обчислив 346 знаків в 1884 році, 187 початкових знаків співпали із тими, що знайшов Шенкс, проте всі інші різнилися. В 1887 році 272 цифри обчислив Адамс.

Способи визначення

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Число e – це не просто якась абстрактна величина. Воно виникає природним чином у багатьох галузях математики та природи:

Зростання і загасання: e описує процеси безперервного зростання або зменшення, наприклад, зростання бактерій у колонії, радіоактивний розпад, охолодження об'єкта.

Криві та спіралі: e зустрічається у формулах, що описують багато кривих і спіралей, які трапляються в природі, наприклад, спіраль мушлі молюска або форму соняшника.

Число e , як універсальний інструмент, знаходить застосування в багатьох галузях:

- Фізика: опис радіоактивного розпаду, законів руху, електричних ланцюгів.
- Економіка: розрахунок складних відсотків, моделювання економічного зростання.
- Інформатика: розробка алгоритмів, стиснення даних, штучний інтелект.
- Біологія: моделювання зростання популяцій, поширення хвороб.

Література

1. J.J.Connor, E.F.Robertson. The number e . Переклад статті <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/e.html>
2. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/fad3bdf0-8da0-4307-bedb-bbc65eb1c2b6/content>
3. <https://ua.onlinemschool.com/math/library/numbers/e/>
4. https://miraa.com.ua/chyslo-ejlера-shho-cze-take-i-navishho-vono-potribne/#Де_використовується_число_Ейлера

А.В. Мельник

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ВНЕСОК УКРАЇНСЬКИХ ЖІНОК-МАТЕМАТИКІВ У ГАЛУЗІ МАТЕМАТИКИ

Математика – надзвичайно важлива наука. Видатних математиків, які розвивають цю науку, відомо багато. Почесне місце серед них посідають жінки. Вони створили наукові праці та підручники, які збагатили скарбницю світової математичної літератури.

Перша відома жінка-математик – Гіпатія Олександрійська. Вона народилася і жила в Олександрії в 370-415рр. Гіпатія була першою жінкою-математиком, філософом, астрономом і лікарем. Вона була настільки всебічно освіченою, що на її думку зважали всі вчені того часу. Гіпатія написала коментарі до праць Діофанта і Аполлонія. Але, на жаль, наукові праці Гіпатії не збереглися.

Жінки-науковиці зробили значні відкриття у таких напрямках, як функціональний аналіз, диференціальні рівняння, алгебра, топологія, теорія ймовірностей та математична логіка. Аналізується як історичний, так і сучасний вимір їхньої наукової діяльності. Приділено увагу не лише теоретичним здобуткам, а й практичному застосуванню математичних методів у техніці, економіці, біології та ІТ.

Вагоме місце у світовій математичній науковій спільноті посідають відкриття українських жінок-вчених:

Мирослава Варцаба — провідна українська дослідниця у галузі функціонального аналізу. Її роботи з операторних рівнянь стали фундаментальними для подальших досліджень у нелінійній функціональній аналітиці.

Олена Озерова — спеціалістка в галузі алгебри. Вивчала властивості кілець з нульовими дільниками, зосереджувалась на модульній теорії.

Галина Писаренко — займалася крайовими задачами для диференціальних рівнянь, зокрема розробкою аналітичних методів наближення.

Софія Яновська — українська математик і філософ. Професорка Київського університету, дослідниця логічних основ математики та історії математичних ідей. Її праці стали основою для розвитку філософії математики в Україні. Вона відіграла важливу роль у становленні математичної логіки як окремої наукової дисципліни.

Сучасні науковиці:

Наталія Шумляк — авторка досліджень з теорії ймовірностей, зокрема в умовах стохастичного моделювання в економіці та біології.

Світлана Кругляк — працює у напрямі прикладних методів у диференціальних рівняннях, зокрема чисельного розв’язання крайових задач.

Ірина Єгорченко — активно популяризує науку, працює у галузі математичної логіки та моделювання у сфері біоінформатики.

Марина В'язовська — Здобула світове визнання у 2016 році, розв'язавши задачу оптимального пакування куль у 8-вимірному просторі. У 2022 році стала першою українкою й другою жінкою в історії, яка отримала Медаль Філдса. Працює професором у Федеральній політехнічній школі Лозанни.

Олена Ванеєва — українська математик, кандидат фізико-математичних наук. Працює в Інституті математики НАН України. Спеціалізується на груповому аналізі диференціальних рівнянь та математичному моделюванні. Лауреатка премії Президента України для молодих учених (2010) та міжнародної нагороди L'ORÉAL-UNESCO «For Women in Science» (2018).

Катерина Лавріщева — українська вчена в галузі кібернетики та програмної інженерії. Доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України. Працювала в Інституті кібернетики та Інституті програмних систем НАН України, де очолювала відділи програмної інженерії. Її наукові інтереси охоплювали технології розробки комп'ютерних систем, методи інженерії розподілених систем та програмне забезпечення. Авторка понад 100 наукових праць, включаючи підручник «Програмна інженерія» (2008). Лауреатка Державної премії України в галузі науки і техніки.

Українські жінки активно беруть участь у розробці нових методик викладання математики, створюють сучасні підручники та освітні програми, беруть участь у міжнародних проєктах (наприклад, Horizon Europe, INTAS).

Багато українських жінок-математиків представляють Україну на світових математичних форумах, публікуються в авторитетних виданнях, беруть участь у створенні міжнародних колаборацій із теоретичної та прикладної математики. Українські жінки-математики відіграють суттєву роль у розвитку як теоретичної, так і прикладної математики. Їхні дослідження мають вагоме значення в контексті глобального наукового простору. Варто посилювати підтримку жінок у STEM-напрямах, заохочуючи нові покоління до наукової діяльності.

Література

1. Гусєва Н. С., Сидоренко Т. О. Видатні українські жінки-математики: історія і сучасність // Історія науки і техніки. – 2020. – № 2 (16). – С. 42–49.
2. Кононенко О. М. Українські жінки в історії математики // Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Математика та інформатика. – 2019. – Вип. 1. – С. 80–84.
3. Попова Г. О. Роль жінок-математиків України у розвитку математичної науки // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2018. – № 4. – С. 67–73.
4. Маркова Н. В. Постаті українських жінок у розвитку прикладної математики // Математичні студії. – 2021. – Т. 56, № 3. – С. 125–132.
5. Берест І. Внесок Софії Яновської у становлення математичної логіки в Україні // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Серія: Педагогіка і психологія. – 2017. – Вип. 55. – С. 231–237.

К.О. Крижановський

Львівський державний університет безпеки Життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ІНВАРІАНТНІ ВЛАСТИВОСТІ

Однією із найбільш популярних і інтенсивно розвинутих областей математики XIX століття була геометрична теорія інваріантів. Ще в 1640 році французький математик Р.Декарт (1596-1650) знайшов інваріантні співвідношення між числом вершин, ребер і граней простих многогранників. Це співвідношення Декарт виразив формулою $V-E+F=2$, де V - число вершин, E - число ребер і F - число граней. У 1752 році Л.Ейлер навів строге доведення цієї формули. Прикладом інваріанта може служити площа фігури, яка складається із декількох частин або коло, яке переходить саме в себе при повороті площини навколо його центра.

Інваріант (англ. Invariant, нім. Invariante) – термін, що використовується в математиці та фізиці, а також в програмуванні. Ін - внутрішнє, варіант - взятий за ознаками (критеріями, значеннями, властивостями чи сумою властивостей) параметризований, маркований параметр, чи сукупність параметрів, що означає щось незмінне в полі (діапазоні, просторі, масиві, множині, послідовності) значень. Зазвичай це статистичний максимум чи константа в полі значень. Інваріант – число, вираз тощо, які пов'язані з деяким математичним об'єктом і не змінюються при певних перетвореннях. Наприклад, відстань між двома точками площини є інваріантом при перенесенні або повертанні системи координат; площа будь-якої фігури, кут між двома прямими — інваріанти руху. Похідний термін — інваріантність — властивість системи не змінювати своїх характеристик при перетвореннях.

Інваріантом системи (або математичного об'єкта) називатимемо не лише її кількісну характеристику, яка не змінюється при заданих перетвореннях, але й кожен якісний характер, що має властивості зберігатися при таких перетвореннях.

При розв'язуванні задач з математики інколи доводиться зустрічатися з ситуацією коли задана система (або математичний об'єкт) послідовно змінює свій стан. І треба визначити певну характеристику її кінцевого стану. Повністю прослідкувати за всіма переходами буває складно, а то і неможливо. Тоді знайти розв'язок допомагає обчислення деякої величини, що характеризує стан системи і зберігається при всіх її переходах або перетвореннях. Таку величину називають інваріантом даної системи. Зрозуміло, що при цьому значення інваріанта в початковому та кінцевому станах збігаються.

Ми розглядаємо інваріантні властивості в математиці. Вони відіграють важливу роль, оскільки вони дозволяють знаходити спрощені підходи до розв'язання задач, аналізувати структури та розпізнавати еквівалентність об'єктів. Забезпечення нечутливості (інваріантності) визначальних для збереження реальних динамічних систем змінних, показників стосовно зовнішніх впливів — одне з найважливіших питань регулювання та автоматичного управління.

Лемма 1. Парність суми декількох цілих чисел збігається з парністю кількості непарних доданків.

Приклад 1. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 11. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати їхню суму, зменшену на 1, тобто, якщо стерли числа a і b , то можна написати число $a+b-1$. Повторивши таку операцію 10 разів, одержимо одне число. Знайти це число.

Розв'язання. Якщо замість чисел a і b написати число $a+b-1$, то сума усіх чисел на дошці зменшиться на 1. Знайшли інваріант: сума усіх чисел на дошці після кожної операції зменшується на 1. Початкова сума:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66.$$

За 10 операцій сума зменшиться на 10 і дорівнюватиме 56. Отже, єдине число, яке залишиться на дошці, — число 56.

Приклад 2. Від шахової дошки розміром 8×8 вирізали крайню верхню ліву і крайню нижню праву клітинки. Чи можна решта дошки замостити кісточками доміно, покриваючи однією кісточкою рівно дві клітинки дошки?

Розв'язання. Щоб покрити 62 клітинки решта дошки, потрібні 31 кісточка доміно, які можуть покрити однакову кількість чорних і білих клітинок. Оскільки вирізані клітинки мають однаковий колір, то залишилася різна кількість чорних і білих клітинок. Отже, решта дошки замостити кісточками

Приклад 3. Чи можна виплатити 25 гривень за допомогою десяти купюр вартістю 1 та 5 гривень?

Розв'язання цієї задачі ґрунтується на простому спостереженні: сума парної кількості непарних чисел є парною. Узагальнення цього факту виглядає так: парність суми кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків: якщо кількість непарних доданків є (не)парною, то і сума також є (не)парною. Відповідь: не можна

Інваріанти відіграють важливу роль у математиці, оскільки дозволяють виявити сталі властивості об'єктів при різних перетвореннях. Вони спрощують аналіз задач, допомагають знаходити рішення та робити логічні висновки. Використання інваріантів є ефективним інструментом у розв'язанні як теоретичних, так і практичних проблем.

Література

1. Клайн Ф. Евклідова і неевклідова геометрія / Фелікс Клайн ; пер. з нім. — К. : Наукова думка, 2006. — 272 с.

2. Перельман Я. І. Цікава математика / Яків Ісидорович Перельман. – К. : Школа, 2005. – 224 с.
3. Орехов П. Математичні олімпіади. Завдання та розв'язки / П. Орехов. – Львів : Літопис, 2012. – 184 с.
4. Вейль А. Математика: мистецтво і наука / Андре Вейль. – К. : Основи, 1998. – 238 с.

М.С. Харабара

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ІСТОРІЯ

Вимірювання та обчислення супроводжують людину протягом всього існування людства. Мабуть, саме тому люди навчилися вимірювати час, довжину, площу, об'єм, масу, температуру. В різних народах за різних часів існували свої міри, свої одиниці вимірювання. Виміряти будь-яку величину означає порівняти значення цієї величини з іншим її значенням, прийнятим за одиницю вимірювання. Для цього потрібно мати еталон вимірювання та прилади для вимірювання чи обчислення.

Щоб уникнути непорозумінь під час вимірювання величин довільно вибраними одиницями вимірювання, встановлюють певні сталі одиниці — міри. Міри встановлюються або державною владою — одиниці довжини, площі, об'єму тощо; світова метрична система мір: одиниці температури, кількості теплоти, одиниці роботи і т.д.; або, іноді, звичаями. Кожен народ має свої звичаї і традиції, які, як перлини народної мудрості, передаються із покоління в покоління. Це стосується і народних мір.

В давнину люди вимірювали частинами тіла і тут є кілька прикладів цих вимірів. Міри приходили разом з торговцями.

Аршин прийшов разом з китайським шовком, індійською парчею та оксамитом. Продаючи тканину, купці натягували її від плеча до кінчиків пальців руки. Такий спосіб був дуже зручним, адже завжди був при собі. І до того ж, купці могли використовувати це на свою користь: натягували більше тканину або не дотягували до самих кінців пальців. А ще вибирали короткоруких торговців: той же відріз тканини, а аршинів у ньому більше. Пізніше був затверджений казенний аршин, що мав вигляд дерев'яної лінійки, довжина якої була 71 см 12 мм. Щоб кінці лінійки не стирались і щоб запобігти обмірюванню покупців, на кінці кріпились металеві накінецьники з державним клеймом.

Дюйм — міра довжини, якою користуються в багатьох країнах уже протягом кількох віків. Це — невелика довжина. Походить дюйм від ширини першої фаланги великого пальця чоловіка. І саме слово у перекладі з голландської означає „великий палець”. В Англії його розмір визначали точніше. Спочатку 1 дюйм визначали як довжину трьох ячмінних зерен. Але потім встановили, що 1 дюйм = 1/12 фута і, значить, 1 дюйм = 25,4 мм. Був ще один дюйм (ширина великого пальця) - перст = 2 см.

Фут — міра довжини, якою користуються вже тисячі років. Походить вона від англійського слова foot — „ступня”, тобто фут — це довжина ступні людини. У різних

країнах існують різні фути – від 28 до 33 сантиметрів, але найголовніший фут – англійський, що дорівнює 30,48 см.

Ярд. Одна стара легенда говорить, що ярд був визначений в 1101 р як відстань від носа англійського короля Генріха I до кінчика середнього пальця його витягнутої руки. За іншою легендою, ярд — це довжина меча Генріха I. Фут визначали як $1/3$ ярда. Але одного недільного дня 1324 р інший король Едуард II звелів визначати фут як середнє арифметичне "довжин ступнів 16 чоловік". З тих пір $1 \text{ фут} = 30,48 \text{ см}$, а $1 \text{ ярд} = 3 \text{ фути} = 91,44 \text{ см}$.

Лікоть – це відстань від кінця витягнутого середнього пальця руки або стиснутого кулака до ліктьового згину. Приблизна довжина в еквіваленті метричної системи складає від 38 до 46 см. Лікоть мав кілька значень: неповний лікоть; двохдолонний лікоть; великий лікоть. Великий лікоть (майже в два рази більший ліктя), дорівнює довжині руки від плеча, витіснив початковий звичайний лікоть. На теренах Лівобережної України до кінця XVII ст., а у Правобережній Україні до кінця XVIII ст. як міра довжини використовувався лікоть, уніфікований з європейською системою мір. Лікоть ділився на 2 стопи.

Винахід метричної системи наприкінці XVIII століття в революційній Франції був результатом тривалих зусиль створити таку універсальну систему вимірювання, яка не базувалася б на розмірах тіла, які відрізнялися від людини до людини або від місця до місця. Натомість французи прагнули створити систему, яка триватиме «на всі часи, для всіх народів».

Французька академія наук у 1790 році створила раду вчених для розробки нової системи мір. У 1791 році була запропонована десяткова система: $\text{Метр} = 1/10\,000\,000$ відстані від Північного полюса до екватора через Париж. У 1792 році астрономи Мешен і Деламбр почали вимірювання метра на відрізку від Дюнкерка до Барселони. Робота тривала понад сім років. Платинова мірна планка стала першим прототипом метра, хоч і виявилася коротшою на 0,2 мм через помилки у врахуванні кривизни Землі. Метр залишили в тому вигляді, як його реалізували, попри неточність.

У 1875 році була підписана Метрична конвенція, яка створила: CGPM — Генеральну конференцію з мір і ваг. BIPM — Міжнародне бюро мір і ваг у Севрі, Франція. BIPM відповідає за Міжнародну систему одиниць (SI) і є зберігачем еталонів.

Фізичні об'єкти як еталони мір мають недоліки: Металеві стрижні можуть розширюватися або стискатися від температури. Кілограм може змінювати масу через пил або втрату матеріалу. Секунда, заснована на обертанні Землі, не є абсолютно стабільною. Через ці обмеження в середині XX століття вчені вирішили перейти до визначення одиниць через фундаментальні фізичні константи.

Сучасна Міжнародна система одиниць (SI), створена у 1950-х роках, базується на незмінних природних величинах. SI має сім базових одиниць, кожна з яких визначається через фундаментальну фізичну константу: метр (m), кілограм

(kg), секунда (s), Ампер (A) — сила електричного струму, Кельвін (K) — температура, моль (mol) — кількість речовини, кандела (cd) — світлова сила.

Ці одиниці базуються на семи фундаментальних фізичних константах: швидкість світла у вакуумі (для метра); елементарний заряд (для ампера); Планківська стала (для кілограма); стала Больцмана (для кельвіна); стала Авогадро (для моля); частота гіпертонального переходу атома цезію-133 (для секунди); світлова ефективність випромінювання з частотою 540 ТГц (для кандели).

Історія вимірювання показує довгий шлях людства від використання приблизних, тілозалежних одиниць до створення точної, науково обґрунтованої та універсальної системи мір. Виникнення метричної системи у Франції наприкінці XVIII століття стало першим кроком до глобальної уніфікації вимірювань. Проте навіть еталони з металу виявилися ненадійними, оскільки могли змінювати свої властивості з часом. Тому з середини XX століття наукова спільнота переходить до визначення одиниць через незмінні фізичні константи природи — сталі величини, які не залежать від зовнішніх умов і не змінюються в часі. Сучасна система SI базується на семи таких фундаментальних константах, що дозволяє створити стійку, точну й однакову систему вимірювань для всього світу, незалежно від місця, часу чи умов. Такий підхід забезпечує наукову точність, стабільність і міжнародну узгодженість у вимірюваннях, що є критично важливим для науки, техніки, торгівлі та повсякденного життя.

Література

1. Кретов С. Д. Історія одиниць вимірювання : навч. посіб. / С. Д. Кретов. — Київ : Видавничий дім "Слово", 2021. — 212 с.
2. Тищенко П. І. Історичний розвиток метричних систем // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2019. — № 3. — С. 48–54.
3. Путілін Ю. Одиниці вимірювання: від стародавніх систем до сучасного SI // Математика в школах України. — 2020. — № 7. — С. 15–19.
4. Олдер К. Вимірювання всього на світі: семирічна одісея, яка змінила світ / пер. з англ. І. Коваль. — Харків : Клуб сімейного дозвілля, 2005. — 464 с.

О.Р. Воронко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки

ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ В НЕРІВНОСТЯХ, РІВНЯННЯХ І ТОТОЖНОСТЯХ

У математичному аналізі похідна та інтеграл відіграють ключову роль не лише в обчисленнях, а й у доведенні рівнянь, нерівностей та тотожностей. Ці інструменти дозволяють аналітично досліджувати властивості функцій та формулювати строгі математичні висновки.

Одним із основних застосувань похідної є аналіз монотонності функцій, що дозволяє доводити нерівності. Наприклад, нерівність $\ln x < x - 1$ для $x > 0$ можна довести, проаналізувавши похідну допоміжної функції. Похідні також використовують для перевірки тотожностей, зокрема при доведенні рівності функціональних виразів.

Інтеграли застосовують при встановленні числових оцінок і порівнянні величин. Геометрична інтерпретація площі під графіком функції дає змогу візуалізувати нерівності, як-от:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx. \quad (1)$$

Даний метод можна використати для доведення нерівностей. Наприклад, при $x \geq 0$ маємо очевидну нерівність $e^x \geq 1$, тому

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt, \quad (2)$$

тобто

$$e^x \geq x + 1. \quad (3)$$

Застосовуючи той самий метод до нерівності (3), одержимо

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x (t+1) dt, \quad (4)$$
$$e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2} \text{ або } e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ і т.д.}$$

Слід звернути увагу на те, що правильність цих нерівностей можна встановити за допомогою диференціального числення

Властивістю визначеного інтегралу є те, що він зберігає знак функції. Це дозволяє доводити важливі твердження, як-от нерівність Коші — Буняковського:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \quad (5)$$

Комбіноване застосування похідної та інтегралу лежить в основі розв'язання диференціальних рівнянь. Наприклад, рівняння $y' = y$ має розв'язок $y = Ce^x$, що часто використовується в математичному моделюванні.

Заміна змінної в інтегралах — потужний метод для спрощення складних обчислень. Наприклад, заміна $x = \operatorname{tg} t$ дозволяє легко обчислити $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Також похідна використовується для доведення класичних нерівностей, як-от:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

що підтверджується вивченням вгнутості функції $\ln(x)$ та застосуванням нерівності Йенсена.

Подібні приклади ще раз показують, як похідні дозволяють зручно і швидко доводити математичні твердження, які на перший погляд здаються складними. Інтеграли також відіграють важливу роль не тільки в математиці, але й у багатьох практичних завданнях, наприклад у фізиці для обчислення площ, об'ємів або значень енергії. Окрім цього, поняття похідної та інтегралу часто зустрічається у задачах з теорії ймовірностей. Наприклад, щоб знайти ймовірність для певної випадкової величини, використовують інтеграл від густини ймовірності, а похідна допомагає вивчати властивості функції розподілу. У технічних науках похідна показує, як швидко змінюється величина в залежності від часу або інших параметрів, наприклад, швидкість або прискорення, а інтеграл дозволяє визначити накопичені значення, такі як пройдений шлях, робота чи заряд.

Це доводить, що похідні та інтеграли — це не просто суха теорія з підручників, а корисні інструменти для вирішення реальних задач у повсякденному житті та професійній діяльності. Отже, похідна й інтеграл — це не лише обчислювальні інструменти, а й засоби логічного аналізу, що дозволяють глибоко досліджувати функції, формулювати аналітичні твердження та розв'язувати практичні задачі в математиці, фізиці, економіці та інженерії.

Література

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Функції однієї змінної. — К. : Вища школа, 1990. — Ч. 1. — 383 с.
2. Запорожченко О.Є., Шинковська І.Л., Заєць І.П. Застосування похідної: Навч. посібник. — Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. — 53 с.
3. Абрамчук І.В., Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навчальний посібник. — Вінниця: ВНТУ, 2010. — 152 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. — К. : Видавництво А.С.К., 2006. — 648 с.
5. Бронштейн І.Н., Семендяєв К.А. Справочник по математике для инженеров и студентов вузов. — М.: Наука, 1986. — 783 с.

А. Іщенко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

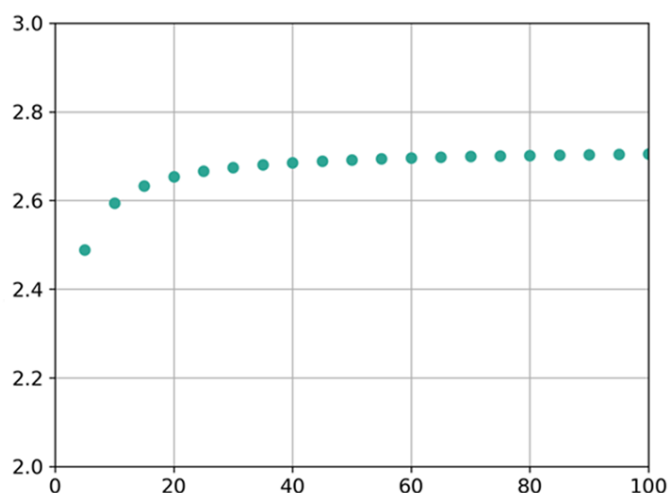
Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЛА ЕЙЛЕРА В РІЗНИХ СФЕРАХ ЖИТТЯ

Математика глибоко проникла в наше життя, і навіть не усвідомлюючи цього, ми щодня використовуємо її закони. Ознайомимось із застосуванням числа Ейлера в банківській справі. Звісно, сфер його використання значно більше, і ми розглянемо найцікавіші з них.

Уявимо, що у вас є зайва 1 грн, і ви, як розумний інвестор, вирішуєте покласти її в банк. Один із банків пропонує привабливі умови – 100% річних, які нараховуються раз на рік. Тобто через рік внесок подвоїться, і буде рівним 2 грн. Існує інший банк, який намагається переманити клієнта, обіцяючи ті ж 100% річних, проте відсотки нараховуватимуться двічі на рік. За півроку внесок зросте до: $1 \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 1,5$ грн., а за рік: $1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$ грн. Приходить на думку: “А що буде відбуватися, коли відсотки нараховуватимуться щомісяця?” У такому разі сума через рік складе: $1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} = 2,61$ грн. Тоді знаходиться банк, який дозволяє збільшувати частоту нарахування відсотків до нескінченності. Здавалося б, чим частіше відсотки нараховуються, тим більше ви отримаєте.

Ще в XVII столітті математик Якоб Бернуллі довів, що при $n \rightarrow \infty$ ця сума прямує до числа $e \approx 2.71828$. Тобто, навіть якщо банк нараховуватиме відсотки нескінченну кількість разів, ваш внесок через рік не перевищить 2,72 грн.



Звісно, 100% річних у жодному банку не знайдете – зазвичай відсотки становлять 8-9% на рік. Проте маркетингологи можуть використати привабливий слоган: “Нескінченна частота нарахування відсотків при 8% річних!” Маркетингологи знають, що від цього банк не розориться, адже навіть за таких умов прибуток клієнта буде обмеженим.

Число Ейлера є фундаментальною константою в математичних моделях росту, оскільки воно описує процес безперервного збільшення. У природі багато процесів (включаючи розмноження популяцій, зростання бактерій) підпорядковуються цьому закону.

Число Ейлера з’являється, коли розглядається процес, у якому щось збільшується пропорційно до своєї поточної величини. Це означає, що чим більше значення величини, тим швидше вона зростає.

Припустимо, що початкове значення дорівнює 1, і ми поділили процес зростання на n кроків протягом одиниці часу. Якщо збільшувати кількість таких поділів до нескінченності, то отримуємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Це математично виражає ідею безперервного зростання, де швидкість зміни деякої величини прямо пропорційна самій величині.

Як відбувається експоненційне зростання популяції бактерій (принцип поділу)? Уявімо, що існує лише одна бактерія. Через певний час (наприклад, кожні 20 хв.) вона ділиться на дві. Тоді кількість бактерій при звичайному дискретному поділі (по етапах) змінюється так:

Час, хв.	Кількість бактерій
0	1
20	2
40	4
60	8
80	16

Це експоненційне зростання з основою 2. А тепер – уяви, що поділ відбувається постійно. Замість “один поділ кожні 20 хвилин», бактерії діляться постійно, у будь-який момент часу. Чим більше бактерій – тим більше їх ділиться за ту ж секунду. Це називається безперервне експоненційне зростання, яке математично описується через число Ейлера – як межа нескінченного зростання, коли щось збільшується завжди, навіть миттєво. На початку одна бактерія. Через секунду – трохи більше. Але тепер їх більше, і всі вони теж діляться. І цей процес постійний, не по годинах, а кожної миті. Так виникає математичний опис на основі числа Ейлера, бо швидкість зростання залежить від поточного стану.

Число Ейлера описує ситуації, де щось зростає або зменшується: постійно, пропорційно до поточної кількості, безперервно. Саме тому воно ідеально

підходить для опису: розмноження бактерій, приросту інвестицій, радіоактивного розпаду, охолодження тіл та багатьох природних процесів.

Література

1. **House of Math.** Що таке число Ейлера e ? [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/algebra/loharyfmy/pro-loharyfmy/shcho-take-chyslo-eylera-e>

Т. Кравченко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МОВА ФРАКТАЛІВ

Світ, у якому ми живемо, надзвичайно складний і нерегулярний. Багато природних систем — від гірських хребтів до внутрішньої будови людського тіла — мають настільки химерну структуру, що описати їх за допомогою традиційної, евклідової геометрії видається безнадійним завданням. Як, наприклад, зобразити крони дерев, розгалуження річок чи форми хмар простими геометричними фігурами? Або як передати в термінах геометрії складність будови легень чи нирок, що нагадують переплетення гілок дерева з безліччю відгалужень? Не менш заплутаною й непередбачуваною може бути і динаміка природних процесів — від поширення вірусів до формування атмосферних фронтів.

На допомогу в цьому приходить мова фракталів. Слово "фрактал" походить від латинського *fractus* — «роздроблений», «поділений». Проте за своєю суттю фрактал — це не просто об'єкт, а ціла концепція. Це структура, яка складається з частин, подібних до цілого. Ці частини повторюються на різних масштабах, демонструючи самоподібність — ключову властивість фрактальної геометрії.

Фрактали вирізняються серед інших математичних об'єктів кількома унікальними характеристиками. Окрім уже згаданої самоподібності, вони мають *дробову розмірність* — величину, яка не є цілим числом, і відображає ступінь «заповнення» простору. Ще однією рисою є нескінченна деталізація: при будь-якому масштабі фрактал зберігає складність своєї структури, відкриваючи нові шари внутрішнього порядку.

Саме з геометричних фракталів починалася історія цього напрямку. Побудова таких структур базується на ітеративному процесі: береться початкова фігура — так звана затравка або аксіома — і до неї багаторазово застосовуються певні правила трансформації. Кожен наступний крок додає нові елементи, ускладнюючи форму. Якщо ці перетворення виконувати нескінченно, виникає геометричний фрактал — ідеалізована модель складності.

Одним із класичних прикладів є трикутник Серпінського. Починаючи з рівностороннього трикутника, з його центру вирізають менший трикутник. Потім така ж операція повторюється для кожного з трьох нових трикутників, і так — до нескінченності. В результаті утворюється структура, де будь-який з фрагментів, при збільшенні, є точною копією цілого. Це — приклад повної самоподібності. Інший фрактал — *килим Серпінського* — є двовимірним аналогом відомої множини Кантора. Квадрат ділиться на дев'ять рівних частин, центральна з яких видаляється.

Те саме повторюється для кожного з восьми решти квадратів, і так безконечно. Таким чином створюється візерунок, що має як естетичну гармонію, так і математичну строгість. Серед геометричних фракталів слід згадати й *криву дракона*, або *дракон Хартера–Гартлі*, яку вперше дослідили у NASA в 1960-х роках. Вона формується шляхом послідовного заміщення відрізків двома новими, що утворюють кут у 90° , при цьому напрямком чергується. У результаті виходить лінія, яка нагадує розгорнуті крила дракона, а її розгалужена форма служить прикладом фрактальної симетрії.

Однак фрактали — це не лише теоретичні конструкції. Вони — справжня мова природи. Древа, хмари, блискавки, сніжинки, берегові лінії — всі ці об'єкти демонструють властивості фрактальної будови. Наприклад, кожна сніжинка має шість осьово-симетричних гілок, на яких менші візерунки відтворюють форму всієї структури. Це самоподібність, зафіксована в кристалі води. До найбільш вражаючих фракталів належить *множина Мандельброта* — один із найвідоміших математичних об'єктів XX століття. Хоча вона ґрунтується на простій формулі з комплексними числами, результат — це химерна структура, межа якої демонструє нескінченну кількість шарів та самоподібних форм. Множина Мандельброта була вперше візуалізована Бенуа Мандельбротом у 1980 році за допомогою комп'ютера. При збільшенні зображення її меж з'являються дедалі нові, схожі на попередні елементи — але з легкими варіаціями. Це ідеальний приклад того, як з простоти народжується складність.

Історія фракталів, однак, не починається з XX століття. Свідчення розуміння принципів самоподібності зустрічаються ще у стародавніх культурах. У зразках трипільської кераміки, в обрисах поселень, у ритмічних структурах готичних соборів — ми знаходимо відлуння фрактальної геометрії. У Стародавньому Єгипті архітектор Імхотеп створив першу ступінчасту піраміду — споруду, що за своєю суттю є фракталом. А в середньовічній Європі сакральна архітектура, зокрема ордену тамплієрів, розвивала ідеї геометрії, близькі до фрактального мислення. Систематичне вивчення фракталів почалося наприкінці XIX століття з робіт таких математиків, як П'єр Фату, Жюль Анрі Пуанкаре, Георг Кантор, Фелікс Гаусдорф, Гастон Жюліа. Вони заклали теоретичний фундамент для подальших досліджень. У 1977 році Мандельброт почав використовувати комп'ютер для візуалізації фракталів, зокрема для дослідження множин Жюліа. А вже у 1980 році комп'ютер уперше надрукував знамениту «пляму» — образ множини Мандельброта, який став іконою фрактальної геометрії. Сьогодні фрактали активно застосовуються в науці й техніці. У комп'ютерній графіці їх використовують для створення реалістичних ландшафтів, текстур і спецефектів. У моделюванні — для опису складних природних процесів. У телекомунікаціях — для побудови ефективних антен. У медицині — для аналізу біологічних структур і виявлення патологій. І навіть у штучному інтелекті — для оптимізації алгоритмів, обробки зображень і генерації нових даних.

Фрактали — це не просто математичні конструкції, а універсальний інструмент для розуміння складності світу. Вони вчать нас бачити закономірності там, де на перший погляд панує хаос. І в цьому — їхня справжня краса та сила.

Н.М. Гулковський

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник: **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інженерної механіки*

ВПЛИВ МАТЕМАТИКИ НА РОЗВИТОК КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Математика є основою для розвитку комп'ютерних технологій. Саме вона дає можливість створювати програми, аналізувати дані, будувати алгоритми та розробляти нові технологічні рішення.

Ще з часів давніх цивілізацій люди використовували математичні обчислення для різних потреб. Однак справжній прорив відбувся у XX столітті, коли з'явилися перші обчислювальні машини. Винахід бінарної системи числення, яку використав Готфрід Вільгельм Лейбніц, став основою для всіх сучасних комп'ютерів. Саме завдяки цій системі комп'ютери можуть обробляти інформацію у вигляді нулів і одиниць. Згодом, у середині XX століття, математик Алан Тюрінг створив модель універсальної машини Тюрінга, яка стала основою для сучасного програмування та обчислювальних процесів.

Одним із найважливіших розділів математики для комп'ютерних наук є алгебра. Вона дозволяє працювати з логікою, рівняннями, змінними та функціями. Завдяки цьому розробники можуть створювати складні програмні коди та алгоритми. Наприклад, у криптографії використовуються математичні рівняння для захисту даних, а в комп'ютерній графіці — обчислення координат для побудови зображень. У програмуванні широко використовують булеву алгебру, яка допомагає в обчисленнях логічних операцій. Наприклад, у комп'ютерних іграх штучний інтелект персонажів будується на базі логічних умов, що дозволяє їм ухвалювати рішення залежно від ситуації в грі.

Не менш важливою є теорія чисел. Вона застосовується для шифрування інформації, що є основою кібербезпеки. Наприклад, метод RSA базується на складності розкладання великих чисел на прості множники. Це гарантує захист особистих даних в Інтернеті. Крім того, числові алгоритми використовуються в базах даних, що дозволяє швидко та ефективно знаходити, зберігати й обробляти інформацію. Такі технології застосовуються у банківській сфері, електронній комерції та навіть у військових системах зв'язку.

Статистика та теорія ймовірностей відіграють значну роль у машинному навчанні та штучному інтелекті. Без них неможливо навчати нейромережі, аналізувати великі обсяги даних та прогнозувати події. Такі методи використовуються, наприклад, у розпізнаванні облич, голосових помічниках та рекомендаційних системах. Наприклад, такі сервіси, як YouTube або Netflix, використовують статистичні методи для аналізу вподобань користувачів та

пропонують персоналізований контент. Крім того, в медицині штучний інтелект може аналізувати знімки МРТ і допомагати лікарям ставити точніші діагнози.

Математичні моделі та диференціальні рівняння допомагають створювати точні симуляції фізичних явищ. Це важливо для розробки відеоігор, анімацій, а також наукових досліджень. Завдяки цим методам можна, наприклад, змодельовати погодні умови або поведінку рідин у фізичних симуляціях. Наприклад, у комп'ютерній анімації для створення реалістичних спецефектів, таких як дим чи вода, застосовуються складні математичні моделі. В авіації та космічних дослідженнях математичні моделі допомагають розраховувати траєкторії польотів космічних апаратів і прогнозувати зміну погодних умов для безпечного зльоту та посадки літаків.

Лінійна алгебра широко застосовується у комп'ютерній графіці, тривимірному моделюванні та обробці зображень. Без неї неможливо було б створювати реалістичні анімації та візуальні ефекти у фільмах та відеоіграх. В ігрових рушіях, таких як Unreal Engine чи Unity, використовуються обчислення матриць для обробки тривимірних об'єктів. Наприклад, у фільмах із використанням комп'ютерної графіки, таких як «Аватар» чи «Месники», застосовуються складні математичні алгоритми для відтворення реалістичних рухів персонажів та ефектів освітлення.

Ще одним важливим аспектом є чисельні методи, які допомагають вирішувати складні математичні завдання за допомогою комп'ютерів. Наприклад, вони використовуються в обробці великих обсягів даних у банківській сфері, медицині, фінансах і навіть у прогнозуванні кліматичних змін. Сучасні суперкомп'ютери виконують трильйони операцій на секунду, аналізуючи метеорологічні дані, що дозволяє робити більш точні прогнози погоди та попереджати про можливі природні катастрофи.

Математика є основою сучасних комп'ютерних технологій. Вона дозволяє розробляти нові алгоритми, підвищувати безпеку даних, створювати реалістичні графічні моделі та розвивати штучний інтелект. Без математичних знань розвиток технологій був би неможливим. Завдяки розвитку математики людство отримало потужні комп'ютери, які змінили наше життя та продовжують рухати прогрес вперед. З кожним роком вплив математики на інформаційні технології лише зростає, що відкриває нові можливості для науки, бізнесу та повсякденного життя.

С.Є. Мєзєнцев

Львівський університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник: **О.О. Карабин** кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ПОКАЗНИКОВІ ФУНКЦІЇ

Часто ми чуємо про застосування фізики та математики у реальному житті та близько підходимо до тем страшних та жахливих похідних та інтегралів функцій. Придумано багато міфів про інтегрально-диференціальне числення, у яких воно незрозуміле і непотрібне. Відомо як фахівці давнини вирішували практичні завдання іншими способами без інтегрального і диференціального числення.

Як відомо, вивчення математики традиційно будується за наступною схемою. Спочатку розповідають про те, що таке функція, потім перераховують безліч її видів, потім навіщось змушують малювати графіки кожної з них, далі – не використовуючи графіки (навіщо ми їх будували?), передбачати їхню поведінку: де вони ростуть і де падають, де досягають мінімумів, а де максимумів. Далі – більше: запевняють, що дуже важливо знати, як вони поведуться не тільки взагалі, а ще й на своїх кордонах і далі змушують їх диференціювати, а потім інтегрувати.

Зазвичай питання тут виникають вже на етапі знайомства з функціями різних видів. Найчастіше в учнів складається переконання, що математики винаходять їх для розваги і з садистського бажання довше мучити усіма ними .

Розглянемо всі типові функції, які змушують спочатку «дослідити», а потім диференціювати і інтегрувати. Розглянемо, які реальні явища можна без істотної втрати точності описати цими рівняннями, щоб переконалися, що їх винайшли не просто так, тому знати їхню поведінку справді корисно. Покажемо практичну необхідність дослідження їх меж і результатів, яких можна досягти за допомогою їх диференціювання та інтегрування.

Скрізь, де є числа, пов'язані між собою, зміна одних викликає зміну інших, це і є функції. Площа квадрата – функція довжини його сторони; шлях, який пройшло тіло під час вільного падіння – функція часу; сила (швидкість) струму – функція напруги струму та опору ланцюга тощо. Найчастіше та чи інша функціональна залежність виражається тим чи іншим конкретним рівнянням.

Для вірного і при цьому максимально простого опису та прогнозування багатьох практичних завдань досить лінійної та квадратичної функцій. Наприклад, швидкість при прискореному русі описується лінійним виразом

$$V = a \cdot t,$$

а пройдений шлях прогнозують за допомогою «квадратного» рівняння

$$S = a \cdot t^2 / 2.$$

Однак природа не дає нам нудьгувати, тому вигадала чимало явищ, для точного опису яких потрібні функції інших видів. Деякі з них зустрічаються досить часто і знадобилися нам ще в давнину – це показникові та тригонометричні функції.

Якщо ви бували в порту або дивилися фільми про мореплавців, то могли помітити, що коли судно підходить до берега, то з нього кидають на пристань канат. Там його приймають буквально одну-дві людини, які кілька разів обмотують канат навколо невеликих спеціальних стовпчиків – кнехтів і таким чином легко утримують – швартують ними корабель. Трос крекче, але як би він не був натягнутий, кораблі масою сотню і навіть тисячу тон не можуть стягнути його з кнехта. Як же вдається одній людині утримати величезний корабель і де тут математика, якщо це питання явно за фізики. Виявляється, йому допомагає сила тертя між канатом та кнехтом. Якщо обмотати канат навколо стовпчика-кнехта один раз, то через тертя каната до стовпа можна утримати силою F_0 силу, більшу, ніж F_0 в «а» разів кілограм. При цьому кожен новий оборот каната навколо стовпа збільшує відношення сил ще раз. Таким чином, якщо обернути канат двічі, то відношення утримуваної та утримуючої сил буде дорівнює a^2 , а якщо три рази, то a^3 .

Якщо ми позначимо число обертів як «х» (причому йому необов'язково бути цілим), то $F_0/F = a^x$ математики і назвали показниковою функцією.

Показникова функція - це функція зі сталою основою степеня, але змінним показником степеня.

Виконаємо пару обчислень, щоб продемонструвати, наскільки стрімко зростають функції цього виду. Якщо обмотати прядив'яний канат навколо залізного стовпа 2 рази, то силою в 100 кг можна «прикріпити» корабель в 1.2 тони, якщо 3 – вже 4.2 тонни, а якщо всього 10 разів, то масою в 270 тисяч тон.

Зауважимо, що таким елегантним способом утримання різноманітних вантажів користуються не лише моряки та професійні вантажники, а й кожен із нас. Наприклад, всі ми застосовуємо цей прийом при зав'язуванні шнурків: навіть маленькі діти знають, що зав'язані один раз легко розв'язуються, а двічі – вже ні.

Накреслимо графік $y = a^x$ за різних значень основи «а». Чим більше основа, тим крутіше піднімаються вгору графіки, хоча всі вони перетинаються з вертикальною віссю «у» в точці $x = 0, y = 1$. Наприклад, кут між нею і прямою $y = 2x$ дорівнює приблизно 55 градусам, а прямою $y = 3x$ становить 42 градуси.

Очевидно, що знайдеться така основа, за якої цей кут дорівнюватиме рівно 45 градусам і ті, хто любить все красиве в математиці, назвали його «е», а такий особливий вид показникової функції – експоненційним.

Оскільки досить великі кораблі та порти для існують ще з часів стародавнього Єгипту, може здатися, що показникові функції супроводжують людей всю їхню історію з моменту появи перших великих міських цивілізацій. Однак, це не зовсім так.

Хоча багато базових законів про степені були відкриті ще в Стародавній Греції, на той час вони не застосовувалися для вирішення практичних завдань, а використовувалися лише для філософських міркувань. Наприклад, у 3 столітті до нашої ери великий Піфагор вивів закон про складання степенів: $10^a \cdot 10^b = 10^{(a+b)}$, але вжив його для оцінки кількості піщинок у всьому світі.

Серед іншого заважали цьому незручні для швидких арифметичних перетворень та обчислень римські числа. Так, сучаснику великого винахідника логарифмів Непера швейцарському астроному Бюргі Йосту доводилося зображати 4^{III} , щоб написати 4^4 .

Також цікаво, що саме поняття «ступінь» з'явилося лише у 1544 році, його вигадав німецький математик та активний діяч Реформації Михайло Штіфель.

Що ж до сучасного способу запису степеневих функцій, то його, як і більшість інших звичних нам тепер математичних позначень, придумав великий французький дослідник природи і філософ Рене Декарт, який писав у вступі до своєї знаменитої книги «Геометрія»: «я позначаю або ж a^2 для помноженого на себе; і a^3 для його помноженого на себе ще раз, і так до нескінченності».

Показникова функція у загальному вигляді була запроваджена великим німецьким економістом і дипломатом Готфрідом Лейбніцем у 1695 році, як вираз « u^v ».

Лисак М. А.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

КОРІНЬ З МІНУС ОДИНИЦІ

Колись у математиці виникла на перший погляд абсурдна ідея: взяти корінь з мінус одного. У традиційній арифметиці подібне виглядало неможливим. Адже як би ми не множили жодне дійсне число саме на себе, воно ніколи не дасть від'ємного результату. Проте саме в цьому парадоксі — у спробі переступити межу очевидного — народилась нова математична сутність. Математики просто уявили: а що, як існує таке число, яке при піднесенні до квадрата дає -1 ? Так з'явилася уявна одиниця, яку позначили літерою i , і з цього почалася ціла нова гілка чисел — *комплексні числа*.

Спершу це здавалося вигадкою без практичного сенсу, математичним курйозом. Але згодом виявилось, що за цією уявною конструкцією ховається глибока істина — і нова мова, здатна описати світ у його найтонших проявах. Перші згадки про уявні числа з'явилися ще у XVI столітті. Італійські математики, зокрема Джероламо Кардано, стикнулися з ними під час розв'язання кубічних рівнянь. Тоді вони ще не усвідомлювали, що відкривають новий тип чисел — просто сприймали це як необхідний проміжний крок, який у підсумку зникає. Та все змінилося в XVIII–XIX століттях, коли над цією темою почали працювати Леонард Ейлер, Карл Фрідріх Гаусс та інші видатні математики. Вони не лише прийняли існування уявних чисел, а й об'єднали їх із дійсними, утворивши *комплексні числа*.

І тут почалося найцікавіше. З'ясувалося, що комплексні числа — це не просто красива ідея. Вони виявилися необхідними для розв'язання багатьох задач, які не піддавались звичним методам. У фізиці — особливо в електротехніці — ці числа стали основою аналізу змінного струму. Синусоїдальні коливання, фази, амплітуди — все це природно й наочно описується саме за допомогою комплексної арифметики.

У квантовій механіці хвильова функція, яка містить повну інформацію про стан частинки, є за своєю суттю комплексною. Без цієї уявної складової ми не могли б описувати явища на мікроскопічному рівні. Навіть у механіці, аеродинаміці, теорії коливань, обробці сигналів та зображень — всюди використовуються комплексні методи. А деякі алгоритми штучного інтелекту й сучасного машинного навчання теж покладаються на перетворення, що мають фрактальну й комплексну природу.

Особливо наочно суть комплексних чисел виявляється на так званій *комплексній площині*, де горизонтальна вісь відповідає реальній частині, а вертикальна — уявній. Ця площина не лише дає змогу зручно зображати

комплексні числа — вона відкриває абсолютно новий спосіб бачити математичну реальність. Через обертання точок, зміну їх модулів і фаз ми отримуємо гнучкий інструмент для вивчення хвиль, коливань, резонансів. І навіть художню красу — наприклад, у фрактальній множині *Мандельброта*, де кожна точка — це результат нескінченної ітерації простого рівняння на площині комплексних чисел. Із цих нескінченних обчислень виникає витончена й безмежно складна форма, яка вражає і математиків, і художників.

Здавалося б, корінь з -1 — це щось, чого не існує. Але саме він дав початок новій числовій системі, яка виявилася надзвичайно корисною, навіть необхідною для опису реального світу. Уявна одиниця стала тим самим містком, що з'єднує абстрактну математику з практичною наукою. І хоча її досі називають «уявною», її вплив на наш спосіб розуміти Всесвіт — абсолютно реальний.

М. Русин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, доцент, доцент кафедри прикладної математики та механіки, к.ф.-м.н.*

МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ ТА КІБЕРБЕЗПЕЦІ

У наш час, коли цифрові технології стали невіддільною частиною повсякденного життя, а обсяги переданої, обробленої й збереженої інформації невинно зростають, питання її захисту набуває критично важливого значення. У цьому контексті особливу роль відіграє криптографія — наука, що вивчає способи перетворення даних у форму, недоступну для сторонніх. Саме вона формує основу сучасної кібербезпеки, забезпечуючи конфіденційність, цілісність і достовірність цифрових повідомлень навіть у відкритому інформаційному середовищі.

Суть криптографії полягає в математичному шифруванні інформації з метою унеможливити її прочитання без спеціального ключа. Вона гарантує, що лише уповноважені особи матимуть доступ до вмісту повідомлення, що дані не зазнали змін у процесі передавання, і що їхнє походження є справжнім. Усі ці принципи — конфіденційність, цілісність і автентичність — складають три основні опори криптографічного захисту.

Сучасна криптографія ґрунтується на точних математичних моделях і теоріях. Для створення алгоритмів, стійких до зламу, широко застосовуються результати з теорії чисел, модульної арифметики, алгебри, теорії ймовірностей і комбінаторики. Зокрема, прості числа відіграють ключову роль у багатьох шифрувальних методах, як-от у знаменитому алгоритмі RSA. Його надійність базується на складності факторизації великих чисел — завдання, яке досі не має ефективного розв'язання і потребує колосальних обчислювальних ресурсів.

Криптографічні алгоритми поділяють на кілька основних класів. Симетричні системи, такі як AES і DES, використовують один і той самий ключ для шифрування й розшифрування. Вони надзвичайно швидкі, однак вимагають безпечного обміну ключами між сторонами. Асиметричні алгоритми — наприклад RSA чи ECC — передбачають наявність пари ключів: відкритого (для шифрування) і закритого (для розшифрування), що істотно полегшує комунікацію в незахищених мережах. Ще одним важливим інструментом є геш-функції — односторонні математичні перетворення, які створюють унікальний цифровий «відбиток» вхідних даних. Їх активно використовують для перевірки цілісності файлів, зберігання паролів і створення електронних підписів.

Особливої уваги заслуговують криптосистеми на основі еліптичних кривих. Вони забезпечують той самий рівень захисту, що й класичні алгоритми, проте з використанням значно коротших ключів, що дає змогу ефективно застосовувати їх у мобільних і вбудованих пристроях. Швидкість обчислень, економія пам'яті й

енергії роблять цей підхід одним із найперспективніших у криптографії нового покоління.

Ще однією математично складною задачею, яка лежить в основі криптографічних протоколів, є задача дискретного логарифмування. Саме вона забезпечує стійкість таких алгоритмів, як протокол обміну ключами Діффі-Гелмана та криптосистема Ель-Гамала. Їх безпека тримається на практичній неможливості відновити логарифм у скінченному полі.

Геш-функції, у свою чергу, відіграють роль цифрових ідентифікаторів. Їхня властивість миттєво змінювати результат при незначній зміні вхідних даних і неможливість відновити початкову інформацію з гешу роблять їх незамінними в багатьох галузях — від зберігання паролів до блокчейн-технологій.

Усе це доводить: у самому серці сучасної кібербезпеки лежить математика. Вона визначає рівень стійкості криптосистем, формує механізми аутентифікації й гарантує безпечний обмін даними. Чим глибше математичне підґрунтя криптографічних алгоритмів, тим надійніше вони захищають наш цифровий світ.

М. Кизима

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТРИЦІ: ІСТОРІЯ, МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матриця: від старокитайських трактатів до штучного інтелекту

Уявіть собі таблицю чисел, що здатна описати рух планет, трансформувати обличчя на фотографіях, керувати алгоритмами пошуку чи віртуальними світами. Ця таблиця має ім'я — **матриця**. Вона стала незамінним інструментом у сучасній науці, техніці та цифрових технологіях. Але за її зовнішньою простотою приховується глибина, яка об'єднує абстрактну математику й прикладні рішення.

Витоки: як усе починалося

Історія матриць бере початок у глибинах часу. Ще у давньокитайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» (І ст. до н.е.) описано метод розв'язання систем лінійних рівнянь — той самий, що нині відомий під іменем Гаусса. Але справжнє формування теорії відбулося у XVIII–XIX століттях. Карл Фрідріх Гаусс заклав підвалини практичного використання матриць, а Джеймс Сильвестр і Артур Келі у 1850-х роках перетворили їх на самостійну галузь алгебри, запровадивши операції множення та обчислення визначника.

Що таке матриця?

У найзагальнішому вигляді матриця — це впорядкована прямокутна таблиця чисел або символів. Вона позначається великою літерою (A, B, C...) і має розмірність $m \times n$, де m — кількість рядків, а n — кількість стовпців. Такий формат дозволяє зручно зберігати великі обсяги даних і ефективно працювати з ними, особливо у задачах, де змінні взаємопов'язані.

Математичні операції: основа динаміки

Матриці піддаються низці математичних дій: додаванню, множенню, транспонуванню, обчисленню оберненої матриці чи визначника. Це не просто формальні маніпуляції — вони лежать в основі складних обчислень: від симуляцій фізичних процесів до тренування нейронних мереж. Тільки за допомогою таких операцій можливо розв'язати лінійні системи, змоделювати взаємодії або трансформувати зображення у цифровій формі.

Де працює матриця?

Відповідь коротка: всюди. *Математика й статистика* — аналіз багатовимірних даних, регресії, оптимізаційні задачі. *Фізика* — квантова механіка, тензорні поля, динаміка систем. *Інформатика* — графіка, машинне бачення, стиснення даних. *Штучний інтелект* — уся архітектура глибокого навчання ґрунтується на тензорах, які є узагальненням матриць. *Економіка й фінанси* — моделювання потоків, аналіз ризиків, лінійне програмування. *Інженерія* —

розрахунок навантажень, моделювання вібрацій, будівельні конструкції. 3D-технології — усі перетворення об'єктів у віртуальному просторі виконуються за допомогою матриць.

Цифровий світ, побудований на матрицях

Щодня, користуючись смартфоном чи картами Google, ми взаємодіємо з наслідками роботи матриць. Алгоритми розпізнавання облич, обчислення найкоротших маршрутів, фільтри обробки зображень, томографія у медицині, симуляція фізичних систем або навіть прогнозування погоди — за всіма цими процесами стоять матричні обчислення.

Факти, що вражають

Слово «матриця» походить від латинського *matrix*, що означає «матір» або «джерело». І справді — матриці породжують нові знання, моделі, способи взаємодії з реальністю. Вони стали основою лінійної алгебри — дисципліни, без якої неможливо уявити жодну сучасну технічну спеціальність. А поняття тензора, що розширює поняття матриці, сьогодні є центральним у теоретичній фізиці й машинному навчанні. Матриця — це більше, ніж математичний об'єкт. Це універсальна мова сучасної науки й технологій. Вона зв'язує абстрактну теорію з практикою, минуле з майбутнім, людське мислення з машинним. Розуміння матриць відкриває шлях до глибшого осягнення світу, в якому ми живемо, і дає інструмент для його вдосконалення.

А. Телюк

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.О. Карабин**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: КОЛИ РІВНЯННЯ ОПИСУЮТЬ РЕАЛЬНІСТЬ

У світі, де швидкість змін перевищує можливості простого спостереження, математичне моделювання стало для науки тим, чим для навігатора — карта. Це інструмент, що дозволяє не просто описати складні явища, а й заглянути в їхнє майбутнє, оцінити ризики, протестувати ідеї без втручання в саму систему. Сьогодні моделювання супроводжує нас майже в кожній сфері життя: від контролю поширення епідемій до управління транспортом і прийняття фінансових рішень.

Що ж таке математична модель? Це абстрактне відображення реального об'єкта або процесу, побудоване за допомогою математичних понять і структур. По суті, ми «перекладаємо» світ на мову символів, функцій, зв'язків, щоб краще його зрозуміти. Процес створення моделі нагадує інженерний проєкт. Спершу потрібно визначити, що саме ми хочемо дослідити, які змінні є ключовими, а які — другорядними. Потім відбувається формалізація — перетворення опису системи на математичну конструкцію. Далі — аналіз поведінки моделі, її перевірка на адекватність і, за потреби, удосконалення. І, звісно, найважливіше — інтерпретація результатів: ми знову «перекладаємо» математичні висновки назад у реальний контекст.

Моделі бувають різними. Іноді вони описують процеси, де все чітко визначено й передбачувано — так звані детерміновані моделі. А іноді — навпаки, передбачають вплив випадкових факторів — це вже стохастичні підходи. Одні моделі описують явища, що змінюються в часі, інші — лише стан у певний момент. Є моделі, що працюють на мікрорівні, відстежуючи поведінку окремих частинок чи людей, а є такі, що охоплюють великі системи, як-от міста чи екосистеми.

Уявіть собі місто, в якому розлився токсичний елемент. Як спрогнозувати, куди й коли він пошириться? Математична модель допоможе це передбачити — й врятувати життя. Те саме стосується аналізу забруднення води, повітря, ґрунтів.

У медицині моделі відіграють критичну роль у боротьбі з хворобами. Вони дозволяють оцінити, наскільки швидко поширюється інфекція, які заходи є ефективними, і як зміниться ситуація після вакцинації. Завдяки таким інструментам системи охорони здоров'я можуть діяти на випередження.

В економіці моделі допомагають ухвалювати рішення, коли ресурси обмежені, а варіантів дій — безліч. Як розподілити бюджети, оптимізувати логістику, спрогнозувати прибутки? Відповіді дають саме математичні структури.

У техніці — від моделювання поведінки матеріалів під час навантажень до проєктування систем охолодження — рівняння стають аналогом лабораторного експерименту, тільки набагато швидшим і безпечнішим.

Сучасне моделювання неможливе без комп'ютерів. Програмні системи, такі як MATLAB, Maple, Python або спеціалізовані імітаційні платформи, дозволяють обробляти мільйони змінних, створювати віртуальні копії міст, організмів, ринків. Завдяки їм навіть складні моделі стають доступними для дослідників, інженерів, економістів і лікарів.

Математичне моделювання — це не магія, а набір чітких правил. Однак воно не позбавлене труднощів. Справжній світ складніший за будь-яку формулу: не всі параметри нам відомі, іноді навіть неочікувана дрібниця може кардинально змінити результат. Деякі системи — як-от клімат чи поведінка фондового ринку — надто чутливі до змін початкових умов. Проте сучасні тренди обіцяють прорив: поєднання моделювання з машинним навчанням дозволяє створювати адаптивні моделі, здатні навчатися на нових даних.

Математичне моделювання — це мистецтво бачити суть у числах. Воно перетворює світ на систему, яку можна вивчати, передбачати й удосконалювати. В епоху даних і складних викликів ця здатність є не просто корисною — вона критично необхідна. Адже вміння моделювати — це вміння мислити глибоко, логічно й масштабно. Саме так ми будемо мости від абстрактної теорії до конкретних дій.

Д. Вітик

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

КРИПТОГРАФІЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ БЕЗПЕКИ СИСТЕМ БЕЗКЛЮЧОВОГО ДОСТУПУ В СУЧАСНИХ АВТОМОБІЛЯХ

Сучасні автомобілі вже давно перестали бути лише засобом пересування — вони перетворилися на високотехнологічні цифрові пристрої на колесах. Однією з найзручніших, але водночас уразливих функцій є система безключового доступу (англ. *Keyless Entry System*), яка дозволяє власнику відчиняти двері й запускати двигун без фізичного використання ключа. Але як автомобіль "розпізнає" свого господаря? І які математичні й логічні механізми гарантують, що до автомобіля не проникне сторонній? В основі роботи цих систем лежать криптографія, теорія ймовірностей, логічне програмування та електронна ідентифікація. Саме ці інструменти дозволяють досягти балансу між зручністю користування й інформаційною безпекою.

Принцип роботи безключового доступу.

Стандартна система працює так: коли автовласник підходить до машини, автомобіль автоматично "виявляє" присутність ключа (який, насправді, є радіопередавачем) у межах певного радіуса. Відбувається обмін радіосигналами, під час якого відбувається автентифікація. Машина надсилає запит, а ключ-брелок відповідає цифровим підписом, який базується на певному алгоритмі шифрування. Якщо відповідь є коректною — доступ дозволяється. Цей процес триває лічені мілісекунди, однак усередині нього — складна математична логіка.

Криптографія на службі безпеки

Основна мета криптографії в безключовому доступі — забезпечення автентичності та запобігання підробці сигналу. Сучасні системи використовують:

1. Симетричне шифрування

У багатьох автомобілях застосовуються алгоритми типу AES (Advanced Encryption Standard). І ключ, і транспортний засіб мають спільний секрет — ключ шифрування. Повідомлення шифрується в ключі, передається через радіоканал і розшифровується на іншому боці.

2. Одноразові коди (rolling codes)

Щоб уникнути атак типу *replay attack* (коли зловмисник перехоплює справжній сигнал і повторно його використовує), використовується генерація динамічного одноразового коду, який змінюється кожного разу. Автомобіль і ключ мають синхронізовані генератори випадкових чисел або лічильники, які створюють новий код при кожній взаємодії.

3. Хеш-функції та MAC (message authentication code)

Для перевірки цілісності переданого повідомлення використовується хешування. Хеш-функції забезпечують "цифровий відбиток" повідомлення, який змінюється навіть при найменшій зміні вхідних даних. У системах доступу часто використовують НМАС — поєднання хеш-функції з таємним ключем.

Загрози та методи атак.

Незважаючи на складну криптографію, практичні реалізації систем безключового доступу мають певні слабкі місця.

1. Relay attack (атака-ретрансляція)

Це один із найпоширеніших способів зламу: два пристрої перехоплюють сигнал між автомобілем і ключем, "передаючи" його в реальному часі. Таким чином машина думає, що ключ поруч, і відчиняє двері. Жодного зламу криптографії при цьому не відбувається — зловмисники просто продовжують дію сигналу на відстані.

2. Code grabbing і replay attacks

У старіших системах з фіксованим кодом можна просто "зловити" сигнал і згодом його відтворити. Саме тому сучасні автомобілі переходять на псевдовипадкові коди з одноразовим використанням.

3. Аналіз енергоспоживання (side-channel attacks)

Деякі види атак базуються на вимірюванні електричних характеристик (напруги, струму, часу обробки), що дозволяє зробити припущення про використовуваний ключ або алгоритм.

Логічна безпека та протоколи автентифікації

Крім криптографії, важливу роль відіграє логічна архітектура протоколів.

1. Челендж-відповідь (*challenge-response*) — автомобіль надсилає випадковий запит, а ключ повинен сформулювати правильну відповідь, використовуючи секретний алгоритм.

2. Таймінг і послідовність — обмін повідомленнями має суворо дотримуватись часових меж; надто швидкі або затримані відповіді можуть свідчити про атаку.

3. Детекція колізій — система вміє розпізнавати одночасні спроби автентифікації або стороннє втручання у сигнал.

Підхід "безпека через дизайн"

Сучасна тенденція в автомобільній безпеці — вбудовування криптографічного захисту на рівні проектування (*design-level*). Це включає:

- Інтеграцію апаратних модулів безпеки (Secure Elements), які забезпечують зберігання ключів та шифрування прямо в мікросхемі;
- Оновлення прошивки по повітрю (OTA) — щоб ліквідувати вразливості, виявлені після продажу автомобіля;
- Анонімізацію ідентифікаторів — щоб неможливо було відстежити автомобіль за радіосигналом.

Біометрія та мультифакторна автентифікація - майбутнє безключового доступу.

У новітніх моделях уже тестуються системи, які доповнюють або замінюють ключ-брелок біометричними факторами — розпізнаванням обличчя, відбитків пальців або навіть голосу, крім того, з'являються смартфонні ключі, які використовують криптографію Bluetooth, NFC та захищених чіпів (Secure Enclave / Trusted Execution Environment), щоб унеможливити перехоплення даних.

Системи безключового доступу — приклад того, як складна математика служить повсякденній зручності. Але разом зі зростанням комфорту зростають і ризики. Безпека таких систем залежить не лише від міцності шифру, а й від грамотної логіки протоколів, апаратної реалізації, фізичного захисту та розумного дизайну. У майбутньому ми спостерігатимемо злиття класичної криптографії з біометрією, штучним інтелектом і квантовими методами, але вже сьогодні автомобіль — це не просто механізм, а розумна система, що потребує такої ж розумної безпеки.

СЕКЦІЯ 4. Математика і сучасність

М.О. Назаров

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Науковий керівник: Н.М. Гузик, кандидат фізико математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Військова справа – це сфера, де точність, ефективність та швидкість прийняття рішень мають вирішальне значення для досягнення успіху в бойових умовах. Сучасна армія активно використовує досягнення вищої математики для вирішення широкого спектру завдань. Одним із основних інструментів для забезпечення високої ефективності є застосування математичних функцій. Вони використовуються для розв'язання численних задач, таких як розрахунок траєкторій, оптимізація ресурсів, забезпечення безпеки інформації, планування військових операцій та багатьох інших аспектів. У цій роботі розглянемо основні напрямки застосування функцій у військовій справі та їх роль у підвищенні боєздатності армії.

Один з найбільш важливих аспектів військових операцій – це точність вогню артилерії та ракетних систем. Для того щоб точно вражати ціль, необхідно розрахувати траєкторію руху снарядів і ракет, враховуючи детерміновані (форма і маса снаряду, густина і температура повітря, атмосферний тиск), недетерміновані (дульна швидкості, величина і напрям швидкості вітру) та інших фактори. Вирішальний вплив на динаміку руху снаряду відіграє лобовий опір повітря, величина якого пропорціональна його швидкості в певній степені, не обов'язково другій, та залежить від того чи швидкість руху снаряду є надзвуковою, підзвуковою чи дозвуковою. Це означає, що для побудови математичної моделі руху снаряду використовують степеневі, зокрема квадратичні, функції. Це дозволяє визначити точний час і місце приземлення снаряда, що дає змогу коригувати вогонь у реальному часі. Управління артилерійським вогнем є критичним для ефективності бойових дій. Сучасні системи управління вогнем використовують математичні функції для точного наведення снарядів і ракет на ціль. Це дозволяє зменшити кількість непотрібних пострілів та підвищити точність ударів. Математичні моделі для визначення часу досягнення цілі і коригування вогню є основою для сучасних систем автоматизованого управління вогнем.

У сучасних військових операціях важливою складовою є захист інформації. Зокрема, для забезпечення конфіденційності військових комунікацій використовуються криптографічні функції. Вони дозволяють шифрувати повідомлення, забезпечуючи їхню захищеність від несанкціонованого доступу.

Завдяки математичним функціям військові можуть бути впевнені в безпеці своїх комунікацій і точно передавати важливі дані, не боячись їхнього перехоплення.

У військовій справі важливим аспектом є раціональне використання обмежених ресурсів, таких як техніка, боєприпаси, транспортні засоби та особовий склад. Застосування математичних функцій для оптимізації логістичних процесів дозволяє значно підвищити ефективність виконання завдань. Математичні моделі, засновані на лінійних та нелінійних функціях, дозволяють вирішувати задачі з мінімізації витрат, ефективного розподілу ресурсів та організації постачання. Наприклад, функція для мінімізації витрат на транспортування ресурсів може мати вигляд

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} ,$$

де c_{ij} – витрати на транспортування від пункту i до пункту j , x_{ij} – кількість ресурсу, що транспортується. Завдяки таким розрахункам військові можуть максимально ефективно використовувати свої ресурси, знижуючи витрати і зберігаючи готовність до будь-яких ситуацій.

Військові також активно застосовують функції для аналізу бойових втрат, прогнозування результатів операцій і навіть для визначення оптимального часу для проведення атак. Математичні моделі, що включають ймовірнісні функції, дозволяють передбачити різні варіанти розвитку подій на полі бою. Наприклад, для оцінки ймовірності того, що певна одиниця буде поранена або знищена, використовуються функції, які залежатимуть від відстані до вибуху або від типу застосовуваної зброї. Один з прикладів такої функції

$$P = 1 - e^{-\lambda x} ,$$

де P – ймовірність поранення, λ – коефіцієнт небезпеки (залежить від виду зброї та відстані до джерела небезпеки), x – відстань до джерела небезпеки (до вибуху чи пострілу).

Для визначення ймовірності P того, що ворожі сили зможуть виявити або засікти наявні позиції підрозділів використовується функція $P = P(d, R, C)$, що залежить від дистанції d до ворожих радарів чи засобів спостереження, рівня маскування R та характеристики техніки C , що рухається. Дослідження таких функцій є важливим для планування рухів підрозділів, їхнього прихованого переміщення або для визначення кращих умов для нападу.

Зрозуміло, що можна навести ще безліч прикладів функцій, дослідження яких є актуальними для військових: функція для розрахунку витрат пального, функція визначення віддалі між підрозділами, функція для оцінки навантаження на військову техніку, функція визначення оптимального часу для початку атак, функція для розрахунку ефективності засобів ППО тощо. Це дозволяє стверджувати, що математичні функції стали важливим інструментом для вирішення найрізноманітніших завдань у військовій справі. Вони застосовуються

від балістики до криптографії, від оптимізації логістики до аналізу бойових втрат. Завдяки використанню функцій військові здатні проводити точні розрахунки, приймати обґрунтовані рішення і забезпечувати ефективність своїх операцій. Враховуючи постійний розвиток технологій і появу нових методів, функції і надалі залишатимуться невід'ємною частиною військової науки, сприяючи досягненню переваги на полі бою, прийняттю обґрунтованих рішень та коригуванню тактику відповідно до обставин.

В.О. Балдін, Д.О. Лезкун

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Науковий керівник: Н.М. Гузик, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

ТРИГОНОМЕТРІЯ У ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Тригонометрія – це галузь математики, яка досліджує тригонометричні функції. Її розвиток тісно пов'язаний із такими сферами, як землемірство, астрономія та будівництво. Слово «тригонометрія» походить від грецької мови і в перекладі означає "вимірювання трикутників". Тригонометричні методи широко застосовуються не лише в інженерії, архітектурі та фізиці, але й у військовій справі. Військові фахівці використовують тригонометричні розрахунки для артилерійських стрільб, навігації, розвідки та інших важливих операцій. У цій доповіді розглянемо основні сфери застосування тригонометрії у військовій справі.

Одним із основних напрямків використання тригонометрії у військовій справі є артилерія. Для точного наведення артилерійських знарядь на ціль необхідно знати не лише відстань до неї, але й кут, під яким потрібно вести вогонь. Для точної стрільби артилеристи враховують: кут піднесення гармати (θ), дальність стрільби (L), початкову швидкість снаряда (v_0). У середовищі без опору повітря

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g},$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння. Так, для влучання в ціль на 10 км з гаубиці М777 ($v_0 = 827 \text{ м/с}$ для М777) кут піднесення визначається з рівності

$$\sin(2\theta) = \frac{10000 \cdot 9,81}{827^2} = 0,143,$$

звідки $\theta \approx 4^\circ 6'$. На практиці кут буде більшим через опір повітря, але ця формула – основа для попередніх розрахунків.

Снайпери використовують тригонометричні функції для корекції стрільби з урахуванням: кута місця (стрільба вгору чи вниз), відстані до цілі, сили та напрямку вітру. Якщо вітер дме зі швидкістю w м/с під кутом α до траєкторії стрільби, то корекція прицілу визначається за формулою

$$x = L \cdot \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{w \cdot \sin \alpha}{v} \right),$$

де L – дальність до цілі, v – швидкість кулі. Так для ураження цілі на відстані 1 км з гвинтівки Barrett M82 (швидкість кулі $v = 853 \text{ м/с}$) при боковому вітрі $w = 5 \text{ м/с}$, $\alpha = 90^\circ$ зсув дорівнює

$$x = 1000 \cdot \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{5}{853}\right)\right) \approx 1000 \cdot 0,0059 \approx 5,9 \text{ м.}$$

Снайпер вносить цю поправку в приціл перед пострілом.

У системах протиповітряної оборони тригонометрія використовується для визначення координат повітряних цілей. Радіолокаційні станції вимірюють кут місця та азимут цілі, а також відстань до неї. Наприклад, при виявленні літака на відстані 50 км під кутом місця 15 градусів, його висота становить приблизно 12,9 км, що обчислюється за формулою

$$h = L \cdot \sin \alpha.$$

У військовій топографії тригонометрія застосовується для визначення висот об'єктів методом триангуляції. Якщо відома відстань до об'єкта та кут піднесення до його вершини, то висота обчислюється за формулою

$$h = L \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Так для об'єкта, що знаходиться на відстані 200 м під кутом 30 градусів, висота становитиме близько 115,5 м.

Особливий інтерес представляє метод пропорційного наведення (Proportional Navigation), який широко використовується в системах керування ракетами. Цей метод базується на тригонометричних розрахунках швидкості зміни кута між напрямком руху ракети та лінією візування цілі. Керуючий сигнал формується пропорційно до швидкості зміни цього кута:

$$\omega = N \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

де ω – кутова швидкість повороту ракети, N – коефіцієнт посилення (зазвичай від 3 до 5), θ – кут між вектором швидкості ракети та лінією візування цілі. Розглянемо конкретний приклад роботи системи протиповітряної оборони Patriot з використанням методу пропорційного наведення. Припустимо, що ракета противника рухається під постійним кутом $\theta=30^\circ$ відносно лінії зору системи наведення (кут між вектором швидкості ракети противника та лінією, що з'єднує ракету Patriot з ціллю). Тоді швидкість зміни кута $\frac{d\theta}{dt} = 2$ рад/с – це кутова

швидкість, з якою змінюється орієнтація цілі відносно ракети Patriot. Відповідно до методу пропорційного наведення, керуючий сигнал (кутова швидкість повороту ракети) $\omega = 4 \cdot 2 = 8$ рад/с. Тригонометричні розрахунки в цьому методі дозволяють визначити оптимальну траєкторію перехоплення рухомої цілі з мінімальними енергетичними витратами.

Сучасні системи управління вогнем автоматизують тригонометричні розрахунки, однак розуміння їх основ залишається критично важливим для військових фахівців. Точність артилерійської стрільби, ефективність систем ППО та якість топографічних вимірювань безпосередньо залежать від правильного застосування тригонометричних методів.

Таким чином, тригонометрія є невід'ємною частиною сучасної військової науки. Її методи дозволяють вирішувати складні прикладні задачі, пов'язані з визначенням координат цілей, розрахунком траєкторій, компенсацією зовнішніх впливів та плануванням бойових операцій. Розвиток обчислювальної техніки не зменшує значення тригонометрії, а навпаки, розширює сфери її застосування у військовій справі.

С.А. Євтушенко

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного

Науковий керівник: Н.М. Гузик, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ)

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ЯК ПІДГРУНТЯ КРИПТОГРАФІЇ

Криптографія (крипто - «прихований», графо - «пишу») – це наука про математичні методи захисту інформації. У простих ситуаціях – це може бути пароль «фішка», зрозумілий тільки курсантам для позначення, що хтось іде. У політиці, бізнесі та військовій справі – це критична потреба обмінюватися інформацією приховано, розкриття якої може привести до втрати репутації або навіть людських життів.

Кіберзахист ділиться на забезпечення конфіденційності, цілісності та автентичності інформації. Своїми словами захищена інформація має бути приватною, достовірною та з однозначно встановлюваним автором.

У військовій справі циркулює різноманіття важливих даних. З приходом тотальної цифровізації та автоматизації обробки інформації з'явилася низка вимог щодо забезпечення кібербезпеки. Почнімо з простого – розробка та віддання бойового наказу. Приміщення, в яких озвучуються такі дані, мають бути спеціально облаштовані, а ПЕОМ мати свої технічні засоби захисту інформації. При пересиланні наказу засобами СЕДО інформація перетворюється певним чином, де програмування і математика тісно переплітаються. Алгоритми шифрування, які забезпечують безпеку даних, ґрунтуються на складних математичних теоріях, таких як теорія чисел чи еліптична криптографія.

Ключову роль у криптографічних алгоритмах відіграють прості числа – ті, що діляться лише на себе та на одиницю. Часто перед застосуванням числа як ключа необхідно перевірити його на простоту або факторизувати, тобто розкласти на прості множники. Найчастіше для цього застосовують малу теорему Ферма, але існує багато інших тестів – тест Поклінгтона, АКС тест, імовірнісні методи. Системи шифрування бувають симетричними, коли ключі збігаються, та несиметричними, де відбувається розділення секрета. Найвідоміший алгоритм симетричних систем шифрування AES (Advanced Encryption Standard). Його можна побачити в налаштуваннях радіостанцій Motorola, Harris, Aselsan тощо. Алгоритм використовує модульну арифметику, математичні поля, розділення інформації на блоки, зсув регістрів. На такому математичному апараті як мережа Фейстеля був заснований відомий у пострадянському просторі ГОСТ 28147-89 «Магма», який використовувався як норматив при різних типах шифрування інформації.

Асиметрична криптографія частіше застосовується у цифрових підписах, метою яких є перевірити вірність факту або авторизувати персону. Можливості застосування – авторизація у «Кропиві», підтвердження особистості ЕЦП у

ПриватБанку тощо. Найвідоміший приклад – алгоритм Діффі-Геллмана, де використовується піднесення числа до степеня за модулем. Інший приклад, що ґрунтується на теорії чисел, є алгоритм RSA (Рівест, Шаміро, Адлеман). Він використовує добуток двох великих простих чисел для створення пари ключів (публічного та приватного) і забезпечення безпечного шифрування даних. Розклад числа на прості множники є складною задачею для великих чисел, що забезпечує надійність криптосистеми. Шеннон довів, що для ідеального шифрування потрібно, щоб ключ був рівноцінно випадковим та мав таку ж довжину, як і повідомлення. На сьогодні над такими алгоритмами працюють, оскільки для систем на кшталт «Пелена» чи «Гном», які використовуються у військах для шифрування, використовуються апаратні засоби генерації ключів. Тема генерації абсолютно випадкових чисел великого обсягу, що співпадатиме з обсягом інформації та надійно її захищатиме є цілком актуальною.

Сучасні дослідження в області квантової механіки відкривають нові горизонти для криптографії. Квантова криптографія використовує принципи квантової теорії, такі як суперпозиція та сплутаність часток, для створення нових способів захисту інформації. Одним із найвідоміших протоколів є квантовий протокол обміну ключами (Quantum Key Distribution, QKD), який використовує квантові властивості для забезпечення абсолютної безпеки передачі інформації.

Отже, математика дає поштовх сфері захисту інформації, що може сприяти розвитку конкурентноспроможного бізнесу, зберігати приватність і навіть життя людей. У математиці є безліч проблем, вирішення яких може знайти відображення у криптографії (криптоаналітиці). Покращення вже існуючих методів може пришвидшити обчислення ключів та сертифікатів, а нові математичні апарати – відкривати інші можливості кіберзахисту.

МАТЕМАТИЧНІ ЗАСАДИ У ПСИХОЛОГІЇ

“Математика, як найбільш розумова галузь наук, має природну спорідненість з психологією – наукою про розум” Г. Біркгоф.

Математика у всьому і всюди. Не виключення й психологія. Підхід до психологічного дослідження заснований на математичному моделюванні процесів сприйняття, мислення, когнітивних і моторних процесів.

Психолог у своїй діяльності стикається з проблемою вимірювання індивідуально-психологічних особливостей, маємо на увазі креативність, імпульсивність, властивості нервової системи. При проведенні психодіагностики, з метою встановлення заключення, на основі кількісного оцінювання реакцій організму при вирішенні певних задач розробляють спеціальні вимірювальні процедури, або тести, результати яких після проведеного аналізу є математично-статистичним опрацюванням даних [1].

З кінця 20-х років XX століття математичні методи все ширше проникають в психологію і творчо застосовуються в ній, розвивається теорія вимірювань.

Математичні психологи активно працюють в багатьох галузях психології, особливо у психофізиці, природі сприйняття, аналізу відчуття і сигналу, аналізу процесу розв’язування задач і прийняття рішень у когнітивній психології. Модель психології поведінки розроблена на основі апарату ланцюгів Маркова. В основу генетичної психології закладений дисперсійний аналіз створений Рональдом Фішером. В інженерній і загальній психології застосовується Шепоновська теорія інформації та теорії автоматичного регулювання [2, 3].

Не можна не відзначити американського психолога Луїса Леона Терстоуна та його внесок у математичну психологію. Він одним з перших хто став застосовувати математичні методи в психології та соціології. В області інтелекту він запропонував свій варіант багатофакторного аналізу з спростованою концепцією g-фактора інтелекту Спірмена. Ним були проведені дослідження різноманітних соціальних установок – відношення до війни, смерті, смертної страти, віри, церкви, цензури, раси, націй і іншого. Також Терстоун сформулював Закон порівняльних суджень. Його дослідження стали основою для подальшого розвитку методів шкалювання в психології, зокрема створення інтервальних шкал для вимірювання інтелектуальних та особистісних характеристик людини. Завдяки його працям стало можливим більш точно й об’єктивно оцінювати психологічні феномени, переводячи абстрактні поняття у конкретні числові показники, що значно розширило можливості психологічних експериментів і досліджень.

Інша ключова фігура у виявленні систематичного когнітивного упередження людини в оцінці ризику та потенційної вигоди є ізраїльський психолог Амос Натан

Тверські. Ним була розвинена теорія перспектив, яка вважається однією з основ дослідження людського мислення та психології ірраціональної людини. Власне дослідження він проводив в парі з Капеманом. Перша їх успішна спільна робота «Віра в закон малих чисел», виклали одинадцять «когнітивних ілюзій», що впливають на судження людини при невеликих значеннях, які надаються можливим ризикам і вигодам, при дослідженнях встановлено як змінюється вибір людини в залежності від формулювання завдань, навіть якщо при цьому їх сутність залишається незмінною. Його теорія перспектив є основною відправною точкою для економічних моделей, заснованих лише на математиці і підтверджує психологію передбачення, нелогічні людські економічні вибори [3,4].

Вагомий внесок у розвиток математичної психології внесли розділи математики з теорії ігор, інформації, лінійних систем, випадкових процесів логіка.

“Так практична діяльність психолога – це передусім мистецтво застосування практичних методів. Але здорового глузду недостатньо для професійної роботи. Професіонал відрізняється тим, що може обґрунтувати свою точку зору, скажімо, перевірити ефективність того чи іншого практичного методу або спроможність організаційного рішення. При цьому він буде опиратися на науково обґрунтовані аргументи, а не лише на власну суб’єктивну думку”.

Література

1. Leahey T.H. Psychology // Encyclopedia of Psychology / Leahey T.H., Kazdin A.E. // History of Psychology - second cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987 – Washington/NY:APA / Oxford University Press, 2002.
2. Климчук В.О. Математичні методи в психології / Климчук В.О. / навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. – К.: Освіта України. – 2009. – 288 с.
3. Руська Р.В. Теорія імовірності та математична статистика в психології: навч. посібник / Р.В. Руська. – Тернопіль, 2020. – 112 с.
4. Телейко А.Б. Математико-статистичні методи в соціології та психології: навч. посібник / А.Б. Телейко, Р.К. Чорней. – Київ: МАУП, 2007 – 418 с.

О.С. Процишин

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.
Науковий керівник: Л.Д. Величко, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри інженерної механіки (ОТІВ)*

РОЗМІНУВАННЯ МІННИХ ПОЛІВ

Загарибницька війна Російської імперії проти України, яка захищається, активізувала питання мінно-вибухових загороджень на полі бою. Російські окупанти використовують мінні поля для нанесення ураження українській рухомій військовій техніці так і особовому складу. Переважно, мінні поля встановлюються на дорогах та обабіч їх, на напрямках де очікується рух бронетехніки та в інших місцях. Набуло поширення встановлення мінних пасток з використання безпілотних літальних апаратів. Під час подолання протитанкового мінного загородження бронетехнікою фіксується її значне ураження. Коефіцієнт ймовірності ураження танків, БТР, БМП на мінному полі складає 65% – 75%, що суттєво зменшує атакуючого потенціалу військ. Отже, суттєвою необхідністю повстає питання повного або значного знешкодження мін та саморобних вибухових пристроїв на мінному полі.

В інструкціях вказані правила поведінки військовослужбовців в яких описуються способи запобігання втрат особового складу і техніки від дії мін та саморобних вибухових пристроїв на міннонебезпечених територіях. Для цього в підрозділах інженерних військ використовують механізовані (коткові, бойкові та ножові мінні трали) засоби так і ручні пристрої для виявлення та подальшого знешкодження вибухонебезпечних пристроїв. Використання техніки дозволяє здійснювати знешкодження мін від 90%, до 95%. Проте використання техніки для розмінування мінних полів у близькій віддалі від противника супроводжується можливістю її ураження противником.

З метою створення проходів у мінних полях та уникнення ураження противником використовують подовжені заряди. Вони забезпечують ймовірність знешкодження мін біля 90%. Подовжені заряди можуть подаватись на мінне поле повітрям або по землі. Ізраїльська система POMINS-II, KM 456 (Portable Mine Neutralization System) створює прохід довжиною до 40 метрів і шириною 50 сантиметрів. Американська M58 MICLIC (Mine Clearing Line Charge) має лінійний заряд довжиною 107 метрів і його один метр довжини містить 7,45 кг вибухівки. Ця система створює прохід довжиною 100 метрів і шириною до 8 метрів. Російська система розмінування УРП-01 здійснює розмінування в смузі довжиною 115 метрів і шириною 6 метрів. Україна використовує старі зразки радянської техніки УР-77 і УР-833п і працює над їх удосконаленням.

Адамович Я.Р., Дідух Н.А.

Львівський Національний Університет імені Івана Франка

Науковий керівник Л. Ю. Фірман, старший викладач кафедри вищої математики механіко-механічного факультету

МАТЕМАТИКА В АРТИЛЕРІЙСЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Артилерія є однією з найбільш точних і потужних складових сучасного озброєння. Успішне застосування артилерійських систем неможливе без використання математичних розрахунків, які дозволяють прогнозувати траєкторію снарядів, оптимізувати точність наведення та оцінювати ефективність ураження цілей.

Однією з головних задач є визначення траєкторії польоту снарядів. Рух снарядів можна описати диференціальними рівняннями, які враховують дію сили тяжіння, опір повітря та інші фактори [1]. Якщо нехтувати опором повітря, то рух можна описати класичними рівняннями для параболічної траєкторії:

$$x = v_0 \cos(\theta)t, \quad y = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

де v_0 – початкова швидкість снаряда, θ – кут підйому, g – прискорення вільного падіння, t – час польоту.

У реальних умовах необхідно враховувати опір повітря, що додає до системи рівнянь додатковий член, пропорційний швидкості:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -mg\mathbf{j} - kv^2\mathbf{e}_v$$

де k – коефіцієнт аеродинамічного опору, m – маса снаряда, $\mathbf{e}_v$ – одиничний вектор напрямку швидкості. Ці рівняння розв'язуються чисельними методами, такими як метод Ейлера або метод Рунге-Кутта [2], що застосовуються в комп'ютерних системах керування артилерійським вогнем.

При коригуванні вогню враховується розсіювання снарядів. Випадкові фактори, такі як вітер, коливання початкових параметрів пострілу або особливості рельєфу, спричиняють відхилення траєкторії. Це явище моделюється за допомогою нормального розподілу:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

де μ – середнє значення точки влучання, σ – стандартне відхилення [3]. Використання статистичного аналізу дозволяє визначити ймовірні межі ураження та скоригувати прицілювання.

Тригонометричні розрахунки відіграють важливу роль у визначенні кутів наведення. Якщо ціль знаходиться на відстані d та висоті h від точки пострілу, кут наведення можна обчислити як:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{h}{d} \right)$$

Завдяки сучасним GPS-системам можна автоматично визначати координати гармати пострілу та цілі ураження, що значно підвищує точність наведення [4]. Оцінка радіусів ураження проводиться на основі емпіричних формул та чисельних методів. Вибухова хвиля і уламки поширюються згідно з законом:

$$R = k \left(\frac{E}{P} \right)^{\frac{1}{3}}$$

де E – енергія вибуху, P – атмосферний тиск, k – коефіцієнт, що залежить від типу вибухової речовини [5]. Аналіз отриманих результатів дозволяє визначити безпечні відстані для військових підрозділів та цивільного населення.

Для забезпечення безпеки передачі команд застосовуються алгоритми шифрування. Один із найпоширеніших методів – алгоритм RSA, який базується на розкладанні великих чисел на прості множники:

$$C = M^e \mod n$$

де M – вихідне повідомлення, e – відкритий ключ, n – добуток двох великих простих чисел [6].

Також, сучасні артилерійські системи активно використовують методи машинного навчання. Так, нейромережі аналізують дані про попередні постріли та коригують майбутні з урахуванням погодних умов і особливостей місцевості [7].

Отже, підсумовуючи наведене, ми вважаємо, що математика відіграє визначальну роль в артилерійській діяльності. Математичні розрахунки забезпечують високу точність та ефективність бойових операцій. Використання математичних моделей дозволяє прогнозувати результати застосування артилерії, мінімізувати небажані втрати та підвищувати рівень безпеки як для військових, так і для цивільного населення.

Література

1. Goldstein H. "Classical Mechanics" – Addison-Wesley, 2002.
2. Рунге-Кутта К. "Чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь" – Київ, 2010.
3. Лаплас П.С. "Теорія ймовірностей" – Париж, 1812.
4. GPS Systems in Military Applications. NATO Research Paper, 2019.
5. Ковальчук О.П. "Вибухові процеси та їх моделювання" – Харків, 2016.
6. Rivest R., Shamir A., Adleman L. "A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems" – MIT, 1978.
7. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. "Deep Learning" – MIT Press, 2016.

М.А. Каптованець, А.А. Іценко

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного
Науковий керівник Х.І. Ліщинська, кандидат технічних наук, професор кафедри
інженерної механіки (ОТІВ)*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИВАЛОГО ЗБРОЙНОГО КОНФЛІКТУ

Сучасні війни зазвичай відбуваються між неспівмірними за військовою міццю країнами. Тому часто військова операція закінчується в короткі терміни перемогою сильнішої зі сторін. Проте пізніше може початися війна опору, яка іноді триває достатньо довго. В такому випадку процес військових дій між окупаційною групою військ і силами опору набуває постійного характеру з усталеними статистично середніми втратами протягом певного часу (наприклад, календарного року). Якщо одна зі сторін або ж обидві вводять в дію додаткові сили, то кожна зі сторін повинна прогнозувати можливі втрати як противника, так і власні. Крім того, вартою уваги є динаміка зміни чисельності сил сторін у часі, яка залежить від швидкості заміщення втрат і введення нових резервів. Метод математичного моделювання дає відповіді на ці запитання. При цьому за вихідні дані потрібно приймати статистично середні показники втрат сторін.

Нехай $x(t)$ – середня чисельність військ окупаційної сторони X в момент часу t , $y(t)$ – відповідно окупованої сторони Y . Прийнемо, що математичні сподівання питомих втрат однієї сторони в розрахунку на одиницю особового складу сторони супротивника становлять a – для сторони Y і, відповідно, b – для сторони X . Питомі втрати a і b можуть змінюватися в часі (наприклад, сезонні зміни) або залежати від значень $x(t)$ і $y(t)$. Однак за невеликих змін $x(t)$ і $y(t)$ можна вважати a і b незалежними від них. Надалі значення a і b вважаються сталими і рівними статистично середнім значенням за даної чисельності $x(t)$ і $y(t)$. Тоді математичні сподівання втрат сторін за деякий проміжок часу для сторони X та сторони Y відповідно рівні

$$S_x = \int_0^t by(t)dt, \quad S_y = \int_0^t ay(t)dt \quad (1)$$

Математична модель зміни середніх значень $x(t)$ і $y(t)$ може бути побудована на основі рівнянь динаміки середніх, частинним випадком яких є рівняння Ланчестера, отримані за умови повної інформованості противників про результати бойових дій:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -by(t) + u(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t) + v(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де $u(t)$ і $v(t)$ – введені резерви в момент часу t сторін X та Y відповідно.

Введення резервів необхідно для компенсації втрат, а також для зміни складу сил. Оскільки втрати повинні компенсуватися продовж усього часу бойових дій, а введення і виведення сил також розподілені в часі, то ці процеси можна моделювати за законом безперервного зворотного зв'язку, пропорційно різниці між бажаними і фактичними значеннями x і y , тобто

$$u(t) = K_x(x_T - x(t)), \quad v(t) = K_y(y_T - y(t)),$$

де x_T і y_T – задані бажані значення чисельності угруповань сторін X і Y , K_x і K_y – коефіцієнти посилення, що визначають швидкість заміни або введення-виведення військ відповідних сторін конфлікту.

За цих припущень рівняння (2) можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -by(t) + K_x(x_T - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -ax(t) + K_y(y_T - y(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

З системи (3) отримаємо характеристичне рівняння $k^2 + (K_x + K_y)k + (K_x K_y - ab) = 0$, коренями якого є

$$k_{1,2} = \frac{-(K_x + K_y) \pm \sqrt{(K_x + K_y)^2 - 4(K_x K_y - ab)}}{2}.$$

При $(K_x + K_y)^2 - 4(K_x K_y - ab) = (K_x + K_y)^2 + 4ab > 0$ обидва корені рівняння є дійсними. При $K_x K_y - ab > 0$ обидва корені від'ємні. За умови $K_x K_y - ab \leq 0$ один корінь невід'ємний, а інший від'ємний.

У першому випадку спостерігається тривале протистояння, коли при заданих x_T і y_T чисельності обох сторін встановлюються на певних значеннях. У другому випадку одна зі сторін не може поповнити свої втрати і конфлікт закінчується її поразкою.

Розв'язок рівнянь (3) при заданих початкових умовах x_0 і y_0 може бути отриманий чисельними методами. У випадку, якщо a і b – сталі і не залежать від часу, то розв'язок можна знайти в квадратурах. Ввівши позначення $p_1 = K_y x_0 - by_0 + K_x x_T$, $p_2 = K_x y_0 - ax_0 + K_y y_T$, $q_1 = K_x K_y x_T - bK_y y_T$, $q_2 = K_x K_y y_T - aK_x x_T$, матимемо

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\left(\alpha_1 x_0 + p_1 + \frac{q_1}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 t} - \left(\alpha_2 x_0 + p_1 + \frac{q_1}{\alpha_2} \right) e^{\alpha_2 t} \right] + \frac{q_1}{\alpha_1 \alpha_2}, \\ y(t) &= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\left(\alpha_1 y_0 + p_2 + \frac{q_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1 t} - \left(\alpha_2 y_0 + p_2 + \frac{q_2}{\alpha_2} \right) e^{\alpha_2 t} \right] + \frac{q_2}{\alpha_1 \alpha_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

З рівнянь (4) можна отримати усталені середні чисельності сторін та визначити умови, за яких опір противника зведеться до нуля. Також можна визначити втрати за час t .

Запропонована математична модель динаміки тривалого збройного конфлікту, в основу якої покладені рівняння динаміки бою Ланчестера, може бути корисною при прогнозуванні розвитку бойових дій у конфліктній ситуації для обґрунтування та вибору рішення щодо управління військами.

О.В. Столяр, М.О. Максимішин

Львівський національний університет імені Івана Франка

Науковий керівник **Л.Ю. Фірман**, старший викладач кафедри вищої математики
ММФ ЛНУ

МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ ТА ЗАХИСТІ ДАНИХ

Криптографія є ключовою складовою сучасної кібербезпеки, а її основи ґрунтуються на математичних концепціях. Завдяки математичним методам забезпечується конфіденційність, цілісність і автентичність даних, що є критично важливими для цифрового світу [1].

Одним із основних математичних інструментів у криптографії є теорія чисел. Наприклад, алгоритм RSA базується на складності факторизації великих чисел [1]. У ньому використовується функція шифрування:

$$C = M^e \bmod N$$

і відповідна функція розшифрування:

$$M = C^d \bmod N$$

Тут $N = p * q$ є добутком двох великих простих чисел, а e та d — відкритий і закритий ключі відповідно. Безпека RSA базується на складності розкладу числа N на множники, що робить цей алгоритм одним із найнадійніших методів шифрування [1].

Алгоритми еліптичних кривих забезпечують більш ефективні та безпечні методи шифрування, використовуючи рівняння:

$$y^2 = x^3 + ax + b \bmod p$$

Ця технологія дозволяє досягати високого рівня захисту при меншій довжині ключа, що робить її привабливою для застосування в мобільних пристроях і розподілених системах [2].

Протоколи обміну ключами, такі як алгоритм Діффі-Хеллмана, базуються на складності обчислення дискретного логарифму. Протоколи використовують відкриті параметри g та p і обчислюють спільний секретний ключ:

$$K = g^{ab} \bmod p$$

Цей метод широко застосовується в захищених комунікаціях, зокрема в протоколах TLS та VPN [2].

Теорія ймовірностей та статистика є важливими інструментами в криптографії для оцінки якості і безпеки криптографічних систем. Так, статистичні тести використовуються для перевірки випадковості генерації ключів, що дозволяє оцінити їх криптографічну стійкість [1].

У свою чергу, теорія графів знаходить своє застосування у моделюванні блокових шифрів, таких як AES. Взаємозв'язки між різними етапами

обчислень можна представити у вигляді графів, що дозволяє оптимізувати структуру шифрування та покращити його ефективність [2].

Значення квантової криптографії зростає, оскільки квантові алгоритми, такі як алгоритм Шора, можуть зруйнувати традиційні методи криптографії. Алгоритм Шора дозволяє розкласти число N на множники за час $O((\log N)^3)$, що значно швидше за класичні методи. Це підкреслює необхідність розробки постквантових алгоритмів, таких як решіткова криптографія, що базується на складності знаходження найближчого вектора у ґратках високої розмірності [3].

Отже, підсумовуючи вище наведене, математика відіграє центральну роль у криптографії, забезпечуючи стійкість алгоритмів шифрування та захисту даних у цифровому світі. Поєднання теоретичних досліджень і практичних застосувань дозволяє створювати ефективні механізми кібербезпеки, що гарантують захист інформації навіть у найбільш загрозливих умовах.

Література

1. Stallings W. Cryptography and Network Security: Principles and Practice. Pearson, 2020.
2. Menezes A.J., van Oorschot P.C., Vanstone S.A. Handbook of Applied Cryptography. CRC Press, 1996.
3. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010.

А.І. Цюнглевич

ВСП"Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування"

Науковий керівник: О.Л. Чопик, викладач математики вищої кваліфікаційної категорії, старший- викладач

МАГІЯ ЧИСЛА e : ВІД СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ ДО КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Мета даної роботи полягає в тому, щоб висвітлити фундаментальну роль та багатогранне значення числа e у математиці та за її межами; показати, що число e є ірраціональним трансцендентним; окреслити історичний контекст його появи та продемонструвати глибокі зв'язки числа e з ключовими математичними функціями і розкрити широкий спектр застосувань числа e у різних галузях.

Число e є фундаментальною математичною константою, що відіграє ключову роль у багатьох галузях науки, техніки та фінансів. Воно є ірраціональним числом, тобто нескінченним десятковим неперіодичним дробом. Крім того, число e трансцендентне, оскільки його неможливо отримати як корінь алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Цікаво, що e було першим числом, трансцендентність якого не була виведена спеціально, а доведена лише у 1873 році французьким математиком Шарлем Ермітом.

Число Ейлера (e) – це ірраціональне число, тобто нескінченний десятковий неперіодичний дріб, що також називають “експонентою”, має вигляд:

$$e = 2,7182818284590... .$$

На практиці вважають, що $e \approx 2,7$.

За означенням, число e – це границя функції $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ при $x \rightarrow \infty$

Історично, число e з'явилося порівняно недавно і іноді називається «Неперовим або Ейлеровим числом» на честь винахідників: Джона Непера (1550 - 1617), який винайшов логарифми та Леонарда Ейлера, який відкрив нескінченний ланцюговий дріб для представлення числа e . Приклади наближень включають дріб $2721/1001$, що дає значення e з шістьма вірними десятковими знаками, $878/323$ — з трьома, а $87/32$ — з двома.

З числом e пов'язані ключові математичні функції:

- Функція $y = e^x$ відома як експонента або експоненційна функція.
- Логарифм за основою e називається натуральним логарифмом ($\ln x$).
- Число e також має глибокі зв'язки з диференціюванням та інтегруванням.

Важливо, що похідна та первісна функції $y = e^x$ не змінюється.

Застосування числа e охоплює широкий спектр областей:

- Складні відсотки.
- Задачі оптимального планування. Наприклад, при розламуванні палиці довжиною L на n рівних частин, значення n , яке максимізує добуток довжин, пов'язане з числом e .

- Випробування Бернуллі.

• Задача безладу, також відома як задача переплутаних капелюхів або задача Монмора. Ця задача стосується ймовірності того, що жоден з n капелюхів, випадково розподілених дворецьким, не потрапить у правильний ящик. Коли кількість гостей n зростає до нескінченності, ця ймовірність наближається до $1/e$.

Число e є невід'ємною частиною сучасної науки та повсякденного життя. Від теоретичних доказів до практичних застосувань, воно відкриває нові горизонти для досліджень і технологій, а його універсальність та краса роблять його однією з найважливіших констант у математиці та за її межами.

Література

1. [https://uk.wikipedia.org/wiki/E_\(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/E_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE))
2. <https://interesnye-istorii.in.ua/ua/number-e/>
3. <https://vseosvita.ua/library/7-lutogo-den-cisla-e-399000.html>
4. <http://www.mmf.lnu.edu.ua/ar/2078>

Р.В. Мироненко

ВСП"Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування"

Науковий керівник: О.Л. Чопик, викладач математики вищої кваліфікаційної категорії, старший- викладач

МАТЕМАТИКА В МУЗИЦІ: ГАРМОНІЯ ЧИСЕЛ І ЗВУКІВ

Метою даної роботи є демонстрація та всебічне пояснення глибокого і нерозривного зв'язку між музикою та математикою, який існував протягом історії та продовжує розвиватися в сучасності

Історичний зв'язок музики і математики:

Зв'язок математики та музики найяскравіше ілюструють праці Піфагора. Він увійшов в історію як дослідник, що відкрив існування природного звукоряду. Щоб довести свою ідею, Піфагор сконструював інструмент монохорд, а його наукові висновки лягли в основу акустики.

Також встановив зв'язок між довжиною струни і висотою звуку, зокрема, що скорочення струни вдвічі підвищує звук на октаву.

Він відкрив математичні співвідношення для гармонійних інтервалів: октава - 2:1, квінта - 3:2, кварта - 4:3. Це лягло в основу ідеї, що "музика — це математика в русі".

Концепція "Музики сфер": учні Піфагора (зокрема Боецій) розвинули ідею, що планети рухаються по орбітах, які утворюють музичну гармонію. Ця "музика сфер" вважалася нечутною гармонією Всесвіту, що відображає ідеальну математичну будову Всесвіту.

У середньовіччі музика входила до квадрівіуму чотирьох вищих наук разом з арифметикою, геометрією та астрономією в університетах. Композитори, особливо церковної музики (наприклад, григоріанські хорали), використовували математичні пропорції, симетрію та структурну рівновагу для створення гармонійних композицій.

• Музика як організований звук, пояснений математикою:

Музика — це організований звук, а математика пояснює, як саме ці звуки упорядковані: за частотою, ритмом, інтервалами.

Кожен музичний звук можна описати числами: частотою коливань, тривалістю, силою.

Гармонія в музиці базується на простих числових відношеннях.

За висловом Лейбніца: "Музика - це задоволення, яке відчуває розум, коли рахує, не усвідомлюючи цього".

• Математичні характеристики звуку:

Звук - це хвиля, що поширюється в просторі.

Частота (Гц): кількість коливань за секунду, від неї залежить висота звуку. Наприклад, нота "ля" першої октави має частоту ≈ 440 Гц. Чим вища частота, тим вищий звук.

Амплітуда: висота хвилі, відповідає гучності звуку.

Довжина хвилі: відстань між вершинами хвиль.

- **Математичні пропорції та інтервали:**

Октава - це інтервал, де частота подвоюється (пропорція 2:1), створюючи знайомий, гармонійний звук. Наприклад, "ля" першої октави - 440 Гц, "ля" другої октави — 880 Гц.

Музичні інтервали базуються на простих числових відношеннях: квінта: співвідношення частот 3:2.; кварта: 4:3; велика терція: 5:4.

Ці прості пропорції створюють приємне звучання і відчуття гармонії.

- **Ритм і дробі:**

Ритм у музиці - це дробі і пропорції.

Кожен такт ділиться на частини, як дробі в математиці.

Приклади: такт 4/4 (чотири чверті) - найпоширеніший; такт 3/4 (три чверті), наприклад, у вальсі.

- **Сучасні зв'язки та застосування:**

Фрактали в музиці: повторення мотивів у різних частинах композиції, створюючи самоподібність. Приклад — твори Йоганна Себастьяна Баха, де музичні фрази повторюються з варіаціями.

Комп'ютерна музика: використання алгоритмів, що ґрунтуються на математичних правилах, логіці та ймовірності, для створення або зміни музики. Генеративна музика — створюється комп'ютером за заданими математичними алгоритмами, може звучати по-різному кожного разу.

Візуалізація музики: музику можна бачити у вигляді графіків, спектрограм та хвиль.

Звукова хвиля - графік зміни тиску повітря (амплітуди) з часом.

Спектрограма - показує, як частоти змінюються з часом (час, частота, гучність).

Візуалізація допомагає аналізувати музику, її ритм, тональність, тембр, вивчати гармонійні структури.

- **Відомі композитори і математика:**

Йоганн Себастьян Бах: у його музиці зустрічаються симетрії, повторення, арифметичні структури, фрактальна побудова. "Мистецтво фуги" є прикладом "музичної математики в чистому вигляді".

Вольфганг Амадей Моцарт: використовував арифметичні закономірності для побудови мелодій, мав "Музичну гру в кості" для створення мелодій за допомогою випадкових чисел. Його музика має модульну структуру, пов'язану числовими співвідношеннями.

Арнольд Шенберг: засновник додекафонії (12-тональної системи), яка базується на строгій послідовності 12 нот без повторення, схожій на математичну перестановку.

Яніс Ксенакіс: архітектор і композитор, який поєднав музику з математикою, фізикою та архітектурою. Використовував теорію ймовірностей, статистичні моделі, геометричні конструкції (наприклад, твір "Metastaseis", побудований на параболах і логарифмах).

У цифрову епоху зв'язок математики та музики став ще більш явним:

Цифровий звук: будь-який звук на комп'ютері чи смартфоні — це цифровий код, результат перетворення аналогової звукової хвилі на послідовність чисел.

Синтез музики: синтезатори створюють звуки за допомогою математичних алгоритмів, генеруючи хвилі різної форми (синусоїдальні, квадратні тощо).

Алгоритмічна композиція: існують комп'ютерні програми, що здатні писати музику на основі заданих математичних правил і моделей, відтворюючи стилі від Баха до джазу.

Аналіз музики: такі інструменти, як перетворення Фур'є, дозволяють математично розкласти складний звуковий сигнал на прості синусоїдальні хвилі, що є ключовим для обробки та аналізу звуку.

Отже математика є невидимим каркасом, на якому тримається музична гармонія, ритм і структура. Від простих дробів, що визначали гармонію для стародавніх греків, до складних алгоритмів, які генерують музику сьогодні. Ці дві дисципліни залишаються нерозривно пов'язаними, доводячи, що порядок і краса можуть бути виражені як мовою чисел, так і мовою звуків.

Література

1. <https://naurok.com.ua/matematika-i-muzika-h-zv-yazok-268652.html>
2. <https://ambassadors.lviv.ua/interview/mihaylo-zarichniy-pro-shozhist-matematiki-ta-muziki/>
3. https://math2service.blogspot.com/p/blog-page_12.html

С.О. Іванова

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТА

У курсі прикладної математики та механіки градієнт займає важливе місце. Використання градієнту в точних науках дає змогу розвитку, вдосконаленню та створенню майбутнього плану в різноманітних технічних, комп'ютерних та наукових спрямуваннях, його універсальне поєднання з різними видами діяльності дає прогрес в багатьох галузях. У даній статті буде розглянуто використання градієнта в таких напрямках як: топографія, інженерія, медицина та фізика.

Градiєнт – це міра зростання або спадання в просторі якоїсь фізичної величини на одиницю довжини. Для позначення градієнта використовується оператор Гамільтона ∇ , або оператор grad .

Градiєнт — векторна величина, яка визначає в кожній точці простору не лише швидкість зміни, а й напрямок найшвидшої зміни функції, що залежить від координат. Але при замінах координат градієнт перетворюється інакше, ніж вектор, і тому його не можна розглядати як справжній вектор. Для скалярного поля $U(x, y, z)$ градієнт визначається формулою

$$\nabla U = \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти системи відліку.

Використання в топографії. В цій галузі знаходження градієнту дає можливість створювати карти з точно показаним рельєфом поверхні та знаходженню масштабу. Беручи невеликі відстані та обчислюючи їх ми зможемо знайти градієнт. В землетрусах вони відіграють помітну роль яку слід оцінювати у процесі реагування насамперед у районах, які є найбільш вразливими до небезпеки землетрусів. Пошуково-рятувальні команди повинні скласти карту та визначити придатність міської інфраструктури для реагування на стихійні лиха після землетрусу, щоб забезпечити легкість пересування та швидку допомогу постраждалим. Саме за допомогою поєднання градієнту та програмування це стає в рази легше та точніше, тому на виконання попередніх дій для рятування може піти набагато менше часу та буде врятовано більше життів.

Використання в інженерії. Градієнт є основною складовою цивільного проектування та будівництва. Його використання має важливе значення для функціональності, безпеки та ефективності. Ось основні причини:

1. Дренаж та управління ресурсами: За допомогою визначення правильного градієнту формується ефективна дренажна система. Забезпечуючи нахил вниз, вода може природним чином і ефективно відтікати від певної території, запобігаючи повеням, ерозії та збиткам, пов'язаним з водою;

2. Транспортна інфраструктура: Ухили відіграють важливу роль у проектуванні доріг і залізниць. Відповідний ухил забезпечує безпечне пересування транспортних засобів і поїздів. Правильна конструкція ухилу забезпечує плавне переміщення вантажів та людей;
3. Прокладання трубопроводів та інженерних комунікацій: При проектуванні трубопроводів для води, газу, нафти або інших комунальних послуг ухил необхідний для забезпечення належного потоку і тиску. Відповідний нахил дозволяє рідині або газу плавно та ефективно рухатися по трубах, зменшуючи потребу в додатковому насосі або обслуговуванні.

Це лише кілька прикладів, які підкреслюють важливість градієнтів у цивільному будівництві. Правильна градієнтна конструкція забезпечує функціональність, безпеку та економічну ефективність інфраструктурних проектів.

Використання в медицині. Градієнти в МРТ відіграють ключову роль у формуванні чіткості та якості МРТ-зображень. Коли ми думаємо про магнітно-резонансну томографію (МРТ), ми часто уявляємо детальні та складні зображення людського тіла, які допомагають діагностувати захворювання з неперевершеною точністю. За цією дивовижною візуальною подорожжю ховається захоплююча концепція, відома як градієнти. Їхні стратегічні варіації розгадують таємниці тіла, революціонізуючи медичну діагностику та даючи змогу без зупину розвиватися медичній діяльності.

Використання у фізиці. Градієнт в фізиці визначає швидкість зміни щодо відстані змінної величини, як температура або тиск, у напрямку максимальних змін. Його застосування охоплює широкий спектр галузей:

1. Електричне поле: Градієнт потенціалу використовується для визначення напрямку та величини електричного поля.
2. Теплопередача: Градієнт температури визначає напрямок перенесення тепла.
3. Механіка рідини: Градієнт тиску впливає на рух рідин і газів, що є ключовим у гідродинаміці.
4. Оптика: Градієнти показника заломлення використовуються для аналізу поширення світла у матеріалах.

Градієнт дозволяє зрозуміти, як фізичні параметри змінюються локально, що є ключовим для багатьох процесів.

Живучі в сучасному світі ми навіть не підозрюємо наскільки часто використовується градієнт в нашому повсякденному житті та створення для нас комфортних умов. Саме його поєднання з різними науками дає його більшого розкриття та використання в різноманітних напрямках.

Література

1. Григорій Михайлович Фіхтенгольц. Курс диференціального та інтегрального числення. — 2025. — 2391 с.(укр.)
2. Ляшко І.І., Смельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Частина 2. — К. : Вища школа, 1993. — 375 с. — ISBN 5-11-003758-2.(укр.)

3. Градієнт, стр. 143 — М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. — Київ, НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. — 430 с.
4. Мала гірнича енциклопедія : у 3 т. / за ред. В. С. Білецького. — Д. : Донбас, 2004. — Т. 1 : А — К. — 640 с. — ISBN 966-7804-14-3.

В.М. Конач

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ПРИНЦИП КРАЙНЬОГО

Принцип крайнього є ефективним евристичним методом у математиці. Його суть полягає в аналізі найменшого або найбільшого (крайнього) елемента серед множини об'єктів, що задовольняють певну умову. Цей принцип часто дозволяє спростити задачу, звести її до простішого випадку або отримати суперечність.

Основна ідея принципу полягає у тому, щоб розглянути найменший або найбільший (тобто крайній) елемент у певній множині і використати його особливі властивості для розв'язання задачі або доведення твердження. Цей крайній елемент часто:

- простіший для аналізу
- має обмежену кількість можливих властивостей
- допомагає знайти протиріччя або зробити логічний висновок.

Суть у тому, що, якщо якась складна ситуація відбувається в системі, то вона обов'язково проявиться на крайньому елементі. І досліджуючи саме його, можна розкрити поведінку всієї множини.

При використанні даного методу слід дотримуватись певної послідовності:

1. Обрати об'єкт, який має крайову властивість в контексті даної задачі.
2. Проаналізувати чому саме він крайній.
3. Довести факт або встановити протиріччя.

Для демонстрації даного методу розглянемо наступні задачі:

Задача 1. Сім грибників зібрали разом 100 грибів, причому ніякі двоє не зібрали однакової кількості грибів. Довести, що існують троє грибників, які зібрали разом не менше, ніж 50 грибів.

Розв'язання. Розглянемо трьох грибників, які зібрали разом максимальну (серед всіх трійок грибників) кількість грибів. Якщо мінімальна (з цих трьох) кількість грибів дорівнює 16, то разом три грибника зібрали грибів не менше, ніж $16 + 17 + 18 = 51$. Якщо зазначена мінімальна кількість менша від 16, то решту чотири грибника зібрали разом не більше $14 + 13 + 12 + 11 = 50$ грибів. Звідси отримуємо, що перші троє зібрали разом не менше, ніж 50 грибів.

Задача 2. У космічному просторі літає 1001 астероїд, на кожному з яких сидить астроном. Усі відстані між астероїдами різні. Кожен астроном спостерігає за найближчим астероїдом. Доведіть, що за одним із астероїдів ніхто не спостерігає.

Розв'язання. Розглянемо два астероїди А та В, відстань між якими найменша. Астроном на астероїді А дивиться на астероїд В, а астроном на астероїді В дивиться на астероїд А. Якщо знайдеться астроном, який спостерігає за астероїдом А чи В, то знайдеться і астероїд, за яким ніхто не спостерігає (адже

скільки астероїдів – стільки і спостерігачів). Інакше виключимо із розгляду астероїди A та B . Отримаємо систему із $1001-2=999$ астероїдів, для яких виконується умова задачі. Продовжуючи таким чином далі, прийдемо до розгляду системи із трьох астероїдів. Астрономи на найближчих із них спостерігають за астероїдами один одного, тому за астероїдом, що залишився, ніхто не спостерігає.

Задача 3. У вершинах 100-кутника розставлені числа так, що кожне дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним чисел. Доведіть, що усі числа між собою рівні.

Розв'язання. Розглянемо найбільше із чисел (якщо таких кілька, то обираємо будь-яке із них). Сусідні числа не можуть бути меншими за це число тому, що якщо одне із них менше – то друге має бути більшим за розглядуване число (але ж ми обрали найбільше). Отже усі три числа рівні між собою. Розглянемо наступне за ними число. Воно дорівнює двом числам, що стоять перед ним (тому що ті рівні між собою). Далі розглядаємо наступне за цими числами число і т.д. Таким чином доводимо, що усі числа рівні між собою

Задача 4. Протягом дня в бібліотеці побувало 100 читачів. Кожен читач відвідав бібліотеку рівно один раз. Виявилось, що в цей день з будь-яких трьох читачів принаймні двоє зустрілись у бібліотеці. Довести, що працівник бібліотеки міг зробити повідомлення в такі два моменти часу, щоб усі 100 читачів його почули.

Розв'язання. Нехай A — той читач, який першим вийшов з бібліотеки, B — той читач, який першим після виходу читача A зайшов до бібліотеки, C — довільний читач із читачів, які зайшли до бібліотеки після читача B . Оскільки читач A не зустрівся ні з B , ні з C , то читачі B і C обов'язково зустрілись, а тому читач B знаходився в бібліотеці доти, поки всі читачі не прийшли в бібліотеку. Розглянувши читачів A і C та довільного, відмінного від C , читача D , що прийшов у бібліотеку після B , отримуємо з умови задачі, що читачі C і D обов'язково зустрілись. Тому жоден із читачів, які прийшли в бібліотеку після читача B , не вийшли з бібліотеки раніше за нього.

Отже, потрібні моменти часу такі: перше повідомлення — безпосередньо перед виходом читача A , друге — безпосередньо перед виходом читача B .

Отже, принцип крайнього дозволяє знайти суперечності або обмеження шляхом аналізу крайнього елемента і є особливо корисний у задачах, де важко побачити закономірність для всієї множини, має практичне застосування в доведеннях від супротивного, задачах з теорії чисел та комбінаториці.

Література

1. Аристотель. Метафізика / пер. з давньогрец. А. Пашук. Київ : Основи, 2001. 448 с.
2. Поля Г. Як розв'язувати задачу : практичний посібник для вчителів математики / пер. з англ. О. Ляшенко. Київ : Освіта, 1995. 208 с.
3. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. New York : Oxford University Press, 1996. 592 p.

В. Олексин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник І. В. Шевчук, викладач кафедри прикладної математики та механіки

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Інтеграл — це одне з основних понять математики, яке має велике практичне значення. Часто інтеграли та теореми диференціального числення вважають суто теоретичними темами, але на практиці вони відіграють надзвичайно важливу роль у забезпеченні безпеки, плануванні операцій і прийнятті рішень.

Інтеграл — це узагальнення суми нескінченно малих частинок. Його можна уявити як суму дуже маленьких елементів, з яких складається якась величина. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \rightarrow 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i , ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначенням інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Інтеграл — це одне з основних понять математичного аналізу, яке використовується для обчислення площ, об'ємів, довжин, мас, роботи сил та багатьох інших величин. Інтеграл дає змогу знайти точні значення, навіть якщо форма об'єкта є складною або функція зміни величини нерівномірна.

У професійній діяльності рятувальника інтеграл може бути використаний для:

- розрахунку об'єму рідини. Під час ліквідації наслідків повені рятувальникам часто потрібно оцінити скільки води треба відкачати із затопленої ділянки або приміщення. Якщо рівень води змінюється або дно має складну форму, звичайні формули не підходять. За допомогою інтегралу можна точно розрахувати об'єм навіть у складних умовах. Наприклад, коли йдеться про резервуари чи посудини складної форми, яку можна описати математично. Один із найпоширеніших методів — це обчислення об'єму тіла обертання. Якщо взяти деяку криву $y = f(x)$ та обернути її навколо осі Ox , то об'єм утвореної фігури можна знайти за допомогою визначеного інтегралу за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (2)$$

Такий підхід дозволяє визначити, наприклад, об'єм чаші або пляшки, форма якої задана графіком функції.

Ще один метод полягає у використанні площі поперечного перерізу. Якщо на кожному рівні висоти x відома площа поперечного перерізу посудини $S(x)$, то об'єм рідини визначається як

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (3)$$

Це особливо зручно для резервуарів нестандартної форми, де площа змінюється по висоті.

- Визначення роботи сили. При рятувальних роботах, наприклад: підйомі людини або вантажу з глибини, сила, яку треба прикладати, змінюється в залежності від висоти або маси. Робота сили - це інтеграл від сили по шляху. Тобто за допомогою інтегралу можна обчислити скільки зусиль потрібно для виконання тієї чи іншої дії. Інтеграл застосовується для визначення роботи сили тоді, коли сила змінюється залежно від положення. Якщо сила $F(x)$ діє вздовж напрямку переміщення тіла від точки $x=a$ до точки $x=b$, тоді робота цієї сили визначається як визначений інтеграл:

$$A = \int_a^b F(x)dx \quad (4)$$

Цей підхід дозволяє обчислювати роботу, коли сила не є сталою, тобто вона змінюється в залежності від координати. Це часто трапляється в реальних фізичних ситуаціях, наприклад, при розтягуванні пружини, при гравітаційній взаємодії, у випадку тертя, або при русі тіла в змінному силовому полі.

- Моделювання розповсюдження шкідливих речовин. Під час аварії рятувальники повинні знати, яка кількість небезпечної речовини вже потрапила в повітря або воду. Якщо концентрація змінюється у просторі і задається функцією $\gamma = \gamma(x, y, z)$, інтеграл допоможе знайти загальну масу речовини в заданому об'ємі. Інтеграл широко використовується для моделювання розповсюдження шкідливих речовин у навколишньому середовищі — в повітрі, воді або ґрунті.

$$m = \iiint \gamma(x, y, z) dx dy dz \quad (5)$$

Це дозволяє точно визначити масу речовини, що міститься в певній зоні, що є особливо важливим при оцінці ступеня забруднення.

Використання інтеграла в цих контекстах відкриває широкі можливості для розуміння та вирішення різноманітних завдань у наукових, технічних, та інших прикладних областях. Рятувальники мають велику користь навіть не виконуючи інтегральні обчислення самотійно, а користуючись їх результатами. Проте добре розуміння принципів інтегрування та вміння їх застосувати дозволяє організувати, розрахувати витрати матеріалів та оцінити ризики рятувальних робіт.

Література

1. Коваленко І.П. Вища математика: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2006. – 343 с.
2. Застосування методів диференціального та інтегрального числення до розв'язання задач технічного змісту. Методичні вказівки для самотійної роботи студентів Л.Й.Бойко, В.І. Павліщев. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2012. – 46 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: АСК., 2001. – 648с.

П.О. Климчук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **І.В. Шевчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРІЇ

Комплексні числа, які зазвичай використовуються в алгебрі та математичному аналізі, також мають широке застосування в геометрії. Завдяки зручному поданню точок на площині у вигляді комплексних чисел, багато геометричних задач можна вирішити аналітичними методами.

Комплексне число $z = x + iy$ природно ототожнюється з точкою (x, y) на площині, де вісь абсцис називають дійсною віссю, а вісь ординат – уявною. При розв’язуванні задач часто використовується тлумачення комплексного числа $z = x + iy$ як вектора з координатами (x, y) , бо додаванню і відніманню комплексних чисел відповідає додавання й віднімання відповідних векторів, при цьому довжини векторів дорівнюють модулям відповідних комплексних чисел.

Серед основних застосувань комплексних чисел в геометрії виділяють:

Обертання фігур. Множення на число вигляду $e^{i\alpha}$ реалізує поворот на кут α навколо початку координат. Наприклад, обертаючи точку z на кут α отримаємо $z' = ze^{i\alpha}$.

Знаходження кутів і довжин. Модуль комплексного числа відповідає довжині вектора, а аргумент — куту напрямку. Це дозволяє обчислювати кути між векторами, використовуючи співвідношення

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_1| |z_2|}$$

Побудова трикутників і багатокутників. Координати вершин задаються комплексними числами, а умови рівнобедреності, прямого кута чи однакових сторін легко перевіряються алгебраїчно.

Розглянемо приклад:

Задача. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Розв’язання.

Помістимо трикутник ABC у комплексну площину і розглянемо медіану AM_a , яка проведена з точки A . Вершини трикутника – комплексні числа a, b, c . Точка M_a зображає комплексне число $\frac{1}{2}(b + c)$.

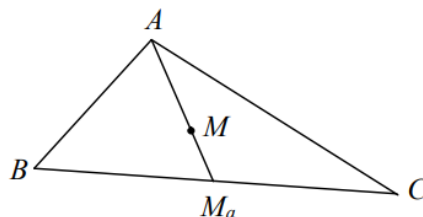


Рисунок 1

Розглянемо точку М, яка ділить відрізок АМа у відношенні $\lambda=2$, починаючи від точки А. Тоді точка М зображатиме комплексне число $m = \frac{a + \frac{b+c}{2} \cdot 2}{1+2}$.

$$m = \frac{a+b+c}{3}$$

Ця точка називається центроїдом і є точкою перетину всіх трьох медіан трикутника. Щоб переконатися в цьому, достатньо знайти координати середини кожної сторони, провести медіани як відрізки від вершини до середини протилежної сторони та аналітично перевірити, що всі три прямі перетинаються саме в точці М. Таким чином, замість довгих геометричних побудов можна використовувати прості алгебраїчні дії з комплексними числами

Цей підхід значно спрощує розв'язання геометричних задач і дозволяє швидко отримати точний результат. Крім того, такий метод добре масштабований — його можна застосовувати не лише до трикутників, а й до складніших фігур та систем точок на площині

Загалом комплексні числа в геометрії дають можливість:

- описувати фігури через алгебраїчні вирази.
- виконувати обертання, симетрію за допомогою множення і ділення
- швидко знаходити кути, довжини, відстані та координати точок перетину
- доводити властивості фігур, які складно сформулювати через звичайні координати

Такий аналітичний підхід широко використовується не тільки в математичних дослідженнях, але й в інженерії, фізиці, комп'ютерній графіці та інших технічних науках

Комплексний підхід використовується в геометрії не лише як зручний інструмент для доведення властивостей фігур а й у багатьох прикладних галузях:

- У комп'ютерній графіці для обертання об'єктів на площині, що дозволяє обійтись без складних тригонометричних розрахунків.
- У фізиці комплексні числа застосовуються для моделювання коливань хвильових процесів електричних сигналів та обертальних рухів.
- В інженерних обчисленнях і механіці з їх допомогою аналізують навантаження в конструкціях та коливальні системи.
- У аналітичній геометрії вони спрощують доведення властивостей фігур побудову трансформацій та розв'язання задач із симетріями.

Таким чином використання комплексних чисел дозволяє зробити геометричні задачі більш наочними а метод їх розв'язання — універсальним і ефективним.

Література

1. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Частина 1. — К. : Вища школа, 1992. — 496 с. — ISBN 5-11-003757-4.
2. Чарін В.С. (2005). Лінійна алгебра (PDF). Київ: Техніка. с. 416.

Х. Кардаш

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **Чмир О.Ю.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

ПОБУДОВА ІНТЕРВАЛЬНОГО РЯДУ РОЗПОДІЛУ У ЗАДАЧАХ СТАТИСТИКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНКЦІЙ ПРОГРАМИ EXCEL

Статистика, як наука, досліджує масові суспільні явища чи процеси, кількісно характеризуючи їх за різними ознаками на основі статистичних показників. Предмет статистики полягає в розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Застосування комп'ютерних технологій створює реальні можливості широкого впровадження методів статистики для розв'язування різного роду економічних задач. Так, наприклад, у програмі Excel існує багато математичних та статистичних функцій, за допомогою яких можна групувати дані, які надходять до дослідника, знаходити певні статистичні показники та робити після цього відповідні висновки.

Розглянемо вибірку середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам фірми:

338	348	304	314	326	314	324	304	342	308
336	304	302	298	314	314	320	321	322	321
312	323	336	338	312	312	364	356	362	302
322	310	334	324	362	362	304	366	298	304
381	368	304	292	368	368	340	328	316	322
302	314	292	296	342	321	322	290	332	298
296	298	324	322	338	352	326	318	304	332
360	312	331	338	331	304	316	332	282	342
342	322	324	324	325	302	328	354	330	316
334	350	334	323	324	332	340	324	314	326

Побудуємо інтервальний статистичний розподіл середньотижневої заробітної плати та гістограму частот.

Припускаємо, що дані про середньотижневу заробітну плату надійшли у вигляді документу Excel або ці дані можна перенести у програму Excel, сформувавши їх у робочий лист – «Інтервальний розподіл». У цьому робочому листі об'єднуємо комірки **A1:J1** і вводимо назву «**Вибірка середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам**» та вводимо у комірки **A3:J12** числові дані задачі. У комірку **A15** вводимо назву «**Інтервали заробітної плати**», а у комірки **A16:A26** вводимо відповідні інтервали: 280-289, 290-299, 300-309 ..., 380-389.

У комірці **G15** вводимо назву «**Кінці інтервалів**», а у комірках **G16:G26** вводимо числа, що відповідають кінцям інтервалів заробітної плати, тобто 289, 299, 309, ..., 389.

Вводимо у комірку **E15** назву «**Частоти**». Виділяємо комірки **E16:E27**. Входимо в меню **Функція** → **Статистичні** → **FREQUENCY** (рис. 1).

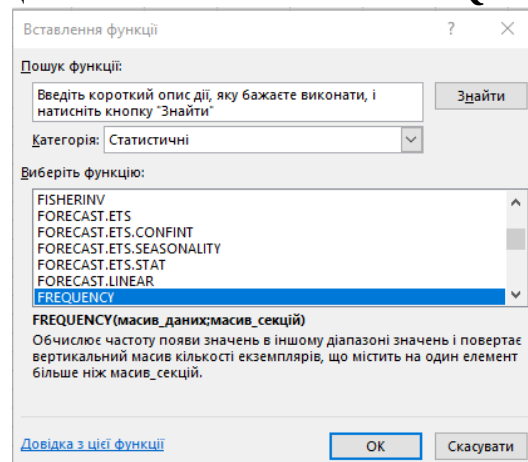


Рис. 1. Вибір статистичної функції «Частота»

У меню функції **ЧАСТОТА**, що з'явилося у вікні, вводимо адреси комірок: **Масив_даних** – комірки **A3:J12**; **Масив_секцій** – комірки **G16:G26**. Натискаємо комбінацію клавіш **<Ctrl + Shift + Enter>**. В результаті у комірках **E16:E26** отримаємо розподіл частот за інтервалами.

Перейдемо до побудови гістограми. Вносимо дані задачі у новий робочий лист Excel, який названо «**Гістограма**», і вводимо кінці інтервалів середньотижневої заробітної плати (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Вибірка середньотижневої заробітної плати 100 співробітникам											Кінці інтервалів
2												289
3	338	348	304	314	326	314	324	304	342	308		299
4	336	304	302	298	314	314	320	321	322	321		309
5	312	323	336	338	312	312	364	356	362	302		319
6	322	310	334	324	362	362	304	366	298	304		329
7	381	368	304	292	368	368	340	328	316	322		339
8	302	314	292	296	342	321	322	290	332	298		349
9	296	298	324	322	338	352	326	318	304	332		359
10	360	312	331	338	331	304	316	332	282	342		369
11	342	322	324	324	325	302	328	354	330	316		379
12	334	350	334	323	324	332	340	324	314	326		389

Рис. 2. Таблиця числових даних до задачі

Заходимо в меню **Дані** → **Data Analysis** → **Histogram**. Інколи необхідно поставити пакет **Аналіз даних**. Заходимо в меню **Файл** → **Параметри** → **Надбудови** → **Надбудови Excel** → перейти в **Пакет аналізу** поставити галочку. У вікні з'явилося меню функції **Histogram**, яке необхідно заповнити так, як це показано на рис. 3. **Input Range** – це дані таблиці заробітної плати, **Bin Range** – це дані стовпця «**Кінці інтервалів**». Необхідно поставити позначку у віконечку **Chart Output**, а також поставити позначку, куди вивести діаграму. В нашій роботі діаграму хочемо отримати в цьому ж робочому листі, тому ставимо позначку у віконечку **Output Range (\$A\$15)**, і вводимо адресу комірки, до якої буде занесена гістограма. Заповнивши меню функції **Histogram**, натискаємо **OK**.

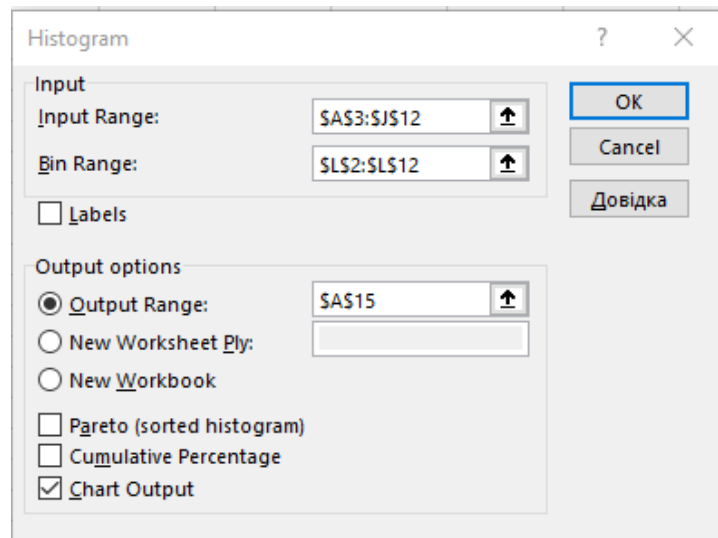


Рис. 3. Меню статистичної функції «Histogram»

У полі екрану з'являється гістограма, яку необхідно відредагувати. Заберемо надпис **Histogram**. Для цього правою клавішею миші виділимо область надпису і видалимо його за допомогою клавіші **Delete**. Аналогічно видалимо надпис легенди **frequency**. Також видаляємо комірки **A27**, **B27**. Одержимо зображення гістограми на рис. 4.

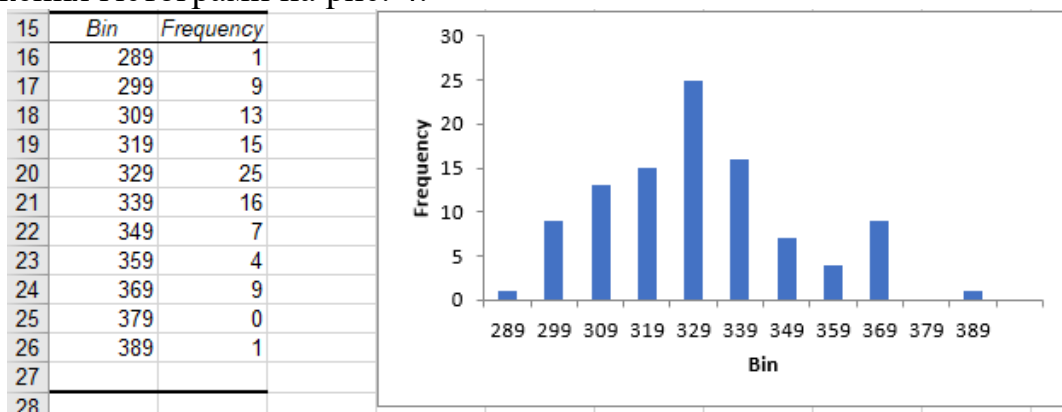


Рис. 4. Гістограма

Змінимо напис **Bin** на напис **Заробітна плата**. Для цього виставимо курсор миші в поле напису і активізуємо його, двічі клацнувши лівою клавішею миші, після чого введемо необхідний текст. Знищимо щілини між стовпцями гістограми. Встановимо курсор на поле одного з прямокутників діаграми і натиснемо праву клавішу миші. У меню, що з'явилося, вибираємо опцію «**Формат ряду даних**». У вікні «**Ширина площини**» встановлюємо значення **0**. У вікні меню бачимо потрібне зображення гістограми і натискаємо **<OK>**. Остаточний вигляд гістограми зображено на рис. 5.

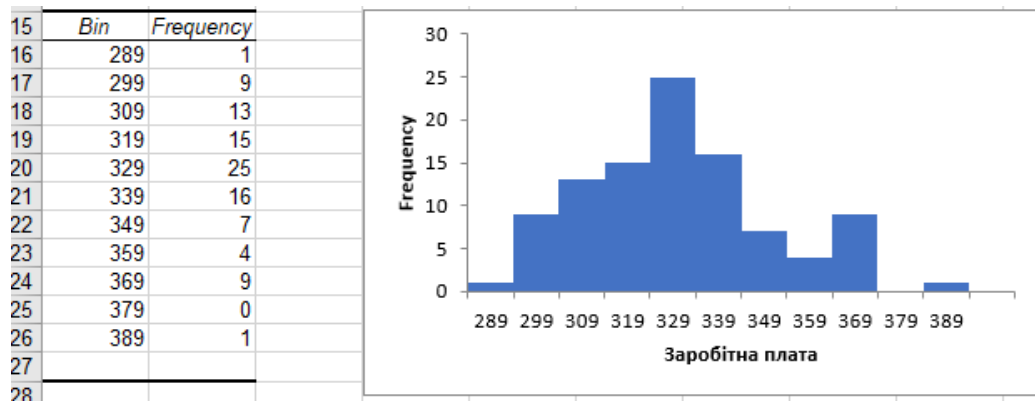


Рис. 5. Гістограма частот

Таким чином, використовуючи функції програми Excel, побудовано інтервальний статистичний розподіл середньотижневої заробітної плати та гістограму частот.

Література

1. Кузик А.Д., Меньшикова О.В., Чмир О.Ю. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Львів: ЛДУ БЖД, 2012. – 192 с.
2. Карабин О.О., Чмир О.Ю., Меньшикова О.В. Математичні методи в психології. Лабораторний практикум. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 108 с.
3. Фещур Р.В., Барвінський А.Ф., Кічор В.П. Статистика. Навч. посібник. – Львів: “Інтелект-Захід”, 2006. – 256 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.; ЦУЛ, 2002. – 448 с.

М. Василюк

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

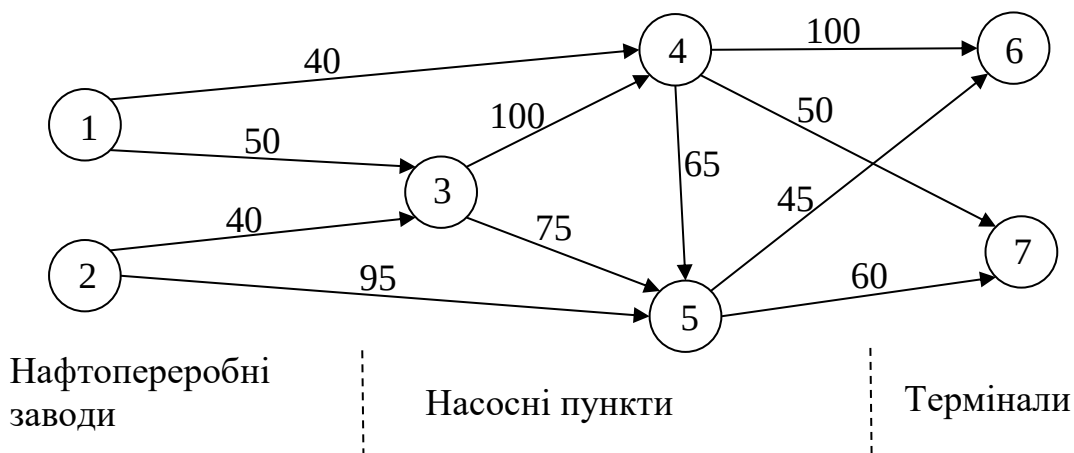
Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК ЗАСОБАМИ ПАКЕТУ MAPLE

Мережа може зображати систему, яка транспортує деякий продукт з одного пункту в інший. Цим продуктом можуть бути люди, електроенергія, природний газ тощо. Прикладом може бути мережа трубопроводів для транспортування нафти від свердловин через насосні станції до нафтопереробних заводів. Для розв'язання задачі про максимальний потік використовують метод Форда – Фалкерсона.

У програмі Maple задача про максимальний потік розв'язується за допомогою функції **MaxFlow**. Також задачу про максимальний потік можна подати як задачу лінійного програмування і розв'язати її за допомогою вбудовано пакету **simplex**. Продемонструємо на наступній задачі [1].

Задача. Два нафтопереробні заводи транспортують свою продукцію до двох розподільчих терміналів по мережі трубопроводів, яка включає насосні станції. Напрямки потоків у мережі зображені стрілками у графі. Пропускні здатності трубопроводів в мільйонах барелів в день наведено у графі. Потрібно визначити максимальний потік у заданій мережі [2].



Розв'яжемо задачу в пакеті Maple за допомогою функції **MaxFlow** [3].


```

> restart :
> with(GraphTheory) :
Задаємо матрицю пропускових здатностей
> A := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 90 & 135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65 & 100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 145 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 :
Задаємо орієнтований зважений граф, що відповідає матриці A та будуємо його
> N := Digraph(A, weighted); DrawGraph(N)
N := Graph 1: a directed weighted graph with 9 vertices and 15 arc(s)

```

```

Шукаємо максимальний потік від вершини 1 до вершини 9
> MaxFlow(N, 1, 9);
225, 
$$\begin{bmatrix} 0 & 90 & 135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 100 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 145 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


```

Отримали величину максимального потоку $F = 225$ мільйонів барелів в день та матрицю величин потоків по кожній дузі.

Сформулюємо задачу про визначення максимального потоку у мережі як задачу лінійного програмування та розв'яжемо її у програмі Maple за допомогою пакету **simplex** [3].

```
[> restart;
Підключаємо пакет simplex
> with(simplex) :
Задаємо функцію мети  $F$  та систему обмежень -- нерівностей ineq
>  $F := y_1 + y_2$ ; ineq := { $y_1 - y_3 - y_4 = 0$ ,  $y_2 - y_5 - y_6 = 0$ ,  $y_3 + y_5 - y_7 - y_8 = 0$ ,  $y_4 + y_7 - y_9 - y_{10} - y_{11} = 0$ ,  $y_6 + y_8 + y_9 - y_{12} - y_{13} = 0$ ,  $y_{10} + y_{12} - y_{14} = 0$ ,  $y_{11} + y_{13} - y_{15} = 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_1 \leq 90$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $y_2 \leq 135$ ,  $y_3 \geq 0$ ,  $y_3 \leq 50$ ,  $y_4 \geq 0$ ,  $y_4 \leq 40$ ,  $y_5 \geq 0$ ,  $y_5 \leq 40$ ,  $y_6 \geq 0$ ,  $y_6 \leq 95$ ,  $y_7 \geq 0$ ,  $y_7 \leq 100$ ,  $y_8 \geq 0$ ,  $y_8 \leq 75$ ,  $y_9 \geq 0$ ,  $y_9 \leq 65$ ,  $y_{10} \geq 0$ ,  $y_{10} \leq 100$ ,  $y_{11} \geq 0$ ,  $y_{11} \leq 50$ ,  $y_{12} \geq 0$ ,  $y_{12} \leq 45$ ,  $y_{13} \geq 0$ ,  $y_{13} \leq 60$ ,  $y_{14} \geq 0$ ,  $y_{14} \leq 145$ ,  $y_{15} \geq 0$ ,  $y_{15} \leq 110$ } :
Знаходимо максимум функції  $F$  при заданій системі обмежень -- нерівностей ineq
> maximize( $F$ , ineq)
{ $y_1 = 90$ ,  $y_2 = 135$ ,  $y_3 = 50$ ,  $y_4 = 40$ ,  $y_5 = 40$ ,  $y_6 = 95$ ,  $y_7 = 90$ ,  $y_8 = 0$ ,  $y_9 = 0$ ,  $y_{10} = 100$ ,  $y_{11} = 30$ ,  $y_{12} = 45$ ,  $y_{13} = 50$ ,  $y_{14} = 145$ ,  $y_{15} = 80$ }
Знаходимо максимальне значення функції  $F$ 
> assign(maximize( $F$ , ineq));  $F$ ;
225
```

Розв'язання цієї задачі привело до висновку, що величина максимального потоку становить $F = 225$ мільйонів барелів в день.

Література

1. Махней О.В., Гой Т.П. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 2013. 304 с.
2. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак – Л.: “Магнолія 2006”, 2007. – 200 с.
3. Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Дослідження операцій в транспортних системах: Навчальний посібник / Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. – Л.: ЛДУ БЖД, 2019. – 196 с.

Р. Жидак

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА У МАШИНОБУДІВНИЙ ГАЛУЗІ

Транспортна задача являється однією із задач лінійного програмування. Мета задачі полягає у пошуку найбільш вигідного плану перевезення продукту від постачальників до споживачів з найменшими витратами. Застосування транспортної задачі постійно розширюється та вдосконалюється, адже кількість міст зростає, як і кількість доріг, по яких здійснюються перевезення. Також активно розвиваються різні види інфраструктури, що потребують активного використання транспортної задачі.

Програмний пакет аналітичних обчислень Maple є ефективним інструментом, який дозволяє розв'язувати різноманітні задачі та уникати громіздких обчислень. У цій програмі вбудовано пакет для розв'язання задач лінійного програмування simplex, який базується на симплекс-методі.

Розглянемо транспортну задачу як задачу лінійного програмування у машинобудівній галузі.

Задача. Собівартість виготовлення п'ять видів металовиробів на п'яти заводах машинобудівної галузі задана наступною матрицею (тис. грн. за шт.)

3,0	2,2	2,5	1,8	2,4
2,8	2,0	2,4	1,9	2,2
3,0	2,4	2,0	1,8	2,6
2,5	2,6	2,2	1,7	2,5
2,5	2,2	2,4	1,9	2,5

Обсяги виробництва кожного машинобудівного заводу складають відповідно 110, 130, 105, 140 та 90 шт. металовиробів, а планові кількості для кожного виду металовиробу згідно із замовленнями інших галузей дорівнює відповідно 80, 125, 135, 70 та 165 шт. Знайти варіант виконання планової кількості металовиробів машинобудівними заводами з мінімальною собівартістю їх виробництва [1].

Зауважимо, що в цій задачі сумарна величина обсягів виробництва машинобудівних заводів складає 575 шт. металовиробів, яка співпадає із сумарною плановою кількістю металовиробів. Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [2].

```

> restart : with(simplex) :

> a :=  $\begin{bmatrix} 110 \\ 130 \\ 105 \\ 140 \\ 90 \end{bmatrix}$  : b :=  $\begin{bmatrix} 80 \\ 125 \\ 135 \\ 70 \\ 165 \end{bmatrix}$  : p :=  $\begin{bmatrix} 3.0 & 2.2 & 2.5 & 1.8 & 2.4 \\ 2.8 & 2.0 & 2.4 & 1.9 & 2.2 \\ 3.0 & 2.4 & 2.0 & 1.8 & 2.6 \\ 2.5 & 2.6 & 2.2 & 1.7 & 2.5 \\ 2.5 & 2.2 & 2.4 & 1.9 & 2.5 \end{bmatrix}$  : x :=  $\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} \end{bmatrix}$  :

>  $\sum_{i=1}^5 'a_i' = \sum_{j=1}^5 'b_j'$  :

> F :=  $\sum_{i=1}^5 \left( \sum_{j=1}^5 "p"[i,j] \cdot "x"[i,j] \right)$  :

> obmez :=  $\left( \left\{ \sum_{i=1}^5 'x'[i,1] = b[1], \sum_{i=1}^5 'x'[i,2] = b[2], \sum_{i=1}^5 'x'[i,3] = b[3], \sum_{i=1}^5 'x'[i,4] = b[4], \sum_{i=1}^5 'x'[i,5] = b[5], \sum_{j=1}^5 'x'[1,j] = a[1], \sum_{j=1}^5 'x'[2,j] = a[2], \sum_{j=1}^5 'x'[3,j] = a[3], \sum_{j=1}^5 'x'[4,j] = a[4], \sum_{j=1}^5 'x'[5,j] = a[5] \right\} \right)$  :

> minimize(F, obmez, NONNEGATIVE) :

> assign(minimize(F, obmez, NONNEGATIVE)); 'x' = x; 'F' = F;


$$x = \begin{bmatrix} 0 & 75 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 0 & 105 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 30 & 70 & 0 \\ 40 & 50 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


F = 1240.0

```

Розв'язання цієї задачі привело до висновку, що мінімальна собівартість виробництва металовиробів на п'яти машинобудівних заводах становить 1240 млн. грн. При цьому план виконання кількості металовиробів машинобудівними заводами з мінімальною собівартістю їх виробництва буде таким: 1-ий завод виготовляє 75 шт. виробів другого виду та 35 шт. виробів п'ятого виду; 2-ий завод – 130 шт. виробів п'ятого виду; 3-ий завод – 105 шт. виробів третього виду; 4-ий завод виготовляє 40 шт. виробів першого виду, 30 шт. виробів третього виду та 70 шт. виробів четвертого виду; 5-ий завод виготовляє 40 шт. виробів першого виду та 50 шт. виробів другого виду.

Література

1. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. (2007) Збірник задач з математичного програмування: Навчальний посібник. Львів. "Магнолія 2006". 212 с.
2. Махней О.В., Гой Т.П. (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.

А. Жмуркевич

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ У БУДІВНИЦТВІ

Математичне програмування сформувалось на початку 40-х років ХХ століття. У 1939 році відомим математиком Л. В. Канторович було започатковано новий розділ прикладної математики, який пізніше отримав назву «лінійне програмування». За останні роки розроблено багато ефективних методів розв'язання математичних задач оптимізації з використанням різного програмного забезпечення, зокрема пакету Maple.

Розглянемо задачу цілочисельного програмування. У програмі Maple вбудовано пакет для розв'язання задач цілочисельного лінійного програмування Optimization, який використовує методи оптимізації. Продемонструємо його на задачі.

Задача. Розроблено сім проєктів для будівництва семи виробничих об'єктів та підраховані капітальні вкладення на їх будівництво з урахуванням районних умов та клімату.

В якому районі та за яким проєктом треба будувати нові об'єкти з мінімізацією загальної суми капітальних вкладень, якщо початкові дані по вартості будівництва кожного об'єкта за кожним проєктом приведені у наступній матриці (тис. грн.):

$$100 \cdot \begin{pmatrix} 87 & 89 & 72 & 53 & 80 & 75 & 82 \\ 82 & 85 & 70 & 55 & 82 & 77 & 80 \\ 86 & 86 & 71 & 56 & 77 & 79 & 83 \\ 87 & 89 & 73 & 53 & 78 & 75 & 80 \\ 84 & 87 & 72 & 59 & 80 & 74 & 81 \\ 85 & 88 & 74 & 56 & 79 & 74 & 79 \\ 86 & 86 & 74 & 55 & 82 & 76 & 84 \end{pmatrix}.$$

Використання кожного проєкту будівництва можливе тільки один раз [1].

Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [2, 3].

```
> restart, with(Optimization):

> c := 100 *  $\begin{bmatrix} 87 & 89 & 72 & 53 & 80 & 75 & 82 \\ 82 & 85 & 70 & 55 & 82 & 77 & 80 \\ 86 & 86 & 71 & 56 & 77 & 79 & 83 \\ 87 & 89 & 73 & 53 & 78 & 75 & 80 \\ 84 & 87 & 72 & 59 & 80 & 74 & 81 \\ 85 & 88 & 74 & 56 & 79 & 74 & 79 \\ 86 & 86 & 74 & 55 & 82 & 76 & 84 \end{bmatrix}$  : x :=  $\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} & m_{1,7} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} & m_{2,6} & m_{2,7} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,6} & m_{3,7} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & m_{4,7} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} & m_{5,7} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} & m_{6,7} \\ m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{7,7} \end{bmatrix}$  :
```

```

> F := \sum_{i=1}^7 \left( \sum_{j=1}^7 "c"[i,j] \cdot "x"[i,j] \right) :
> obmez := \left\{ \sum_{i=1}^7 'x'[i,1]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,2]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,3]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,4]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,5]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,6]=1, \sum_{i=1}^7 'x'[i,7]=1 \right.
= 1, \sum_{j=1}^7 'x'[1,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[2,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[3,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[4,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[5,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[6,j]=1, \sum_{j=1}^7 'x'[7,j]=1 \left. \right\}
:
> S := LPSolve(F, obmez, assume = binary);
S := [52300, [m_{1,1}=0, m_{1,2}=0, m_{1,3}=0, m_{1,4}=1, m_{1,5}=0, m_{1,6}=0, m_{1,7}=0, m_{2,1}=1, m_{2,2}=0, m_{2,3}=0, m_{2,4}=0, m_{2,5}=0, m_{2,6}=0, m_{2,7}=0, m_{3,1}=0, m_{3,2}=0, m_{3,3}=1, m_{3,4}=0, m_{3,5}=0, m_{3,6}=0, m_{3,7}=0, m_{4,1}=0, m_{4,2}=0, m_{4,3}=0, m_{4,4}=0, m_{4,5}=1, m_{4,6}=0, m_{4,7}=0, m_{5,1}=0, m_{5,2}=0, m_{5,3}=0, m_{5,4}=0, m_{5,5}=0, m_{5,6}=1, m_{5,7}=0, m_{6,1}=0, m_{6,2}=0, m_{6,3}=0, m_{6,4}=0, m_{6,5}=0, m_{6,6}=0, m_{6,7}=1, m_{7,1}=0, m_{7,2}=1, m_{7,3}=0, m_{7,4}=0, m_{7,5}=0, m_{7,6}=0, m_{7,7}=0]]

```

Отриманий результат у вигляді таблиці

```

> assign(S[2]);
> 'x'='x'; 'F'='F';

```

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F = 52300$

Розв'язання цієї задачі привело до висновку, що мінімальна загальна сума капітальних вкладень становить $F = 52300$ (тис. грн.). При цьому

- у 1-му районі варто будувати нові об'єкти, використовуючи четвертий проєкт,
- у 2-му районі – перший проєкт,
- у 3-му районі – третій проєкт,
- у 4-му районі – п'ятий проєкт,
- у 5-му районі – шостий проєкт,
- у 6-му районі – сьомий проєкт,
- у 7-му районі – другий проєкт.

Література

1. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування: Навчальний посібник / О.В. Бех, Т.А. Городня, А.Ф. Щербак – Л.: “Магнолія 2006”, 2007. – 200 с.
2. Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. Дослідження операцій в транспортних системах: Навчальний посібник / Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О. – Л.: ЛДУ БЖД, 2019. – 196 с.
3. Махней О.В., Гой Т.П. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімік, 2013. 304 с.

Н. Гулковський

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.Ю. Чмир**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки

ГРАФИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ

Кожного дня ми приймаємо десятки рішень, навіть не задумуючись над цим. Як швидше дістатися до роботи? Якою дорогою обійти затор? У якому порядку зайти до друзів, щоб не кружляти містом? Або навіть: з ким спільно виконати проєкт, щоб усе було швидко та зручно? На перший погляд, це просто життєві ситуації. Але всі ці питання об'єднує одна річ – вибір найкращого маршруту або способу дій. Усі ці задачі можна уявити як схему: є точки (міста, зупинки, люди), є зв'язки між ними (дороги, знайомства, переходи), і є потреба знайти найзручніший шлях. Саме для цього можна застосувати поняття граф.

У дискретній математиці граф – це математична структура, яка складається з вершин (або точок) та ребер (ліній, що з'єднують вершини). Граф може бути зваженим, якщо кожному ребру надається числове значення – наприклад, відстань, час або вартість переходу від однієї вершини до іншої. Хоч граф виглядає як проста схема з точками й лініями, він має величезне значення в реальному світі. За допомогою графів можна моделювати й вирішувати різноманітні практичні задачі.

Граф – це структура, яка допомагає зображати об'єкти (точки, які називаються вершинами) та зв'язки між ними (лінії, які називаються ребрами). У більш практичному розумінні граф – це модель, за допомогою якої ми можемо «побачити» взаємозв'язки між речами, які нас оточують. Графи можуть бути простими, як план маршруту між двома будинками, або складними – як схеми інтернету, електромереж чи логістичних систем.

Як графи використовуються в повсякденному житті?

1. У навігаційних системах (Google Maps, Waze) графи допомагають знайти найкоротший або найшвидший маршрут між двома точками.

2. У логістиці графи застосовують для побудови оптимальних маршрутів доставки товарів.

3. У соціальних мережах графи показують зв'язки між користувачами, дозволяючи аналізувати, хто з ким взаємодіє.

4. В комп'ютерних мережах графи допомагають знайти найшвидший шлях для передачі даних.

5. У будівництві та плануванні графи використовують для ефективного розподілу ресурсів і задач.

6. В інформатиці графи лежать в основі багатьох алгоритмів – від пошуку в інтернеті до рекомендацій у YouTube чи Spotify.

Одне з найпоширеніших завдань, яке вирішується за допомогою графів – це пошук найкоротшого шляху між двома вершинами. Це може бути найкоротша дорога між містами, найшвидший маршрут для кур'єра, найменш затратний

зв'язок у комп'ютерній мережі або найменша кількість переходів у грі. Такі задачі вирішуються спеціальними алгоритмами, наприклад, алгоритмом Дейкстри, які використовуються в програмах та застосунках. Але навіть на базовому рівні ми можемо навчитися розуміти структуру графа та бачити, який шлях буде найоптимальнішим.

Графи – це потужний інструмент, який допомагає нам краще розуміти світ і будувати ефективні рішення. Знання графів дає можливість мислити логічно, планувати, порівнювати варіанти та обирати найкращий шлях у різних життєвих ситуаціях. Навіть початкові знання цього поняття дозволяють подивитися на математику з іншого боку – як на практичний інструмент, який застосовується у транспорті, ІТ, бізнесі та навіть у повсякденних діях. Тому вивчення графів – це не лише цікаво, а й корисно для майбутнього.

Література

1. Розен К. Дискретна математика та її застосування. – Видавництво "Міжнародна книга". 2012. – 1072 с.
2. Сорока Н., Манжулова О. Задачі з дискретної математики. – Львів: Видавництво Львівської політехніки. 2005. – 336 с.

СЕКЦІЯ 5. Постаті в математиці

В.О. Кмін¹, О.В. Казимирович²

¹Національний університет водного господарства та природокористування

²Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник **Н.Б. Сокульська**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри інженерної механіки (ОТІВ) НАСВ

ЗАДАЧА ПРОГНОЗУ СПРАВНОГО СТАНУ ПАРКУ ОДНОТИПНИХ БОЙОВИХ МАШИН

Нехай розглядається деяка велика система, що складається із значної кількості N однорідних елементів, кожен з яких може перебувати випадково в одному з n можливих станів: $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Процеси, що мають місце в такій системі, можна вивчати за допомогою теорії дискретних марковських процесів. Для цього потрібно перелічити всі можливі стани системи та для визначення їх ймовірностей скласти систему звичайних диференціальних рівнянь. Проте за умови великої n і N кількості можливих станів системи буде дуже великою (десятки, сотні і навіть тисячі).

Саме тому такі процеси вивчають за допомогою методу динаміки середніх.

Нехай $X_k(t)$ – випадкова величина – чисельність елементів системи, що перебувають у момент часу t у стані $E_k = 1, 2, \dots, n$. Якщо кількість елементів N системи стала, то $X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t) = N$ і $m_k(t) = Np_k(t)$ – її математичні сподівання, $D_k(t) = Np_k(t)(1 - p_k)$ – її дисперсії, $\sigma_k(t) = \sqrt{D_k(t)}$ – середньоквадратичні відхилення.

Через те що за умови великої кількості дослідів біноміальний розподіл практично наближається до нормального, можна знайти імовірність того, що дійсне значення чисельності елементів, що перебувають у стані E_k , лежатиме в деякому інтервалі $(\alpha_k; \beta_k)$,

$$P(\alpha_k < X_k < \beta_k) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\beta_k - m_k}{\sigma_k} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha_k - m_k}{\sigma_k} \right) \right],$$

де m_k – математичне сподівання, σ_k – середньоквадратичне відхилення випадкової величини X_k . Тому з ймовірністю 0,95 виконується нерівність

$$m_k(t) - 2\sigma_k(t) \leq X_k \leq m_k(t) + 2\sigma_k(t),$$

де $k = 1, 2, \dots, n$. Тому замість диференціальних рівнянь для ймовірностей станів можна безпосередньо скласти рівняння для визначення середньої кількості елементів, що перебувають в деякому стані [1].

Найпростішим прикладом може слугувати наступна задача.

У частині експлуатують $N = 120$ однотипних бойових машин, що мають приблизно однаковий технічний стан. Машина виходить з ладу з технічних причин у середньому через два дні і відновлюється екіпажем у середньому за 0,4 доби. Зробити прогноз стану бойових машин, якщо у вихідний момент часу (наприклад, на ранок сьогоднішнього дня) у справному стані було 70% машин.

Отже, маємо $N = 120$, $\bar{t}_{\text{вих}} = 2$; $\bar{t}_g = 0,4$.

Парк бойових машин частини розглядатимемо як систему, елементом якої є окрема бойова машина. Припустимо, що кожна з машин може перебувати в одному з двох станів: E_1 – машина справна; E_2 – машина несправна, відновлюється екіпажем

Інтенсивність потоку виходів з ладу машини $\lambda_{12} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{вих}}} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Інтенсивність потоку відновлень $\lambda_{21} = \frac{1}{\bar{t}_g} = \frac{1}{0,4} = 2,5$.

Рівняння для визначення середньої чисельності бойових машин, що перебувають в деякому стані:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = -0,5m_1 + 2,5m_2; \\ m_1 + m_2 = 120. \end{cases}$$

Початкові умови $t = 0$; $m_1 = 84$ (тобто 70% від 120).

Виключивши з першого рівняння m_2 , отримаємо одне диференціальне рівняння для визначення m_1

$$\frac{dm_1}{dt} + 3m_1 = 300.$$

Розв'язавши його, отримаємо $m_1 = 100 - 16e^{-3t}$.

Останню рівність якраз і використовують для прогнозування стану бойових машин. Від'ємник у виразі для m_1 швидко спадає, наближаючись до нуля. Вже за умови $t = 1$ (через день) він приблизно дорівнює одиниці. Отже, можна вважати, що фактично через 2 дні в середньому в частині будуть справними $m_1 = 100$ і несправними $m_2 = 120 - 100 = 20$ бойових машин.

Знайдемо граничне середньоквадратичне відхилення кількості справних машин.

$$D_1 = 100 \left(1 - \frac{100}{120} \right) = 17; \quad \sigma = \sqrt{17} \approx 4.$$

Звідси відповідно до правила “двох сигм” практично достовірна подія – кількість справних бойових машин становитиме 92...108.

В.П. Дубенков

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Науковий керівник **Н.М. Гродзь**, доктор філософії освітніх, педагогічних наук,
доцент, старший викладач кафедри інженерної механіки

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМНОГО ТАРИФУ В ТОРГОВІЙ ПОЛІТИЦІ США

У міжнародній торгівлі виникають значні дисбаланси між імпортом і експортом. Для їх нейтралізації адміністрація США запропонувала [1] концепцію взаємного тарифу — тарифної ставки, що теоретично врівноважує двосторонній торговий баланс. В основі методології лежить формула:

$$\Delta\tau_i = \frac{x_i - m_i}{\varepsilon * \varphi * m_i}.$$

Рис.1. Формула взаємного тарифу [2]

де: x_i — експорт США до країни, m_i — імпорт США з країни, ε — еластичність попиту на імпорт, φ — коефіцієнт передання тарифу в ціну (пас-тру), $\Delta\tau_i$ — необхідне підвищення тарифу для досягнення нульового торгового балансу.

Формула є типовим прикладом аналізу чутливості, де використовується часткове диференціювання: Зміна тарифу ($\Delta\tau$) впливає на імпортний попит, який реагує зі змінною еластичністю. Лінійна апроксимація використовується для оцінки зменшення імпорту як $\Delta\tau \cdot \varepsilon \cdot \varphi \cdot m_i$. Тобто, модель передбачає, що тарифний вплив лінійно зменшить імпорт, доки він не зрівняється з експортом [2]. Методи та підходи, які застосовано:

- Математичне моделювання реального процесу — на базі агрегованих статистичних даних.
- Економетричне оцінювання параметрів ε і φ з використанням емпіричних досліджень.
- Пропорційне масштабування — дозволяє адаптувати модель до будь-якої країни.
- Аналіз чутливості — вплив зміни параметра на результат.
- Зворотне моделювання: не прогнозування результату за тарифом, а обчислення тарифу за заданим результатом.
- Функціональний підхід: функція еластичності є множителем масштабу впливу, що зв'язує макроекономічні змінні.
- Алгебраїчний підхід: уся формула є результатом розв'язання рівняння, що дорівнює нульовому дефіциту торгівлі.

У центрі формули розрахунку необхідного тарифу для досягнення торгового балансу лежить еластичність попиту на імпорт за ціною — позначена як ε . Її роль — відобразити, наскільки сильно зміниться обсяг імпорту в разі

зміни ціни, яка зростає через введення тарифу. У формулі Трампа [2] є інвертує чутливість імпорту до зміни тарифу. Чим вища еластичність, тим меншого підвищення тарифу достатньо, щоб зменшити імпорт до рівня експорту. І навпаки — при низькій еластичності потрібні вищі тарифи, щоб досягти балансу.

Формула еластичності має наступні представлення: дискретне – для скінченних змін: $E=(\Delta Q/Q)/(\Delta P/P)$; та диференціальне – для малих змін або аналітичних моделей при неперервній залежності та коли відома функція $Q(P)$: $E=(\delta Q/Q)/(\delta P/P)=Q'(P)*P/Q$.

Коефіцієнт ϕ — це показник передання тарифу в роздрібну або імпорتنу ціну [3, с.1], що визначає, наскільки тариф насправді змінює ціну товару для споживача. Це частка тарифу, яка фактично перекладається на кінцеву ціну товару після імпорту [3, с.1], де решта компенсується виробником/посередником. Це має два наслідки: потрібен вищий тариф, щоб зменшити імпорт; виробники/експортери знизять ціни чи шукатимуть інші ринки.

Таким чином, модель "взаємного тарифу" є яскравим прикладом прикладного використання математичних інструментів — похідної, еластичності, економетричного моделювання — для кількісної оцінки політичних рішень у сфері міжнародної торгівлі. Формула узгоджує бажане економічне рішення (досягнення торгового балансу) з поведінкою споживача на ринку, використовуючи аналітичні властивості функції еластичності. Такий підхід демонструє, як абстрактні поняття математики набувають практичного змісту в глобальній політиці, підтверджуючи тезу, що математика — це універсальна мова сучасного світу.

Література

1. Fact Sheet: President Donald J. Trump Declares National Emergency to Increase our Competitive Edge, Protect our Sovereignty, and Strengthen our National and Economic Security. *The White House*. April 2, 2025. URL: <https://www.whitehouse.gov/fact-sheets/2025/04/fact-sheet-president-donald-j-trump-declares-national-emergency-to-increase-our-competitive-edge-protect-our-sovereignty-and-strengthen-our-national-and-economic-security/> (дата звернення: 06.04.2025).
2. Reciprocal Tariff Calculations. Office of the United States Trade Representative. URL: <https://ustr.gov/issue-areas/reciprocal-tariff-calculations> (дата звернення: 06.04.2025).
3. Hayashida, Kohei. Milk Demand Heterogeneity and Cost Pass-through in Japan: A Microdata Approach towards Competition Structure. *Japanese Journal of Agricultural Economics*. March 31, 2020. Vol.22. P 1-17. URL: https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjae/22/0/22_1/article (дата звернення: 06.04.2025).

П. А. Лаба

ВСП"Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування"

Науковий керівник: О.Л. Чопик, викладач математики вищої кваліфікаційної категорії, старший-викладач

МИКОЛА БОГОЛЮБОВ: ЖИТТЯ, ПРИСВЯЧЕНЕ НАУЦІ

Мета роботи - це висвітлення життя, наукової діяльності та спадщини видатного вченого Миколи Миколайовича Боголюбова.

Народження та виховання: Микола Боголюбов народився 21 серпня 1909 року в Нижньому Новгороді. Його батько, Микола Михайлович, був священиком і професором богослів'я, який заохотив сина до вивчення точних наук, зокрема математики. Мати, Ольга Миколаївна, працювала викладачем музики. Батько спочатку навчав майбутнього вченого самостійно. Дитинство провів в Україні, де сформувався як науковець.

Ранній науковий шлях: З раннього віку виявляв інтерес до математики та фізики. У 14 років розпочав наукову роботу під керівництвом академіка Михайла Крилова. Вже в підлітковому віці написав свої перші наукові праці.

Викладацька та адміністративна діяльність:

Викладати М.М. Боголюбов почав у 1936 році в Київському державному університеті.

У 1940 році йому було присвоєно вчене звання професора.

У 27 років керував кафедрою математичної фізики (1936-1941 рр. і 1944-1949 рр.).

У 1945-1948 рр. був призначений деканом механіко-математичного факультету Київського державного університету.

Також працював у Чернівецькому університеті (1940-1949 рр.) та проводив лекції в Львівському університеті промисловості та Київському технологічному університеті харчової промисловості.

Основні напрями наукової діяльності: Микола Боголюбов працював у галузях математичної фізики, статистичної механіки та квантової теорії. Його наукова діяльність постійно об'єднувалася і доповнювалася педагогічною.

Ключові наукові досягнення та внесок:

Спільно зі своїм вчителем Миколою Криловим створив новий напрям у математичній та фізичній науці – нелінійну механіку.

Розробив математичну теорію явища надплинності та явища надпровідності.

Зробив фундаментальні дослідження в нелінійній механіці та динамічних системах.

Розвинув квантову теорію поля та методи розсіювання частинок.

Пояснив механізми виникнення надпровідності.

Створив теорію суперфлюїдності, яка пояснює поведінку надтекучих рідин.

Розробив асимптотичні методи, що використовуються для аналізу складних систем.

Запровадив теорію операторів у функціональному аналізі, що має застосування у квантовій механіці.

Протягом сімдесяти років наукової діяльності написав і опублікував понад 300 наукових праць з математики, математичної фізики, статистичної механіки, квантової теорії поля, фізики елементарних частинок.

Його методи аналізу використовуються у фізиці плазми, гідродинаміці, квантовій теорії поля та теорії конденсованих середовищ.

Науковий потенціал був настільки потужним, що іноземні науковці свого часу вважали ім'я «Боголюбов» збірним псевдонімом декількох вчених.

Спадщина: Внесок Боголюбова сформував основи сучасної теоретичної науки. Він залишив після себе не лише праці, а й наукову школу, ідеї якої живуть і розвиваються дотепер. Микола Боголюбов є світлом для нових поколінь дослідників, прикладом того, як сила розуму змінює світ.

Література

1. Шаров І. Вчені України: 100 видатних імен /І. Шаров. - К: АртЕк, 2006.
2. <https://www.uinp.gov.ua/istorychnyy-kalendar/serpen/21/1909-narodyvsya-akademik-mykola-bogolyubov>
3. <https://gdz4you.com/prezentaciyi/inshi/mykola-mykolajovych-bogolyubov-13426/>
4. [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D0%B1%D0%BE%D0%B2_%D0%9C%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0_%D0%9C%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87_\(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%88%D0%B8%D0%B9\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D0%B1%D0%BE%D0%B2_%D0%9C%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0_%D0%9C%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87_(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%88%D0%B8%D0%B9))

Р.П. Довгань

ВСП"Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування"

Науковий керівник: О.Л. Чопик, викладач математики вищої кваліфікаційної категорії, старший-викладач

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПРИНЦИПИ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Метою роботи є ознайомлення з життєвим шляхом, науковими досягненнями та педагогічною діяльністю Михайла Васильовича Остроградського, щоб підкреслити його значний внесок у світову науку.

Михайло Васильович Остроградський (1801-1862) – видатний український математик. Він народився у селі Пашенна Полтавської губернії. Вже в ранньому віці виявляв значний інтерес до математичних обчислень і був надзвичайно допитливим, хоча спочатку мріяв стати військовим.

• Освіта та формування як вченого:

Початкову освіту здобув у пансіоні при Полтавській губернській гімназії, де його математичні здібності помітив Іван Петрович Котляревський.

У 1817 році вступив на фізико-математичний факультет Харківського університету, де захопився точними науками завдяки Андрію Федоровичу Павловському.

Шість років (1822-1828) здобував освіту в Парижі у Королівському коледжі, де слухав лекції світових світил, таких як Андре Ампер, Огюстен Коші, П'єр Лаплас, Сімеон Пуассон та Жан Фур'є. Він також відвідував курси в Паризькому університеті та засідання Французької академії наук. У 1828 році повернувся до Санкт-Петербурга вже сформованим вченим.

• Основні наукові дослідження та внесок:

Понад 40 праць у галузях математичного аналізу, математичної фізики та теоретичної механіки, більшість з яких написані французькою мовою.

Теорема Остроградського-Гауса: Виведена у 1826 році, опублікована у 1831 році. Це фундаментальний закон у векторному аналізі, що використовується для розрахунку електростатичних полів. Вона має важливе значення для інженерії, комп'ютерного моделювання, фізики (електродинаміка, термодинаміка, гідродинаміка) та сучасних досліджень складних фізичних систем.

У математичному аналізі він узагальнив інтегрування, розробив нові методи обчислення невизначених інтегралів, а його підхід до розв'язання диференціальних рівнянь став основою для подальших досліджень. Він також розвинув методи оцінки та розв'язання нелінійних рівнянь.

У механіці вивчав закони руху та динаміку систем, вплинувши на подальший розвиток механіки та заклавши основи для багатьох інженерних рішень.

• **Педагогічна діяльність:**

Був автором "Підручника з елементарної геометрії", за яким навчалися у гімназіях до початку XX століття.

З 1828 року був ад'юнктом прикладної математики Петербурзької Академії наук, пізніше екстраординарним та дійсним академіком.

Викладав у Морському кадетському корпусі, Інституті інженерів шляхів сполучення, Головному педагогічному інституті.

Протягом майже 15 років працював наглядцем за викладанням математики при штабі головного начальника військових навчальних закладів.

Радив у навчальному процесі збуджувати інтерес, розвивати самостійне мислення, застосовувати практичні роботи та робити навчання реальним і близьким до життя.

• **Визнання та спадщина:**

Похований у рідному селі Пашенівка згідно із заповітом.

У 2001 році за рішенням ЮНЕСКО занесений до списку видатних математиків світу.

На його честь Національний банк України випустив ювілейну монету (2001).

Іменем Михайла Остроградського названі Полтавський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти (1998), Кременчуцький національний університет (2007), вулиця у Полтаві (1951) та Хорішківська загальноосвітня школа (1983).

Його роботи застосовуються у фізиці, механіці, інженерії та математичному аналізі, допомагаючи вирішувати складні задачі.

Література

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D0%BE_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87
2. <https://slovopys.kubg.edu.ua/henialnyi-ukrainskyi-matematyk-mykhailo-ostrohradskyi-i-ioho-neotsinennyi-vklad-u-rozvytok-svitovoi-nauky/>
3. <https://naurok.com.ua/konferenciya-mihaylo-ostrogradskiy-geniy-viznaniy-za-zhittya-252773.html>
4. <http://oldconf.neasmo.org.ua/node/1478>

В.В. Химич

ВСП"Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування"

Науковий керівник: О.Л. Чопик, викладач математики вищої кваліфікаційної категорії, старший-викладач

ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ТРАКТАТІВ ДО ПАКУВАННЯ СФЕР: МАТЕМАТИЧНІ ДОСЯГНЕННЯ ГІПАТІЇ ОЛЕКСАНДРІЙСЬКОЇ ТА МАРИНИ В'ЯЗОВСЬКОЇ

Метою роботи було дослідити та відзначити внесок жінок у математичну науку крізь призму життєвих шляхів та наукових досягнень Марини В'язовської та Гіпатії Олександрійської, які, попри те, що їх розділяють понад півтори тисячі років, є символами інтелектуальної відваги, наукової допитливості та новаторства.

Гіпатія Олександрійська була видатним античним науковцем, філософом, математиком та астрономом, яка жила в Александрії у IV-V століттях. Вона відома як остання велика представниця Олександрійської бібліотеки та неоплатонізму

Народилася близько 350-370 років у сім'ї математика Теона Олександрійського, який був останнім керівником Олександрійської бібліотеки. Здобула блискучу освіту під керівництвом батька та інших викладачів школи.

Займалася обчисленням астрономічних таблиць.

Написала коментарі до творів Аполлонія (про конічні перерізи) та Діофанта (з арифметики).

Була вбита розлюченим натовпом християн у 415 році. Її вбивство часто пов'язують з ім'ям патріарха Кирила Олександрійського.

Вбивство Гіпатії часто розглядається як символ кінця античної науки та інтелектуального життя Александрії

Хоча вона була жінкою, Гіпатія займала високе становище у науковому та громадському житті Александрії.

Важливі фрази Гіпатії є актуальні і сьогодні

- Захистіть своє право мислити, тому що навіть помилкове мислення краще, ніж не думати.
- Розуміння речей, які нас оточують, - це найкраща підготовка для розуміння речей, які лежать за межами
- Життя - це зростання, і чим більше ми подорожуємо, тим більше істини ми можемо зрозуміти
- Той, хто впливає на мислення свого часу, впливає на всі моменти, які сліднують за ним. Залишіть свою думку на вічність

Гіпатія Олександрійська є яскравим прикладом жінки, яка досягла значних успіхів у науці та філософії в епоху, коли це було незвично для жінок. Її життя

та смерть продовжують надихати та викликати інтерес до її внеску в науку та історію.

Марина В'язовська – це сучасна українська математикиня, народилася 2 грудня 1984 року у Києві. Її праця справила значний вплив на одну з найдавніших і найскладніших задач у математиці.

У 2001-2006 роках навчалася на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, де здобула бакалаврський.

У 2006-2009 навчалася в аспірантурі і 11 травня 2010 року захистила кандидатську дисертацію за темою «Нерівності для поліномів і раціональних функцій та квадратурні формули на сфері»

У 2013 році В'язовська здобула ступінь доктора природничих наук у Боннському університеті. Її докторська дисертація під назвою «Модулярні функції та особливі цикли» («Modular Functions and Special Cycles») була пов'язана з аналітичною теорією чисел. Її науковими керівниками були Дон Цагір та Вернер Мюллер.

У 2016 році Марина В'язовська розв'язала так звану задачу про найщільніше пакування куль. Ця задача була вперше поставлена Йоганном Кеплером, який почув її від математика Волтера Релі. Релі цікавило, як дізнатися, скільки ядер поміститься в трюмі корабля, не рахуючи їх, і як розмістити найбільшу їх кількість.

Протягом 405 років нікому не вдавалося розв'язати цю задачу для просторів з більш ніж трьома вимірами. Марина В'язовська здійснила цей прорив, вирішивши її одразу для восьмивимірного та двадцятичотирьохвимірного просторів.

Обидва рішення В'язовської вразили своєю красою та неймовірною лаконічністю. Для порівняння: стаття з рішенням для восьмивимірного простору складала 22 сторінки, а для двадцятичотирьохвимірного – лише 12 сторінок. Це значно відрізняється від 300 сторінок, які знадобилися для доведення рішення у тривимірному просторі.

Марина В'язовська - друга жінка в історії, яка отримала медаль Філдса, відзнаку, яка неофіційно відома як "Нобелівська премія з математики"

Таким чином, робота Марини В'язовської є яскравим прикладом виняткового інтелекту та інноваційного підходу, що дало змогу розв'язати багаторічну математичну загадку, демонструючи при цьому елегантність та красу математичних доведень. "Математика - це мистецтво думати повільно. Розв'язувати задачу - це як писати бестселер. До кінця не знаєш, вийде в тебе чи ні.", - каже Марина В'язовська.

Література

1. <https://naurok.com.ua/marina-v-yazovska-geniy-suchasno-matematiki-shlyah-ukra-nsko-naukovici-do-svitovogo-viznannya-475938.html>
2. <https://vseosvita.ua/library/prezentacia-zinki-matematiki-marina-vazovska-438099.html>
3. <https://phm.cuspu.edu.ua/nauka/naukovo-populiarni-publikatsii/2967-v-iazovska-maryna-serhiivna-ukrainskyi-matematyk-iaka-perevernula-svitohliad.html>

Н.Т. Дідух

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки

СТЕФАН БАНАХ – ГЕНІЙ МАТЕМАТИКИ

Стефан Банах (1892–1945) — видатний український математик, чий внесок у розвиток математики, зокрема функціонального аналізу, є неоціненним. Він є одним із засновників сучасної теорії функціональних просторів, яка кардинально змінила підхід до математичного аналізу. Його роботи в галузі теорії нормованих просторів та лінійних операторів стали основою для багатьох математичних напрямків, які досліджуються і застосовуються до сьогодні.

Ранні роки та становлення вченого. Стефан Банах народився в 1892 році в місті Краків, проте дитинство і більшу частину свого наукового життя він провів у Львові. Як і багато інших видатних математиків, він почав своє навчання в університеті, де його зацікавлення математикою поступово переросло у професійну кар'єру. Свої перші наукові досягнення Банах зробив у 1920-ті роки, коли ще не мав формальної наукової освіти, що підкреслює важливість природної інтуїції та розуміння для розвитку математики. У Львівському університеті, де він працював більшу частину свого життя, зібралася група талановитих математиків, яка сформувала Львівську математичну школу. Банах був її важливою постаттю, а його лекції та роботи стали орієнтиром для цілої генерації науковців.

Основні наукові досягнення Степана Банаха. Степан Банах зробив численні внески в різні галузі математики, але його найважливішим досягненням є розробка теорії функціональних просторів, зокрема так званих «Банахових просторів». Це поняття стало основою для численних математичних досліджень та практичних застосувань у чисельному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, а також в фізиці та інформатиці.

Теорія Банахових просторів. Банахів простір — це неперервний векторний простір з нормою, що є важливим для теорії функцій і лінійних операторів. Теорія, започаткована Банахом, дозволила розв'язувати багато задач, пов'язаних з існуванням розв'язків лінійних рівнянь, а також стала основою для подальших досліджень у функціональному аналізі.

Банахова теорема про фіксовану точку. Ця теорема стверджує, що для неперервного оператора на замкнутому компактному просторі завжди існує єдина фіксована точка. Цей результат мав величезне значення для подальших математичних досліджень і знайшов застосування в багатьох галузях, зокрема в економіці та комп'ютерних науках.

Лінійні оператори та їх застосування. Банах значну увагу приділяв лінійним операторам на просторах функцій. Його роботи в цій галузі стали основою для розвитку теорії операторів, що є важливим напрямком у сучасному функціональному аналізі.

Львівська математична школа. Стефан Банах став одним із засновників так званої Львівської математичної школи, яка мала великий вплив на математичну науку в Україні та Європі в 1920–1940 роках. Разом з іншими видатними математиками, такими як Юрій Ліфшиц, Казимеж Курятник, і багато інших, Банах створював атмосферу інтенсивної наукової співпраці. У Львові активно обговорювалися нові ідеї, проводилися семінари та конференції, які стали платформами для формування нових напрямків у математиці.

Вплив на світову науку. Незважаючи на те, що Банах не мав широкої міжнародної репутації в свій час, після його смерті, роботи стали основою для багатьох важливих напрямків в математиці та інших науках. Його роботи стали важливими для розвитку теорії лінійних просторів і операторів, а також чисельних методів розв'язання задач. Важливими є також його внески у математичну фізику та інформатику.

Філософія математики Степана Банаха. Банах був не лише математиком, але й глибоким філософом. Він вважав математику не лише практичним інструментом для вирішення проблем, а й важливим аспектом світогляду, здатним формувати культуру і науку. Відомо, що він часто підкреслював важливість абстрактних математичних понять, таких як простори та оператори, для розвитку інших наук, таких як фізика та економіка.

Стефан Банах залишив глибокий слід в історії математики, не тільки завдяки своїм конкретним науковим досягненням, але й завдяки створенню цілої математичної школи. Його вплив на математичну науку та її розвиток неможливо переоцінити, і його праці продовжують надихати нові покоління вчених по всьому світу.

Література

1. "Стефан Банах" ЛНУ імені Івана Франка
2. "Стефан Банах" [Львівський центр міста.](#)

А.О. Тудор

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки

МАРІЯ ГАЕТАНА АНЬЄЗІ

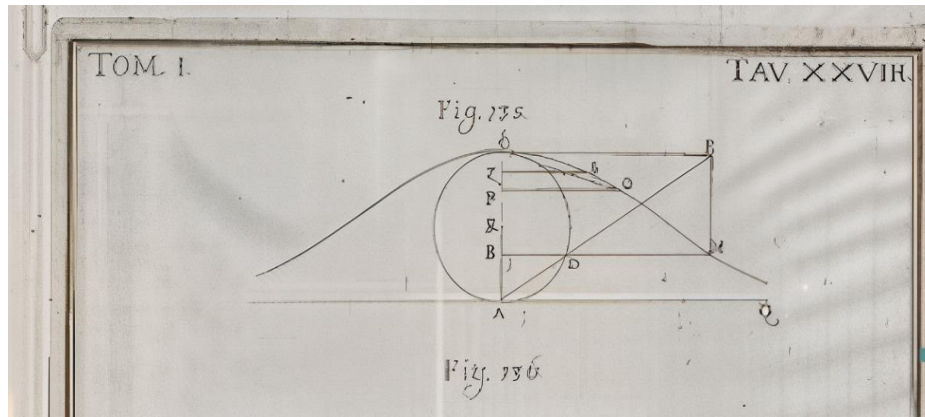
Марія Гаєтана Аньєзі (16 травня 1718 – 9 січня 1799) – італійська вчена, математик, та філософ. Вона була першою жінкою, яка написала підручник із математики, і першою жінкою, призначеною професором математики в університеті.

Марія народилася в Мілані, в заможній купецькій родині, яка налічувала 21 дитину, і була старшою з них. Її батько, професор математики, з раннього дитинства підтримував математичні здібності доньки та забезпечував їй ґрунтовну освіту. Вже з 5 років вона розмовляла італійською та французькою мовами а з одинадцяти володіла грецькою, іспанською, німецькою, латинською та івритом. В 14 років вона вивчала геометрію та балістику, а коли Марії виповнилося 15 років, її батько став регулярно запрошувати її в гості до найбільш освічених людей Болоньї, яким вона читала свої тексти та дискутувала про нюанси найважчих для розуміння філософських питань. Існують навіть записи цих розмов, які її батько опублікував у 1738 році, в книгах *Lettres sur l'Italie* та *Propositiones Philosophicae* після її фінального виступу, де вона захистила 190 тезисів.

Батько Марії пообіцяв їй, що вона зможе займатися благодійністю скільки завгодно, якщо продовжуватиме вивчати математику. На жаль, через свої обов'язки вона не змогла вступити до монастиря, що було її метою, оскільки вона стала дуже релігійною. Першу свою роботу «Філософські міркування» Марія опублікувала уже в 20-річному віці.

У 1748 році, всього в 30 років Аньєзі завершила свою найважливішу математичну працю: *Instituzioni analitiche ad uso della giovent italiana* («Аналітичні структури для італійської молоді») - підручник з математичного аналізу, в якому «глибоко висвітлила основи вищої математики» (Дірк Стройк): теорію алгебраїчних рівнянь, плоску аналітичну геометрію, диференціальне й інтегральне числення, теорію диференціальних рівнянь. У знак визнання її заслуг папа римський Бенедикт XVI надав їй гідність професора Болонського університету, де вона, маючи яскраві здібності і ерудицію, ставши першою у світі жінкою-професором математики, понад два роки очолювала кафедру, хоч лекцій і не читала. В *Instituzioni analitiche* серед іншого, обговорювалась крива, яка раніше вивчалася П'єром Ферма та Гвідо Гранді. Проте саме Аньєзі дослідила її детально й ввела в математичний обіг. Назва кривої є хибним перекладом італійського *versiera* - терміна, вигаданого математиком Гвідо Гранді на підставі слова латиною, що означало «крива, що повертає». Перекладач Джон Колсон переплутав його зі словом «avversiera», що означає «відьма». Після перекладів та публікацій «Основ аналізу» крива стала відома як «Відьма Аньєзі».

Локон Аньєзі (також верзієра Аньєзі, кубіка Аньєзі)— плоска алгебраїчна раціональна крива третього порядку, що визначається двома діаметрально протилежними точками кола. Симетрична крива з вершиною посередині, яка поступово спадає з обох боків і ніколи не торкається осі x (рис.1).



(рис.1)

Дано півколо ACD з діаметром AC . Потрібно знайти поза ним точку M таку, що якщо провести перпендикуляр BM до діаметру AC , який перетне півколо в точці D , матиме місце співвідношення: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}$. Оскільки таких точок нескінченно багато, потрібно описати криву, яку вони утворюють.

Нехай M - одна з цих точок. Якщо позначити $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, то з співвідношення: $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$, де $AB = x$, $BC = a - x$, отримаємо $BD = \sqrt{x(a-x)}$

звідки, враховуючи подібність трикутників отримаємо: $\frac{MD}{BD} = \frac{a-x}{x}$

Маємо: $y = \frac{a}{x} \sqrt{x(a-x)}$.

Якщо, як звичайно, позначити літерою x абсцису, а літерою y ординату, то це рівняння запишеться у звичному для нас вигляді як $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$,

де a - деяка стала (число), яке впливає на форму кривої.

Марія Гаєтана Аньєзі залишила глибокий слід у науці та культурі. На її честь названо астероїд 16765 Agnesi та кратер на Венері. У Мілані є вулиця та навчальні заклади, які носять її ім'я, що свідчить про тривалий вплив її діяльності на наукове та культурне життя Італії.

Література

1. Agnesi, M. G. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*.
2. VII Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». (2018, 28–29 грудня). Тези доповідей (м. Київ).
3. Associazione Astrofili Segusini. (2018, 16 травня). N. 1318 - 16 Maggio 2018 Maria Gaetana Agnesi. <https://www.astrofilisegusini.it>
4. Unlu, E. (1995). María Gaetana Agnesi. Agnes Scott College. <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/agnesi.htm>

Д.О. Онучак

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

МАРИНА В'ЯЗОВСЬКА – ВИДАТНА УКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИКИНЯ

Марина В'язовська — видатна українська математикиня, яка здобула світове визнання завдяки своїм дослідженням у галузі теорії чисел та геометрії. Вона народилася 2 грудня 1984 року в Києві. З раннього дитинства Марина виявляла інтерес до математики, що згодом визначило її професійний шлях.

Марина навчалася в Київському природничо-науковому ліцеї № 145, де брала активну участь у математичних олімпіадах. Після закінчення ліцею вступила на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Під час навчання вона щороку займала призові місця на Міжнародній студентській олімпіаді з математики у 2002–2005 роках, здобувши перший приз у 2002 та 2005 роках. Після здобуття ступеня бакалавра Марина продовжила освіту в Німеччині, де у 2007 році отримала ступінь магістра в Технічному університеті Кайзерслаутерна. У 2010 році вона захистила кандидатську дисертацію в Інституті математики НАН України на тему «Нерівності для поліномів і раціональних функцій та квадратурні формули на сфері». У 2013 році Марина здобула ступінь доктора природничих наук у Боннському університеті, захистивши дисертацію «Модулярні функції та особливі цикли» під керівництвом Дона Цагіра. Після завершення докторантури вона працювала постдокторським дослідником у Берлінській математичній школі та Гумбольдтському університеті Берліна. У 2017 році Марина приєдналася до Федеральної політехнічної школи Лозанни (EPFL) у Швейцарії, де спочатку обіймала посаду доцента, а вже за рік стала професором.

У 2016 році Марина В'язовська зробила прорив у математиці, розв'язавши задачу пакування куль у 8-вимірному просторі. Ця задача, відома як гіпотеза Кеплера, залишалася нерозв'язаною протягом понад 400 років. Раніше її вдалося вирішити лише для тривимірного простору, і це потребувало значних зусиль та обчислень. Марина ж запропонувала елегантне та відносно просте рішення для 8-вимірного випадку, яке зайняло лише 23 сторінки. Це досягнення принесло їй міжнародне визнання та низку престижних нагород.

У 2022 році Марина В'язовська стала другою жінкою в історії, яка отримала медаль Філдса — найпрестижнішу нагороду в галузі математики, яку часто називають «Нобелівською премією з математики». Цю нагороду вручають кожні чотири роки математикам віком до 40 років за видатні досягнення. Марина отримала медаль Філдса за роботу над задачею пакування сфер у 8- та 24-вимірних просторах.

Станом на 2025 рік Марина В'язовська продовжує працювати професором у Федеральній політехнічній школі Лозанни (EPFL). Вона активно займається науковою діяльністю, досліджуючи нові аспекти теорії чисел та геометрії. Окрім наукової роботи, Марина бере участь у міжнародних конференціях, читає лекції та займається популяризацією математики серед молоді. Її досягнення надихають нове покоління математиків та демонструють важливість

наполегливості, творчого підходу та глибокого розуміння фундаментальних питань науки.

Цікаві факти про Марину В'язовську:

1. Любить музику. В одному з інтерв'ю вона зізналася, що любить слухати класичну музику під час роботи. Це допомагає їй зосереджуватися та знаходити натхнення для математичних досліджень.

2. Могла обрати інший шлях. У школі вона захоплювалася не тільки математикою, а й літературою, історією та мовами. Проте математика перемогла завдяки її любові до розв'язування задач і логічних викликів.

3. Живе та працює у Швейцарії, але не забуває про Україну. Вона підтримує українських науковців, бере участь у благодійних ініціативах і закликає світову наукову спільноту допомагати Україні.

Ці факти показують її не лише як геніального математика, а й як людину з широкими інтересами та активною громадянською позицією.

Марина В'язовська є яскравим прикладом того, як талант, праця та відданість справі можуть привести до видатних досягнень на світовому рівні. Її внесок у математику не лише розширює горизонти науки, але й підкреслює важливість підтримки та розвитку талановитих дослідників у всьому світі.

Література

1. В'язовська Марина Сергіївна. *uk.wikipedia-on-ipfs.org*. https://uk.wikipedia-on-ipfs.org/wiki/В'язовська_Марина_Сергіївна
2. BBC News Україна. (н.д.). *Українка Марина Вязовська — друга жінка, яка отримала найпрестижнішу математичну нагороду*. <https://www.bbc.com/ukrainian/news-62102169>
3. BBC News Україна. (н.д.). *Марина Вязовська. За що українка отримала медаль Філдса і як до цього йшла*. <https://www.bbc.com/ukrainian/news-62040701>
4. Українки. (н.д.). *Марина В'язовська — українка, яка отримала «Нобелівку» з математики*. <https://ukrainky.com.ua/maryna-vyazovska>

В.А. Рубан

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

ДІЯЛЬНІСТЬ ТА МАТЕМАТИЧНИЙ ВКЛАД МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Михайло Остроградський народився 24 вересня 1801 року (6 жовтня за новим стилем) у селі Пашенівка (нині село Пашенівка, Полтавська область, Україна), в родині дрібного дворянина. Його родина належала до старовинного українського козацько-дворянського роду. З дитинства проявляв неабиякий інтерес до математики, природничих наук і літератури. Його рання освіта проходила в домашніх умовах.

Освіта. Михайло народився в інтелігентній дворянській родині, тож отримав хорошу домашню підготовку. З дитинства виявляв великі здібності до арифметики, латинської мови та літератури. Батьки заохочували його навчання, особливо прагнучи дати йому класичну освіту. У підлітковому віці вступив до Полтавської гімназії, яка була однією з кращих освітніх установ того часу на Лівобережній Україні. Вчився блискуче, особливо цікавився математикою та фізикою. Вчителі швидко помітили його надзвичайні здібності до точних наук.

У 1816 (у віці 15 років) році вступив до Харківського університету, який тоді був одним із провідних освітніх центрів в Україні. Спочатку навчався на фізико-математичному факультеті, де студенти здобували знання з алгебри, геометрії, астрономії, механіки, аналітичної математики та філософії. Його особливо захоплювали курси з математичного аналізу, а також викладання механіки. Уже в студентські роки почав писати наукові роботи — деякі з них навіть були високо оцінені професорами. У 1820 році він закінчив Харківський університет із відзнакою.

З 1822 по 1826 роки навчався в Парижі. Цей етап був найважливішим у формуванні Остроградського як ученого світового рівня.

У 1822 році Михайло вирушив до Парижа, щоб продовжити навчання в Європі, яка тоді вважалася центром наукової думки. Хоча формально він не вступив до жодного з паризьких університетів, він слухав лекції у найвідоміших науковців Франції:

- Жозеф Фур'є (розробник теорії рядів Фур'є)
- Симеон Пуассон (знавець механіки та електростатики)
- Жозеф Ліувіль (видатний математик-аналітик)

Саме під впливом цих науковців він почав працювати над теорією інтегралів, варіаційним численням та гідродинамікою.

У Парижі він не просто навчався — він став частиною наукового середовища Франції, а його роботи здобули визнання.

У коло його інтересів входили і основні питання механіки, і теорія чисел, і балістика, і алгебра, і небесна механіка, і математичний аналіз, і математична

фізика. Михайло Остроградський написав понад 40 праць із математичного аналізу (нескінченно-малих, інтегрування раціональних функцій), математичної фізики, теоретичної механіки (принцип можливих переміщень, варіаційні принципи механіки, теорія удару, теорія пружності, поширення хвиль на поверхні рідини тощо). Остроградський також відкрив метод інтегрування раціональних функцій (метод Остроградського) і встановив формулу перетворення інтеграла по об'єму в інтеграл по поверхні, названу його ім'ям (формула Остроградського). Світ знає його ще й по формулах, які він відкрив: формула Ліувілля-Остроградського та Остроградського – Гаусса.

Література

1. Енциклопедія сучасної України (esu.com.ua) — Академічна стаття про М. В. Остроградського з науково обґрунтованими фактами.
2. Wikipedia українською (uk.wikipedia.org) — Загальна біографічна інформація, перевірена з інших джерел.
3. Wikipedia англійською (en.wikipedia.org) Більше даних про його наукову діяльність та вплив у світі.
4. Інститут математики НАН України (imath.kiev.ua) — Інформація про вшанування пам'яті Остроградського та наукові публікації.
5. osvita.ua — Освітній портал з біографіями видатних українських діячів для учнів і студентів.
6. Національна бібліотека України ім. В. І. Вернадського (nbuv.gov.ua) — Архіви наукових праць Остроградського та історичні матеріали.

О.П. Гавриленко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки

ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ МАКСИМАЛІЗАЦІЇ ПРИБУТКУ

У сучасному динамічному бізнес-середовищі, де конкуренція посилюється щодня, ефективно ухвалення рішень вимагає точного аналізу й глибокого розуміння економічних закономірностей. Саме тут на допомогу приходить математика — мова, якою описується складний світ чисел, ринків, витрат і прибутків. Одним із ключових інструментів такого аналізу є **похідна** — поняття, яке виходить далеко за межі підручника з математики та впевнено входить у сферу економіки, фінансів, маркетингу й управління.

Від математики — до виробництва

Похідна — це не просто математичне поняття. У прикладному сенсі вона дозволяє виявити, як змінюється певна величина — наприклад, дохід чи витрати — залежно від обсягу виробництва, рівня цін чи попиту. У контексті економіки вона допомагає відповісти на запитання: *у який момент дохід зростає найшвидше? коли прибуток досягає максимуму? скільки товару варто виробляти, щоб не перевитратити ресурси?*

Розгляньмо типову задачу: як знайти **оптимальний рівень виробництва**, за якого прибуток компанії буде найбільшим?

Нехай:

Q — кількість виробленої продукції;

$R(Q)$ — функція доходу (вона залежить від обсягу реалізації);

$C(Q)$ — функція витрат на виробництво;

$D(Q) = R(Q) - C(Q)$ — функція прибутку.

Ціль — знайти таке значення Q , при якому функція $D(Q)$ досягає максимуму.

Логіка економічного максимуму

Математичний аналіз вказує: функція досягає максимуму у точці, де її похідна дорівнює нулю, а знак похідної змінюється з плюса на мінус. Тобто в точці екстремуму темп зростання прибутку переходить у спад. При застосуванні до прибуткової функції, це означає, що **граничний дохід** (приріст доходу на одиницю додаткового товару) дорівнює **граничним витратам** (додаткові витрати на виробництво ще одного товару). Цей висновок є фундаментальним у мікроекономічній теорії — саме за цієї умови прибуток максимізується.

Практичний приклад

Уявімо, що певна фірма виробляє товар, для якого функція повних витрат залежить від кількості продукції. Припустимо, що попит на цей товар також піддається математичному опису. Тоді функція прибутку виглядатиме як різниця між загальним доходом (ціна помножена на кількість) і витратами.

Після знаходження похідної від цієї функції та порівняння її до нуля, ми отримуємо оптимальний обсяг виробництва. Наприклад, нехай розрахунки показують, що при випуску 18 одиниць товару прибуток буде максимальним і становитиме 5693,84 умовних одиниці. Це означає, що перевиробництво (скажімо, 25 одиниць) лише зменшить ефективність, а недовиробництво — втратить потенційний прибуток.

Сфери застосування похідної в економіці

Хоча наведений приклад є навчальним, ідея використання похідної активно реалізується в багатьох практичних сферах.

Ціноутворення та маркетинг

У сфері продажу авіаквитків, де ціни змінюються в режимі реального часу, похідна допомагає визначати момент, коли зміна вартості квитка спричинить максимальний прибуток, з урахуванням попиту.

Управління запасами

Бізнес постійно балансує між надлишком і дефіцитом продукції на складі. Оптимізація запасів через аналіз похідних дозволяє уникати втрат від псування товарів чи втрати клієнтів через їх відсутність.

Фінанси й інвестиції

Похідна використовується для аналізу поведінки складних фінансових інструментів. Наприклад, в оцінюванні опціонів, вартості активів, швидкості зміни прибутковості портфеля тощо.

Стратегічне планування

При розрахунку майбутніх стратегій розвитку компаній похідна допомагає змодельовати, як зміна певного параметра — обсягу виробництва, розміру інвестицій, вартості сировини — вплине на загальний результат.

Макроекономіка

Економісти використовують похідні для моделювання темпів зростання ВВП, інфляції, продуктивності праці. Це дозволяє урядам формувати прогнози й адаптувати політику до поточних змін.

Універсальний інструмент конкурентоспроможності

Застосування похідних виходить далеко за межі виробництва. У світі великих даних і цифрових технологій бізнес повинен швидко адаптуватися до змін. Математичні моделі, зокрема ті, що базуються на похідних, дозволяють не просто реагувати, а передбачати. Саме тому аналітики й економісти дедалі частіше звертаються до математичних методів оптимізації, щоб підвищити ефективність управління ресурсами.

У галузі штучного інтелекту, наприклад, обчислення градієнтів (які є по суті похідними) є ключовим елементом навчання нейронних мереж. Тобто похідна вже сьогодні працює у найсучасніших технологіях — від аналізу зображень до автономних транспортних систем.

Підсумки

Похідна — це не лише тема контрольної роботи в школі. Це потужний аналітичний інструмент, який дає змогу підприємствам приймати обґрунтовані економічні рішення. Вона допомагає оптимізувати виробництво, скоротити

витрати, ефективно управляти запасами, гнучко реагувати на зміну попиту та прогнозувати прибуток. Від авіакомпаній до фінансових гігантів — усі, хто прагне діяти на основі точних даних, активно використовують цей математичний механізм.

Уміння працювати з похідною — це не лише інтелектуальна вправа, а й реальний крок до успіху в економіці знань. І чим краще ми володіємо цим інструментом, тим більше маємо шансів будувати конкурентоспроможний, ефективний і прибутковий бізнес.

Література

1. Симон К. Математика для економістів. — К.: Основи, 2002.
2. Stewart J. Calculus. — Cengage Learning, 2015.
3. Chiang A. C., Wainwright K. Фундаментальні методи математичної економіки. — К.Лібра, 2001.
4. Вардієр В.І. Вища математика для економістів. — К.: Центр учбової літератури, 2010

І. Денисевич

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

ГРАДІЄНТ: УНІВЕРСАЛЬНА МОВА ЗМІН

Серед численних математичних понять, які знаходять застосування у найрізноманітніших сферах життя, особливе місце посідає **градієнт**. На перший погляд — це просто вектор, який «вказує шлях», а точніше — напрямок найшвидшого зростання певної функції. Але за цією простою формулою приховано потужний концептуальний інструмент, який пронизує фізику, економіку, біологію, комп'ютерні науки, дизайн і навіть соціологію.

Що таке градієнт і чому він важливий?

Уявімо гірський ландшафт: кожна точка має певну висоту. Якщо ви стоїте на схилі й хочете якнайшвидше піднятися вгору, інтуїтивно ви підете в тому напрямку, де підйом найстрімкіший. Цей напрямок і є градієнтом — він показує, куди потрібно рухатися, щоб функція, яка описує "висоту", зростала найшвидше. Але градієнт — це не лише про гори. У найзагальнішому розумінні це математичний об'єкт, який вказує напрямок найінтенсивнішої зміни якоїсь величини в багатовимірному просторі. Залежно від контексту ця величина може бути температурою, тиском, прибутком, концентрацією, рівнем освітленості або навіть кольором на екрані.

Градiєнт у фізиці: від тепла до гравітації

Фізика — одна з тих наук, де градієнти «живуть» на кожному кроці. Температурні градієнти, наприклад, описують, як змінюється температура у просторі. Це надзвичайно важливо в інженерії: при створенні електроніки чи систем охолодження потрібно знати, в якій частині пристрою температура зростає найшвидше, щоб передбачити потенційні зони перегріву. Подібним чином працює градієнт у гравітаційному або електричному полі. Він визначає напрямок і силу, з якою діє поле на тіло. Уявімо камінь, який котиться вниз по схилу — він «слухає» градієнт гравітаційного потенціалу. Електрон, що рухається в електричному полі, робить те саме, але в іншому масштабі.

В оптимізації та аналізі функцій

Градiєнт — це серце багатьох задач математичного аналізу. Саме він вказує, як змінюється значення функції залежно від координат. У багатьох прикладних задачах — пошуку максимуму чи мінімуму — градієнт підказує, куди рухатись, щоб досягти бажаної точки. Наприклад, якщо ми хочемо знайти найвищу точку на графіку, потрібно рухатись у напрямку градієнта. Якщо ж мета — знайти мінімум, варто йти в протилежному напрямку. Градієнт також використовується для апроксимацій функцій — тобто для побудови простих моделей, які добре описують поведінку складної системи поблизу певної точки.

Градiєнт у машинному навчанні

У світі штучного інтелекту градієнт виконує роль навігатора. Кожного разу, коли нейронна мережа навчається, вона намагається мінімізувати так звану функцію втрат — числовий показник того, наскільки її передбачення відрізняються від реальних даних. Градієнт цієї функції показує, як змінити параметри мережі, щоб зменшити похибку. Цей процес отримав назву *градієнтний спуск*. Це метод, завдяки якому штучні інтелекти навчаються розпізнавати обличчя, розуміти мову, водити автомобілі й навіть писати музику. Без градієнта сучасний прогрес у сфері AI був би неможливим.

Градiєнт у біології та хімії: життя йде за змінами

У біологічних системах градієнти є рушієм процесів. Наприклад, *концентраційний градієнт* — це різниця в концентрації речовини між двома ділянками. Саме він лежить в основі явища дифузії: речовини природним чином переміщуються з області високої концентрації в область нижчої. У клітинах організмів ця властивість використовується для транспорту поживних речовин, газів і сигналів. Відомий приклад — *осмос*: вода проходить через напівпроникну мембрану в напрямку вищої концентрації розчиненої речовини. Градієнти тут не просто математичні об'єкти — це умови життя.

В географії та геології

У географії поняття градієнта використовується для опису *схилу місцевості* — тобто того, як змінюється висота на певній ділянці. Це має прикладне значення: від інженерного проектування до передбачення ерозії чи руху води. У геології градієнти використовуються для аналізу розподілу температур у надрах Землі, що допомагає при пошуку корисних копалин або оцінці сейсмічної активності.

У графічному дизайні: мистецтво плавного переходу

У візуальному мистецтві слово «градієнт» означає плавний перехід кольору. Це може бути зміна від світлого до темного, від теплого до холодного тону, від одного відтінку до іншого. Такий ефект додає глибини, об'єму та естетичної привабливості зображенням. Градієнти використовуються у фонах вебсторінок, логотипах, інтерфейсах, ілюстраціях. Існують різні типи: лінійні, радіальні, кутові — кожен з них виконує певну художню функцію. У цифровому мистецтві градієнти стали символом стилю й інструментом вираження.

У соціальних і економічних дослідженнях

Хоча це менш інтуїтивно, градієнти можуть використовуватись і в аналізі соціально-економічних даних. Наприклад, **економічний градієнт** може показувати, як змінюється рівень доходів, зайнятості або нерівності між регіонами чи соціальними групами. Це дозволяє візуалізувати нерівномірність розвитку, виявити зони, які потребують інтервенцій або підтримки.

Практичний приклад: температура в просторі

Розгляньмо уявний приклад. У певному об'ємі простору температура визначається функцією, що залежить від координат. Якщо ми обчислимо градієнт цієї функції, отримаємо вектор, що вказує, куди температура зростає найінтенсивніше. Якщо потрібно знати, у якій точці простору вектор температурного градієнта збігається з заданим напрямком — це дозволяє

спрогнозувати, де буде найбільше охолодження або нагрівання. Такі розрахунки важливі, наприклад, у проєктуванні систем вентиляції чи клімат-контролю.

Висновок

Градiєнт — це не просто математичний вектор. Це універсальний інструмент, що допомагає нам орієнтуватися у світі змін. Він підказує напрямки найшвидшого зростання — температури, тиску, кольору, прибутку чи точності моделі. У фізиці, біології, дизайні, економіці або технологіях — градієнт є тією спільною мовою, яка дозволяє аналізувати, моделювати й оптимізувати. Знати й розуміти градієнти — це володіти ключем до динамічного, багатовимірного світу.

О.І. Бойко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

ГЕОРГІЙ ВОРОНИЙ — ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК

Георгій Вороний народився 28 квітня (10 травня за новим стилем) 1868 року в містечку Журавка (нині Чернігівська область, Україна), в родині священника Феодосія Вороного. Його родина мала глибоке коріння в українській культурі й духовності, що вплинуло на світогляд майбутнього вченого. Освіту він здобував спершу вдома, потім — у гімназії в Прилуках, а згодом вступив до Петербурзького університету, де навчався на фізико-математичному факультеті.

Ще під час навчання у Петербурзі Георгій виявив неабиякий математичний талант. Його перша наукова праця була опублікована, коли йому було лише 20 років. Його викладачем і наставником був відомий математик Андрій Марков, під керівництвом якого Вороний захистив магістерську дисертацію, присвячену алгебраїчним дробам. Захистив докторську дисертацію на тему “Про паралелепіпеди, які утворюються з найкоротших векторів ґраток”, що згодом стала підґрунтям для відкриття діаграм Вороного.

Найвідомішим внеском Георгія Вороного в науку є діаграми Вороного — спосіб поділу простору на області впливу, який базується на відстані до заданих точок. Хоча сам Вороний вивчав ці структури в контексті задач геометрії чисел, зокрема в теорії парціальних функцій та ґраток у багатовимірних просторах, пізніше вони були узагальнені і стали надзвичайно важливими для багатьох прикладних дисциплін.

Діаграми Вороного дозволяють визначити область, ближчу до однієї з множини заданих точок, ніж до будь-якої іншої. Це має практичне застосування в обчислювальній геометрії, моделюванні природних процесів, географічних інформаційних системах (GIS), плануванні міських територій, біології, медицині, розпізнаванні образів тощо.

Окрім цього, Вороний працював над задачами теорії чисел, зокрема над узагальненням алгоритму безперервних дробів на алгебраїчні числа вищого ступеня. Його роботи стосувалися також аналітичної теорії функцій і проблем розміщення сфер в евклідовому просторі. Багато з його результатів були на десятки років попереду свого часу.

Після закінчення університету Вороний залишився на кафедрі як викладач. У 1894 році він почав працювати в Новоросійському університеті в Одесі, а згодом повернувся до Петербурга. У 1899 році Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) — видатний український математик, чия наукова спадщина справила глибокий вплив на розвиток сучасної математики, зокрема в галузі теорії чисел, геометрії чисел і аналітичної геометрії. Його ім'я стало всесвітньо

відомим завдяки так званим діаграмам Вороного, які сьогодні застосовуються в найрізноманітніших сферах — від географії й астрономії до комп'ютерної графіки та штучного інтелекту.

На жаль, життя Георгія Вороного було коротким — він помер у 1908 році у віці лише 40 років. Причиною смерті стала хвороба жовчного міхура, яка на той час майже не піддавалася лікуванню. Проте, попри коротке життя, його внесок у математику важко переоцінити. Частина його рукописів була опублікована вже після його смерті, а деякі залишились неопрацьованими.

У другій половині ХХ століття інтерес до праць Вороного зріс у зв'язку з розвитком обчислювальних методів і комп'ютерної графіки. Його ідеї лягли в основу алгоритмів, які використовуються при створенні тривимірних моделей, симуляцій природних явищ та навіть у створенні карт мобільного зв'язку.

В Україні пам'ять про Георгія Вороного збережено: на його батьківщині в Журавці встановлено пам'ятник, його ім'я носить одна з вулиць у Києві. Також його ім'ям названо математичні конференції та студентські конкурси. У 2018 році в Україні широко відзначили 150-річчя з дня його народження

Георгій Вороний — яскравий приклад українського науковця, чия творчість здобула визнання далеко за межами його батьківщини. Його роботи не втратили актуальності й сьогодні, і досі надихають нові покоління математиків, інженерів та дослідників у різних галузях. Його внесок — це поєднання глибокої теоретичної думки з дивовижною далекоглядністю, що дозволяє його ідеям жити й розвиватися в науковому світі ХХІ століття.

Література

1. Яценко Т. М. Георгій Вороний — видатний український математик // Математика в школах України. — 2018. — №5. — С. 2–6.
2. НАН України. До 150-річчя Георгія Вороного // Сайт Національної академії наук України — <https://www.nas.gov.ua/>
3. Білоусова Л. М. Вороний Георгій Феодосійович — математик світового рівня // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. — 2018. — №151. — С. 102–106.

М.М. Прийма

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

МИРОН ЗАРИЦЬКИЙ – ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ НАУКОВЕЦЬ ТА ОСВІТЯНИН

Мирон Зарицький — видатна постать в історії української науки першої половини ХХ століття. Він був не лише талановитим математиком, а й пристрасним педагогом, перекладачем, активним учасником українського національного руху. Його життєвий шлях — приклад відданості науці, освіті та ідеї національного самоствердження.

Народився 21 травня 1889 року в селі Княгиничі (тепер — Івано-Франківська область). Освіту здобував у Віденському, а потім у Львівському університеті. Ще в студентські роки виявив зацікавлення математичною логікою, зокрема теорією множин. У 1913 році склав іспити на вчителя математики та фізики.

У 1920-х роках активно викладав у середніх школах та у Таємному українському університеті у Львові. У 1927 році став дійсним членом Наукового товариства імені Тараса Шевченка, де також був одним із організаторів математичної секції. З квітня 1927 р. на ювілейному святі з нагоди 30-річчя діяльності Математично-природописно-лікарської секції НТШ Мирон Зарицький виголосив доповідь “Правда, краса і математика”, де вперше виступив і математиком, і ліриком.

Наукові інтереси Мирона Зарицького охоплювали: теорію множин, алгебру логіки, теорію функцій дійсної змінної, історію математики, математичну статистику та ймовірності. Однією з помітних праць стала «Хрестоматія грецької математики» (1936). Також він переклав українською праці Стефана Банаха, зокрема «Курс функціонального аналізу». Зарицький викладав у Львівському університеті, Львівській політехніці, а також Ужгородському університеті. У Львівському університеті був заступником декана, а згодом деканом фізико-математичного факультету. Особливу увагу приділяв викладанню українською мовою.

Був також активним діячем українського руху за освіту рідною мовою. Його родина також відіграла помітну роль у визвольній боротьбі: донька — Катерина Зарицька, діячка ОУН; зять — Михайло Сорока, політв’язень; онук — Богдан Сорока, художник-графік.

У 1940-х роках був заарештований радянською владою за «націоналістичну діяльність» та засланий до Сибіру. Після звільнення повернувся до Львова, де продовжив наукову діяльність.

Помер 19 серпня 1961 року у Львові. Похований на Личаківському кладовищі. У Львові на його честь названа вулиця Зарицьких.

Мирон Зарицький — це не просто науковець. Його життя — приклад синтезу науки, національної гідності, духовної стійкості та служіння своєму народу. Його діяльність заклала основи для розвитку математичної освіти в Україні.

Література

1. Енциклопедія Сучасної України — стаття «Зарицький Мирон Онуфрійович» (esu.com.ua)
2. Математична спадщина України: історичний огляд. Київ: Наукова думка, 2010.
3. Савчук Ю. Історія Львівської математичної школи. — Львів: Вид-во ЛНУ, 2006.
4. Біографічні нариси про українських математиків. — Харків: Основа, 1998.

Є.В. Федорова

Львівський державний університет безпеки та життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій** кандидат педагогічних наук, доцент, математик, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

ДАВІД ГІЛЬБЕРТ:АРХІТЕКТОР СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ

Давід Гільберт — одна з найвизначніших постатей у світовій математиці, мислитель, який сформував напрям розвитку математичної науки ХХ століття. Його ім'я асоціюється не лише з блискучими математичними відкриттями, а й із філософським прагненням до системності, логічної строгості та ясності.

Народився Гільберт 23 січня 1862 року в Кенігсберзі — місті з багатою науковою історією, де колись працював Іммануїл Кант. Тут він отримав початкову освіту, а згодом вступив до Кенігсберзького університету. Однак справжнє визнання та реалізація його наукового потенціалу стали можливими завдяки переїзду до Геттінгена — одного з інтелектуальних центрів Європи.

Гільберт не лише викладав у Геттінгенському університеті, а й перетворив його на провідний світовий центр математичних досліджень. Саме тут сформувалась ціла плеяда його учнів, серед яких — Герман Вейль, Еммі Нетер, Джон фон Нейман, а його ідеї суттєво вплинули на Курта Геделя. Помер Давід Гільберт 14 лютого 1943 року в Геттінгені, залишивши по собі колосальну наукову спадщину.

Однією з головних цілей Гільберта було створення універсальної, несуперечної та логічно завершеної математичної системи. Він був переконаний, що всю математику можна побудувати на чітко визначених аксіомах, керуючись суворими правилами логічного виведення. Такий підхід отримав назву формалізм, і саме Гільберт став його найвидатнішим представником. Це бачення лягло в основу його програми, сформульованої на початку ХХ століття. Вона полягала в амбітному завданні — довести, що вся математика є:

- несуперечною (у ній неможливо довести як твердження, так і його заперечення),
- повною (усе, що істинне, можна довести),
- формалізованою (усі висновки робляться за чіткими правилами логіки).

На жаль, у 1931 році молодий австрійський логік Курт Гедель довів, що ця програма у загальному вигляді нездійсненна. Його теореми про неповноту показали: у будь-якій достатньо потужній формальній системі завжди існують твердження, які неможливо довести або спростувати в межах цієї системи. Це був філософський удар по гільбертовій вірі у всесильність формалізації — однак не по самому Гільберту, який, попри поразку, зберіг шляхетну впевненість у науковому поступі. Його слова «Ми повинні знати. Ми будемо знати» стали символом віри в пізнаваність світу.

23 проблеми Гільберта: виклик для століття

На Всесвітньому математичному конгресі в Парижі у 1900 році Давід Гільберт представив програму розвитку математики у вигляді 23 фундаментальних проблем, які, на його думку, вимагали розв'язання в XX столітті. Вони охоплювали найрізноманітніші галузі — від алгебри й геометрії до аналізу, топології та теорії чисел. Ці проблеми стали орієнтиром для кількох поколінь математиків. Деякі з них — як-от гіпотеза Рімана чи проблема континууму — досі залишаються нерозв'язаними. Інші, як десята проблема (питання про розв'язність діофантових рівнянь), були блискуче вирішені математиком Юрієм Матіясевичем. На сьогодні повністю вирішено 16 із 23 проблем, ще кілька — частково або виявилися некоректно сформульованими. І все ж, значення цієї ініціативи Гільберта полягає не лише у змісті самих задач, а у візонерському масштабі мислення, який надихнув математику на десятиліття.

«Основи геометрії»: нове бачення простору

У 1899 році Гільберт опублікував працю «Основи геометрії», у якій провів глибокий перегляд класичної евклідової геометрії. Він не лише перелічив аксіоми, а й чітко визначив їх логічні відносини: незалежність, повноту, несуперечність. У цьому творі Гільберт фактично заклав основи аксіоматичного методу, який став стандартом для побудови математичних теорій у XX столітті.

Гільбертовий простір: мости між математикою і фізикою

Ще одним вагомим внеском Гільберта став концепт гільбертового простору — абстрактного математичного об'єкта, що узагальнює властивості евклідових просторів на нескінченновимірні випадки. Цей інструмент набув фундаментального значення в квантовій механіці, функціональному аналізі, обробці сигналів та інформатиці. Саме гільбертовий простір дозволяє математично описувати хвильові функції в квантовій фізиці, виконувати спектральний аналіз операторів, моделювати процеси у цифрових мережах.

Гільберт і фізика: майже поруч з Ейнштейном

Менш відомим, але не менш важливим є внесок Гільберта в теоретичну фізику. У 1915 році, практично одночасно з Альбертом Ейнштейном, він вивів рівняння гравітаційного поля, що стали основою загальної теорії відносності. Його підхід був більш математично суворим, і хоча саме Ейнштейна визнають автором цієї теорії, внесок Гільберта у формулювання її математичного апарату є безперечним.

Спадщина, що не згасає

Давід Гільберт залишив по собі не лише низку формальних понять і методів, а цілий підхід до науки. Він сформував уявлення про математику як про послідовну, раціональну систему, де важливе не лише відкриття, а й методологія, структура, доказовість. Його ідеї стали основою для розвитку математичної логіки, метаматематики, теоретичної інформатики. Учні та послідовники Гільберта — серед них фон Нейман, Вейль, Нетер — зробили власні блискучі внески, але завжди визнавали: саме Гільберт навчив їх мислити чітко, сміливо й системно.

Фігура Давіда Гільберта — не лише сторінка історії, а живе джерело натхнення для науки й філософії. Його ім'я стало символом інтелектуального ідеалу, а праці — мапою для тих, хто прагне осмислити глибину математичних структур. Він хотів, щоб людство знало. І ми знаємо — завдяки йому.

Література

1. Гільберт Д. Основи геометрії. — М.: Наука, 1974. — 432 с. Класична праця, де автор формулює систему аксіом для геометрії.
2. Лосєв А. Ф. Історія математики. Частина II. — К.: Вища школа, 1985. — 288 с. Огляд розвитку математичних ідей з акцентом на XIX–XX століття.
3. Матяш О. І., Терєпа А. В. Математика у творчості. Творчість у математиці. — Вінниця: ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2018. — 148 с. Книга для вчителів та студентів педагогічних університетів, що систематизує актуальний матеріал для практичного використання на уроках математики в школі.
4. Гнатюк Н. Давид Гільберт: біографія скорочено. Короткий виклад біографії Гільберта українською мовою.

С.А. Броїло

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ: ПОМИЛКИ, ЩО НАВЧАЮТЬ МИСЛИТИ

Математика — це наука, що будується на строгій логіці, доказах і послідовності міркувань. Саме тому особливу цікавість викликають ситуації, коли за начебто правильними діями ховається груба помилка. Такі хибні, але зовні переконливі міркування називають математичними софізмами.

Що таке математичний софізм?

Математичний софізм — це спеціально побудоване помилкове міркування або доказ, який містить логічну чи арифметичну помилку, замасковану так майстерно, що вона на перший погляд залишається непомітною. Головна мета софізму — не обдурити, а навчити: він створює ситуацію, яка виглядає логічно, але насправді має прихований дефект. Виявлення цієї помилки — вправна інтелектуальна задача, що вимагає уважності, критичного мислення й глибокого розуміння суті математичних операцій.

Софізм і логічна пастка

Історія математичних софізмів сягає ще часів античності. Відомо, що грецький математик Евклід у своїй праці "Pseudaria" зібрав приклади помилкових доказів, які використовувалися для того, щоб навчати учнів уникати логічних пасток. Софізми служили свого роду тренажером для розуму, своєрідним викликом для тих, хто прагнув не лише рахувати, а й розуміти.

Основна особливість математичного софізму — його зовнішня правдоподібність. На відміну від очевидної арифметичної помилки, софізм виглядає переконливо: він базується на формально коректних діях, але приховано порушує фундаментальні правила. Найчастіше йдеться про ділення на нуль, неприпустимі підстановки, неправильні логічні переходи, або двозначність у формулюваннях.

Класифікація математичних софізмів

Софізми можна умовно поділити на кілька типів залежно від того, у якій галузі математики вони побудовані:

1. Числові софізми

Це найпростіший і водночас найпоширеніший тип. У них часто йдеться про звичайні арифметичні дії — додавання, множення, ділення. Помилка зазвичай криється в незаконному перетворенні або неправильному застосуванні властивості чисел. Такі софізми особливо ефективні для тренування пильності школярів.

2. Геометричні софізми

Ці софізми апелюють до інтуїтивного сприйняття форм і простору. Помилка може полягати у неправильному накладанні фігур, уявному "зникненні" площі, спотворенні пропорцій тощо. Ілюстрації таких задач часто

вважають, адже дозволяють "довести", що, наприклад, квадрат перетворюється на трикутник — або що одна й та ж фігура має два різні об'єми.

3. Алгебраїчні софізми

Тут йдеться про помилки в перетвореннях рівнянь або нерівностей. Часто використовуються прийоми зі зведенням подібних членів, логарифмами або дробами. В таких задачах особливо важливо стежити за допустимістю дій: чи не ділимо ми ненароком на нуль, чи правильно працюємо з ірраціональними виразами.

4. Логічні софізми

Це витончені логічні міркування, що порушують правила формальної логіки. Вони можуть виглядати як мовна гра або риторична маніпуляція. Їх використовують не лише в математиці, а й у філософії, юриспруденції, публічних дебатах. Такі софізми часто застосовуються з гумористичною метою, хоча насправді допомагають краще розуміти структуру логічного аргументу.

Класичний приклад софізму: обман із підковами. Один з популярних прикладів софізму подається у вигляді байки.

Один чоловік хотів продати коня за 156 карбованців. Покупець, подумавши, повернув коня, мовляв, тварина не варта таких грошей. Тоді продавець запропонував хитру угоду: «Не бери коня — купи лише цвяхи, що тримають підкови. А коня — отримаєш у подарунок». Цвяхів було 24 (по 6 у кожній з 4 підков). За перший цвях просили 1 копійку, за другий — 2, за третій — 4, і так далі, подвоюючи кожен наступний цвях. Покупець, підрахувавши кілька перших сум, погодився, думаючи, що не витратить більше 10 карбованців. Але в підсумку він виявив, що має заплатити 268435455 копійок, або 2684,35 карбованця — у десятки разів більше, ніж ціна коня.

У чому тут софізм? У тому, що покупець не зрозумів, що має справу з геометричною прогресією, де кожен наступний член удвічі більший за попередній. Сума 24 членів такої прогресії швидко виходить за межі уявлень про "дешеву покупку".

Чому варто вивчати софізми?

Розв'язування софізмів — це не просто розвага або вправлення в логіці. Це важливий інструмент формування критичного мислення. Софізми вчать не довіряти першому враженню, не зупинятися на поверхневій переконливості, а перевіряти кожен крок міркування. Вони змушують ставити запитання: чи всі дії допустимі? чи не порушено умову? чи не маскується за рівнянням помилка?

Софізми також мають педагогічну цінність: вони дозволяють наочно пояснити учням, чому дії, які "майже завжди працюють", іноді дають неправильний результат. Наприклад, ділення обох частин рівняння на змінну може бути хибним, якщо ця змінна дорівнює нулю — але не завжди це одразу помітно.

Математичні софізми — це витончене мистецтво мислити критично. Вони нагадують нам, що навіть у світі суворої логіки можна потрапити в пастку помилки, якщо не бути достатньо уважним. Але водночас вони вчать, що помилка — не ворог, а союзник у навчанні. Виявлена помилка стає джерелом

нового знання. Софізми актуальні не лише для математиків. У часи інформаційного шуму, маніпуляцій і фейків здатність розпізнавати логічні пастки стає однією з ключових навичок. Тож вивчення софізмів — це не просто інтелектуальна вправа, а щеплення від обману, яке допомагає краще орієнтуватися в аргументах, формувати виважену думку й приймати обґрунтовані рішення.

Література

1. Поліщук Ю. І., Беляєв С. І. Математичні софізми в курсі математики середньої школи— Практичне використання софізмів у викладанні математики.
2. Скворцов В. А. Логічні помилки у математичних міркуваннях—Аналіз помилкових доведень і способи їх розпізнавання.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика. Алгебра і початки аналізу. Геометрія. Профільний рівень—Підручник для старшої школи з прикладами, які можна трансформувати в софізми.

Є.М. Марусяк

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **М.І. Кусій**, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики*

ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК АНАТОЛІЙ МИХАЙЛОВИЧ САМОЙЛЕНКО

Анатолій Михайлович Самойленко (2 січня 1938 — 4 грудня 2020, м. Київ) — видатний український математик, академік Національної академії наук України, який зробив фундаментальний внесок у розвиток теорії диференціальних рівнянь, асимптотичних методів та динамічних систем. Його ім'я назавжди вписане в історію української та світової науки.

Народився Самойленко у селі Потіївка Житомирської області, а виріс у місті Малин, де 1955 року закінчив середню школу. Спершу мріяв стати геологом і вступив на геологічний факультет Київського університету. Проте згодом його захопила математика, і він перевівся на механіко-математичний факультет. У 1960 році з відзнакою закінчив Київський університет імені Тараса Шевченка, після чого вступив до аспірантури Інституту математики АН України.

Уже в 1963 році Анатолій Михайлович захистив кандидатську дисертацію, а 1967 року, у віці лише 29 років, став доктором фізико-математичних наук. Його докторська дисертація була присвячена теорії періодичних і квазіперіодичних систем — галузі, що має велике значення для опису складних коливальних процесів. У 1974 році він отримав звання професора.

Протягом життя Самойленко опублікував близько 400 наукових праць, серед яких 30 монографій і 15 навчальних посібників. Його книги перекладені багатьма мовами і видані в провідних наукових центрах Європи, США, Китаю. Під його науковим керівництвом захищено 26 докторських і 77 кандидатських дисертацій. Його учні працюють у престижних університетах та дослідницьких інститутах у різних країнах світу.

Однією з ключових тем досліджень Самойленка була нестійкість і збурення в динамічних системах. Щоб зрозуміти його підхід, уявімо знайому всім ситуацію: людина гойдається на гойдалці. У нормальному стані гойдалка — це маятникова система, підвішена на двох тросах, з двома точками опори, тілом (людиною) і коливаннями відносно певної осі. Але що станеться, якщо один із тросів обірветься?

З математичної точки зору — це сильне збурення, яке порушує рівновагу. За теорією Самойленка, такий розрив призводить до втрати стійкості інваріантного тороїдального багатовиду — багатовимірної геометричної конструкції, яка описує стійкі коливання системи в незбуреному стані. Внаслідок цього змінюється вся динаміка: система стає непередбачуваною, і коливання втрачають регулярність. Людина на гойдалці ризикує впасти. Цей приклад ілюструє, як математична теорія дозволяє глибше зрозуміти, що саме відбувається у реальних фізичних системах під впливом змін.

Серед найбільш відомих наукових досягнень Самойленка — функція Гріна-Самойленка. Це важливий інструмент у теорії випадкових процесів, який дозволяє описувати складні системи з кореляцією. Такі функції використовують у статистиці, математичній фізиці, теорії ймовірностей для моделювання розподілу подій у системах із пам'яттю чи взаємодією між елементами.

Ще одним значущим результатом став чисельно-аналітичний метод Самойленка — метод розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, які описують складні системи, особливо у випадках, коли класичні методи виявляються неефективними. Цей метод активно використовується в моделюванні випадкових процесів, систем керування та нелінійної механіки.

Наукова спадщина Самойленка визнана на міжнародному рівні. Його ідеї вплинули на розвиток сучасної асимптотичної теорії, динаміки багаточастотних систем, методів збурення, математичної фізики та інформатики. Його підхід завжди відзначався глибиною, строгою логікою та водночас прикладною спрямованістю — усе, що він створював, мало потенціал застосування в реальних задачах.

Його життєве кредо полягало у тому, що математика має не лише шукати істину, а й допомагати людині краще зрозуміти світ. Анатолій Михайлович Самойленко був не просто талановитим ученим — він був учителем, провідником і творцем нового напрямку у світовій науці. Його внесок залишається живим у працях його учнів, у теоріях, які він сформулював, і в методах, що досі використовуються в найсучасніших дослідженнях.

Література

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Самойленко_Анатолій_Михайлович
2. <https://kpi.ua/801-7>
3. <http://www.diffeq.univ.kiev.ua/ukr/?id=48>
4. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf

С. Любар

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики і механіки

ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ ТА МАТЕМАТИКА

Що таке штучний інтелект? Штучний інтелект – це технологія, що дозволяє комп'ютерам і програмам імітувати людські інтелектуальні здібності: навчатися, аналізувати інформацію, розв'язувати задачі та навіть розуміти людську мову. ШІ (штучний інтелект) – це вже не лише сюжет для фільмів, а реальність, яка змінює сучасний світ. Розглянемо яким буває штучний інтелект:

1. *слабкий ШІ* (Narrow AI): Виконує лише одну задачу або вузький набір задач. Наприклад, програми для розпізнавання облич або голосу.

2. *сильний ШІ* (General AI): Теоретичний рівень ШІ, який міг би мислити і приймати рішення на рівні людини.

3. *суперінтелект* (Superintelligence): Утопічний або навіть небезпечний сценарій, коли ШІ перевершить людський розум.

Як створюють ШІ? Створення штучного інтелекту – це складний процес, який поєднує знання з програмування, математики, статистики та нейробіології.

Основні етапи створення ШІ:

1. *Збір даних*. Щоб створити інтелектуальну систему, потрібен величезний масив даних. Наприклад, щоб навчити програму розпізнавати обличчя, використовують мільйони фотографій людей.

2. *Створення моделі*. Модель – це "мозок" ШІ, створений на основі математичних формул. Один із найпопулярніших підходів – використання нейронних мереж, які імітують роботу мозку людини.

3. *Навчання*. Система вчиться, аналізуючи дані та знаходячи закономірності. Наприклад, після перегляду тисяч фотографій кішок ШІ починає розуміти, як виглядає кішка.

4. *Тестування та оптимізація*. Як і у випадку з людиною, ШІ робить помилки, тому його потрібно постійно коригувати.

Отже, яка роль математики в розвитку ШІ? Математика – це фундамент штучного інтелекту. Вона не тільки забезпечує засоби для аналізу даних, але й дозволяє моделювати процеси мислення. Основні математичні напрями для ШІ:

- *Лінійна алгебра*. Використовується для роботи з багатовимірними даними. Наприклад, зображення, які ШІ аналізує, представляються як великі матриці чисел.
- *Теорія ймовірностей*. Дозволяє програмам оцінювати ймовірність певних подій.
- *Статистика*. Допомогає працювати з великими наборами даних і знаходити закономірності.

В яких сферах є використання штучного інтелекту:

1. Голосові асистенти (Siri, Google Assistant) використовують ШІ для розуміння та виконання команд.
2. Камери телефонів автоматично обробляють фото за допомогою ШІ, роблячи знімки яскравішими.
3. ШІ аналізує знімки МРТ і рентгену для діагностики захворювань.
4. Створення ліків прискорюється завдяки аналізу даних про хімічні сполуки.
5. ШІ вибирає, які пости показати вам першими, ґрунтуючись на ваших вподобаннях.
6. Автономні автомобілі, такі як Tesla, використовують ШІ для аналізу дороги та прийняття рішень у реальному часі.
7. Системи управління трафіком стають ефективнішими завдяки аналізу даних.
8. ШІ аналізує ринок і допомагає підприємствам прогнозувати продажі.
9. Чат-боти допомагають компаніям спілкуватися з клієнтами.

Що ж, вплив ШІ є феноменальним на сучасне життя. Штучний інтелект – це не просто технологія, а революція, яка вже змінює наше життя. Ми стоїмо на порозі нового етапу людського розвитку, де ШІ стає нашим помічником і співтворцем.

Однак разом із цим з'являються нові виклики, які потребують нашої уваги. ШІ – це лише інструмент, і від нас залежить, як ми його використаємо: для добра чи для шкоди.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

М. Нетенчук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

ТЕОРЕМА ФЕРМА ТА ЇЇ ЗАГАДКА

Математика — це наука, яка завжди привертала увагу своїми складними глибокими практичними застосуваннями. Серед математичних теорем є такі, що не тільки викликають інтелектуальний інтерес, а й формують цілу епоху досліджень. Такою є Велика теорема Ферма, яка була сформульована у XVII столітті, але її остаточне доведення стало можливим лише через три століття завдяки використанню новітніх математичних інструментів. Ця теорема не лише стала однією з найбільших загадок в історії математики, але мала великий вплив на розвиток математичних теорій та концепцій. Розглянемо історію Великої теореми Ферма, труднощі її доведення, а також покажемо її значення для сучасної математики.

Згідно із відомою теоремою Піфагора, яка стверджує, що сума квадратів двох сторін прямокутного трикутника дорівнює квадрату гіпотенузи, Ферма поширив цю ідею на більші значення, стверджуючи, що для будь-яких інших показників більше за два, рівняння не має цілих розв'язків. Ідея була простою, але її доведення виявилось складним завданням, яке стояло перед математиками понад три століття. Теорема Ферма одразу привернула увагу математиків у всьому світі, однак жоден з них не зміг знайти загальне доведення протягом кількох століть. У XVIII та XIX століттях багато математиків, зокрема Ейлер, Гаусс та Лагранж, робили численні спроби довести цю теорему або хоча б знайти контрприклад, але всі вони були безрезультатними. Доведення Великої теореми Ферма стало можливим лише в кінці XX століття завдяки численным відкриттям у галузі теорії чисел, алгебраїчної геометрії та модульних форм. Основною подією стало доведення цієї теореми математиком Ендрю Вайлсом у 1993 році. Його робота стала найважливішим досягненням у математиці того часу. Для доведення теореми він використав модульні форми, що є математичними функціями, які мають важливе значення в теорії чисел; Вайлс звернувся до Теореми Таніямиші-Шимури, що встановлює зв'язок між еліптичними кривими та модульними формами. Завдяки цьому зв'язку він зміг побудувати доведення теореми Ферма.

Доведення Великої теореми Ферма мало значний вплив на розвиток математики та науки в цілому: розвиток теорії чисел; вплив на криптографію, доведення теореми Ферма стало основою для нових підходів у теорії шифрування і захисту інформації; розвиток нових математичних теорій в алгебраїчній геометрії, теорії категорій, топології та інших галузях математики тощо. Розглянемо цікаві факти про теорему Ферма:

1. Ферма не залишив доведення теореми. Він заявив, що знайшов “чудове доведення”, але ніколи не написав його. Ця фраза стала загадкою, яка змушувала

математиків протягом століть намагалися знайти це доведення. Ферма, ймовірно, справді мав якесь власне інтуїтивне розуміння, але теорія, яку він запропонував, була набагато складнішою, ніж те, що він міг довести своїм методом.

2. Теорема Ферма стала об'єктом численних спроб доведення. Більше ніж 350 років математики по всьому світу намагалися розв'язати загадку. Найвідоміші з цих спроб включають роботи Ейлера, Гаусса та Лагранжа, які внесли важливий вклад у розвиток теорії чисел, але не змогли довести теорему для загального випадку.

3. Складність задачі. Доведення Великої теореми Ферма потребувало створення нових математичних інструментів і концепцій. Виявилося, що для вирішення цієї проблеми необхідно було застосувати такі складні поняття, як модульні форми, еліптичні криві, гомологічну алгебру і Теорему Таніямиші-Шимури. Без цих нововведень теорема залишалась би нерозв'язною.

4. Нагорода за доведення. Після того, як Ендрю Вайлс довів теорему в 1994 році, він був удостоєний численних нагород, зокрема Медалі Філдса — однієї з найпрестижніших нагород у сфері математики. 5. Ферма та його спадщина. П'єр де Ферма є одним із засновників сучасної теорії чисел. Багато з його робіт, включаючи теорему Ферма, стали основою для подальших відкриттів у математиці. Крім того, його ім'я увічнене в численних математичних поняттях, таких як правило Ферма, мала теорема Ферма, криві Ферма тощо.

Отже, Велика теорема Ферма була однією з найскладніших математичних проблем у світі. Висунута ще в XVII столітті П'єром де Ферма, ця теорема стала важливою віхою в історії математики, що викликала безліч спроб доведення протягом кількох століть. Теорема була не лише важливою математичною задачею, а й спонукала до розвитку численних математичних концепцій і методів, що дозволили вирішити інші фундаментальні проблеми в математиці. Ця історія є чудовим прикладом того, як наука може розвиватися через прагнення до вирішення складних і заплутаних задач, що займають уми найкращих математиків світу.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кнут Д. "Історія математичних теорем." Лондон, 1999.
3. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
4. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
5. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

М. Суховецький

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики і механіки

МАТЕМАТИКА ТА ВІЙСЬКОВА СПРАВА

Математика відіграє ключову роль у військових структурах сучасного світу, забезпечуючи ефективність планування, стратегічних рішень, технологій та систем управління. Ось основні сфери, де вона використовується:

1. Криптографія та кібербезпека:

Математика є основою для шифрування даних, які передаються між військовими структурами. Наприклад, алгоритми RSA, ECC та методи квантового шифрування забезпечують безпеку секретної інформації. Вона використовується для аналізу та протидії кібератакам, створення стійких до взлому ланцюгів зв'язку.

2. Навігація та геолокація:

Супутникові системи, як GPS або ГЛОНАСС, залежать від складних математичних розрахунків орбіт і часу. Військові використовують ці системи для: визначення місцезнаходження військових об'єктів; управління дронами та іншими автономними пристроями.

3. Балістика і траєкторії:

Математика використовується для розрахунку траєкторії польоту ракет, артилерійських снарядів і куль тощо. Знання фізичних законів і рівнянь руху допомагають досягати максимальної точності під час стрільби.

4. Радари і системи спостереження:

Радари використовують математичні алгоритми для обробки сигналів і визначення місцезнаходження об'єктів. Наприклад: розрахунок швидкості та напрямку руху літаків чи кораблів; виявлення об'єктів у повітрі, на воді чи під водою.

5. Моделювання та симуляція:

Математичні моделі дозволяють військовим структурам передбачати результати бойових операцій. Наприклад: створення віртуальних полів битв; аналіз логістики постачання зброї та ресурсів.

6. Штучний інтелект і машинне навчання:

У військових дронах, роботизованих системах і безпілотноках активно використовуються алгоритми машинного навчання. Для цього потрібні складні математичні методи, такі як лінійна алгебра, статистика і теорія ймовірностей.

7. Теорія ігор та стратегія:

Теорія ігор допомагає моделювати військові сценарії та вибирати найкращі стратегії, враховуючи можливі дії противника. Це використовується у плануванні операцій і прийнятті рішень у реальному часі.

8. Будівництво і зміцнення оборонних споруд:

Інженерна математика допомагає у розрахунках для будівництва фортифікаційних споруд, мостів та інших стратегічних об'єктів.

9. Аналіз великих даних:

Збір даних з різних джерел, таких як супутники, радіоперехоплення чи розвідка, вимагає математичних методів для: виявлення патернів у великих обсягах інформації; передбачення можливих загроз.

10. Керування зброєю та системами ППО:

Сучасні системи протиракетної оборони та керування зброєю використовують математичні розрахунки для: передбачення траєкторії атакуючих об'єктів; розрахунку точного моменту запуску протиракет.

11. Метеорологія та прогнозування:

Військові операції часто залежать від погодних умов. Математичні моделі прогнозування погоди використовуються для вибору найкращого часу і місця для проведення операцій.

12. Розробка нових технологій:

Математика застосовується у створенні лазерної, гіперзвукової, електромагнітної зброї, а також у космічних військових програмах.

Отже, математика є невід'ємною частиною сучасних військових структур, допомагаючи забезпечувати ефективність, безпеку та технологічну перевагу.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

А. Уманський

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

*Науковий керівник **О.М. Трусевич**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

МАТЕМАТИКА І МАЙБУТНЄ

Математика — це не просто числа і формули. Вона є мовою Всесвіту, ключем до розгадки закономірностей природи та свідомості. Уявімо, що в майбутньому математика стане ще більш потужним інструментом, здатним змінювати не лише наше повсякденне життя, але й саму реальність.

Математика та паралельні світи:

Одним із найфантастичніших напрямків, у якому математика може змінити наше майбутнє, є відкриття паралельних всесвітів. Якщо математика в майбутньому дозволила б створити модель, яка дасть нам можливість не лише описувати, але й взаємодіяти з цими паралельними світи? Уявімо, що через математичні формули можна буде «переписати» реальність і переміщатися між різними вимірами. Це може бути не лише науковою фантастикою, а й майбутньою реальністю, що відкривається перед новими поколіннями математиків і фізиків.

Математика та штучний інтелект нового покоління:

У світі, де штучний інтелект швидко розвивається, математика стає основою для нових технологій, які в майбутньому можуть перевершити людські можливості. Уявімо, що через складні математичні алгоритми з'являться машини, які зможуть не просто виконувати обчислення, але й формувати нові ідеї, нові наукові теорії і навіть художні твори. Тепер це не здається таким неможливим — сучасні алгоритми для машинного навчання вже здатні створювати музику, картини і навіть писати статті, а майбутні досягнення математики тільки прискорять цей процес.

Математика та нові форми пізнання

У майбутньому математика може стати інструментом для розширення нашого сприйняття світу. Нехай уявимо, що через деякі математичні засоби можна буде створювати нові пристрої, які дозволять нам сприймати навколишній світ не лише через традиційні органи чуття, але й за допомогою нових вимірів, які ми зараз не можемо побачити чи відчувати. Це можуть бути, наприклад, пристрої, що дозволяють «бачити» інші частоти світла або звукові хвилі, або навіть проникати в недоступні області людського мозку, розуміючи те, що зараз залишається за межами нашого розуміння.

Математика та ідеальні світи

Ще одним фантастичним можливим напрямком розвитку математики є створення деяких «ідеальних», «нереальних» світів за допомогою математичних моделей. Математичні алгоритми допоможуть знаходити найбільш ефективні рішення для боротьби зі змінами клімату, оптимізації енергоспоживання та розвитку сталих технологій.

Математика та можливості людського мозку

Математика в майбутньому може бути пов'язана не тільки з технологіями, але й з новими методами розвитку людського потенціалу. Завдяки математиці вчені можуть розробити деякі нові методи тренування мозку, покращення роботи пам'яті, уваги та інших когнітивних функцій. Уявіть, що за допомогою спеціальних математичних вправ та програм ми зможемо навчити мозок працювати швидше, ефективніше та з меншими витратами енергії. Такі технології можуть допомогти нам досягти нових висот у пізнанні і розумінні світу, а також поліпшити якість життя.

Відомі сучасні математики та їхні внески в майбутнє

Заглядаючи в майбутнє, можна уявити нових математиків, які будуть відкривати нові горизонти. Одним із таких може стати український математик, який буде працювати над розв'язанням задачі, що дозволить людям перенести своє свідомість в цифрову реальність або навіть досягти вічного життя через математичні моделі. Можливо, це буде хтось, хто знайде способи оптимізувати не лише фізичні процеси, але й когнітивні функції людини, дозволяючи кожному з нас стати безмежно розумними і здоровими.

Також, можливо, ми доживемо до того часу, коли математика стане основою для створення нових форм життя — штучних організмів, що будуть обчислювальною машиною, здатною до самовдосконалення. Математика майбутнього — це не лише абстрактна наука, а й потужний двигун технологічних ідей, які можуть змінити наше розуміння Всесвіту. Вона допоможе не тільки розв'язувати складні задачі, але й створювати нові реальності, трансформувати людське суспільство та змінювати саму природу нашого існування. Ми тільки на початку цього шляху, і майбутнє, яке відкривається завдяки математиці, здається безмежно цікавим і захоплюючим.

Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича, у трьох томах. - М.: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

ЗМІСТ

Секція 1 ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В МАТЕМАТИЦІ	3
Ковальський А.А. ВИКОРИСТАННЯ АЛОМЕТРИЧНОГО ПОКАЗНИКА ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ АДАПТИВНОЇ ГНУЧКОСТІ СИГМОЇДАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ПІДГОНКИ КРИВИХ.....	3
А.В. Братасюк, А.В. Малаш, В.Д. Скубаков ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОРМИ КРИЛА БПЛА.....	6
Д.А. Гусак, М.М. Черепана ПРИКЛАД МОДЕЛІ ВОГНЕВОГО БОЮ.....	8
Х. А. Бать, П. В. Пилип МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗПЕЧНИХ МАРШРУТІВ ДРОНІВ У БОЙОВИХ УМОВАХ НА ОСНОВІ МУРАШИНИХ АЛГОРИТМІВ.....	11
С. С. Плотиця Т. Б. Гошко МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДОРОЖНЬОГО РУХУ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ АВАРІЙНОСТІ.....	13
Д.В. Гандзюк, В.Т. Кузь, С.Р. Лях ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ЗАСОБАХ РАДІОЕЛЕКТРОННОЇ БОРОТЬБИ.....	15
П.О. Марусов ТЕОРІЯ ВУЗЛІВ: ВІД МАТЕМАТИЧНОЇ АБСТРАКЦІЇ ДО БІОТЕХНОЛОГІЧНИХ ЗАСТОСУВАНЬ.....	17
М. Федаш МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНО-РІВНОВАЖНОГО СТАНУ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ДЕФЕКТАМИ.....	19
А.О. Шевчук ДО МОДЕЛЮВАННЯ УДАРНОГО ВПЛИВУ НА ШАСІ МОБІЛЬНОГО НАЗЕМНОГО РОБОТИЗОВАНОГО КОМПЛЕКСУ.....	21
М.О. Попчук ВИКОРИСТАННЯ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MICROSOFT EXCEL ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ	23
А.О. Нечко ЕЛЕМЕНТИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....	25
О. Орлов СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В ПРОГРАМНІЙ СИСТЕМІ MATHCAD.....	28

В. Іваник

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРИМІЩЕНЬ ЗА СПЕКТРАЛЬНИМ АНАЛІЗОМ ЗВУКОВИХ СИГНАЛІВ	30
--	----

К. Бекало

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВМІСТУ ВУГЛЕКИСЛОГО ГАЗУ В ПРИМІЩЕННЯХ.....	32
--	----

С. Повх

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ	35
--	----

І. М. Чіпчик

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТЕРЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ.....	37
---	----

Р. Т. Яницький

СТАТИСТИКА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ КІБЕРІНЦИДЕНТІВ	40
---	----

В. В. Перхач

НАУКОВІ ДОСЯГНЕННЯ ВАЛОДДИ ВЕЙБУЛЛА.....	42
--	----

Д. А. Попівняк

ВИКОРИСТАННЯ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛЛА У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ.....	44
---	----

О.Я. Ожибко, Д. Р. Антоняк, О. Р. Дявіл

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ СЕГМЕНТАЦІЇ АВТОМОБІЛЬНИХ НОМЕРНИХ ЗНАКІВ НА ОСНОВІ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ.....	46
--	----

Секція 2 МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ.....47

Ю.Г. Булавка

ПІДВИЩЕННЯ МІЦНОСТІ РЕДУКТОРА ПОВЕРНЕННЯ ЛАНЦЮГІВ ТРАНСМІСІЇ МІННОГО ЗАГОРОДЖУВАЧА.....	47
--	----

В.А. Гавалюк

ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ САМОХІДНОГО КРАНА НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	49
--	----

Д.О. Панко

РОЗРОБКА РЕКОМЕНДАЦІЙ ЩОДО ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ З ОДНОВІСНИМИ ПРИЧЕПАМИ ПІД ЧАС РУХУ ПО ПЕРЕСІЧНІЙ МІСЦЕВОСТІ	55
--	----

О.О. Ковтунович, Д.С. Заїченко

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУР У ЗАЛІЗОБЕТОННІЙ КОНСТРУКЦІЇ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ “FEMAP WITH NASTRAN”.....	57
---	----

О. Грищенко

ЧИСЛО π : ОДВІЧНА ЗАГАДКА	59
-------------------------------------	----

В. Іванишин ДЕЯКІ ЗАБУТІ ІМЕНА УКРАЇНСЬКИХ МАТЕМАТИКІВ	61
В. Іванишин МАТЕМАТИКИ ГАЛИЧИНИ МІЖВОЄННОГО ПЕРІОДУ ПОЧАТКУ ХХ СТОЛІТТЯ.....	63
А. Коржик МАТЕМАТИКА В ЕКОНОМІЦІ ТА ФІНАНСАХ.....	65
М.І. Беззубка ЯК РОЗПЛУТАТИ ВСЕСВІТНЄ ПАВУТИННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	67
І.С. Недодаєв ЗАКОНОПРОЕКТ ПРО ЧИСЛО ПІ В ІНДІАНІ: ІСТОРІЯ МАТЕМАТИЧНОГО КУРЬОЗУ.....	68
А.І. Андрущишин, Я.І. Юсип МАТЕМАТИКА ЯК ІНСТРУМЕНТ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ: ВІД ЛОГІКИ ДО РЕАЛЬНИХ РІШЕНЬ.....	71
А.Д. Шихалєєва, Б.-М.Б. Малець ЕВРИСТИКИ УПЕРЕДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ: КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПОМИЛОК МИСЛЕННЯ.....	73
В. Паламарчук ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З ПРОМІЖНИМИ ПУНКТАМИ.....	75
О. Погорецька ЗОЛОТИЙ ПЕРЕРІЗ.....	77
Х. Кінаш ФРАКТАЛИ.....	79
Н.М. Понич МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ У ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ.....	82
Х. Рибчич ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ.....	84
П. Дольний МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ПОЖЕЖ: КОЛИ ЦИФРИ РЯТУЮТЬ ЖИТТЯ.....	86
М. Аверін ЯК ПРАЦЮЄ GOOGLE: РОЛЬ МАТРИЦЬ І ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ.....	88
А.І. Сем'янів ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....	89
Ю. Пиріг МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ХАОСУ: ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ТА САМОПОДІБНІСТЬ В ПРИРОДНИХ СИСТЕМАХ.....	91

Секція 3

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ.....94

В.П. Притула, В.С. Демидов

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ
ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ.....94

В.О. Довженко

ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ У ПРИРОДІ ТА ЇХ
НЕРОЗГАДАНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ.....97

О.В. Демєнков

ПАРАДОКС МОНТІ ГОЛЛА.....100

Ю.В. Хопта

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ.....103

В.Р. Скорик

ІСТОРІЯ ЧИСЛА π 106

А.А. Фішук

СТАЛА ЕЙЛЕРА.....109

А.В. Мельник

ВНЕСОК УКРАЇНСЬКИХ ЖІНОК-МАТЕМАТИКІВ У ГАЛУЗІ
МАТЕМАТИКИ.....112

К. О. Крижановський

ІНВАРІАНТНІ ВЛАСТИВОСТІ.....114

М.С. Харабара

ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ІСТОРІЯ.....117

О.Р. Воронко

ПОХІДНА ТА ІНТЕГРАЛ В НЕРІВНОСТЯХ,
РІВНЯННЯХ І ТОТОЖНОСТЯХ.....120

А. Іщенко

ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЛА ЕЙЛЕРА
В РІЗНИХ СФЕРАХ ЖИТТЯ.....122

Т. Кравченко

МОВА ФРАКТАЛІВ.....125

Н.М. Гулковський

ВПЛИВ МАТЕМАТИКИ НА РОЗВИТОК
КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ128

С.Є. Мезєнцев

ПОКАЗНИКОВІ ФУНКЦІЇ.....130

Лисак М. А.

КОРІНЬ З МІНУС ОДИНИЦІ.....133

М. Русин

МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ ТА КІБЕРБЕЗПЕЦІ.....135

М. Кизима

МАТРИЦІ: ІСТОРІЯ, МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ.....137

А. Телюк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ:

КОЛИ РІВНЯННЯ ОПИСУЮТЬ РЕАЛЬНІСТЬ.....139

Д. Вітик

КРИПТОГРАФІЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ БЕЗПЕКИ СИСТЕМ

БЕЗКЛЮЧОВОГО ДОСТУПУ В СУЧАСНИХ АВТОМОБІЛЯХ.....141

Секція 4

МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІСТЬ.....144

М.О. Назаров

ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ.....144

В.О. Балдін, Д.О. Легкун

ТРИГОНОМЕТРІЯ У ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....147

С.А. Євтушенко

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ЯК ПІДГРУНТЯ КРИПТОГРАФІЇ.....150

Х.П. Петрученко, О.А. Задорожний

МАТЕМАТИЧНІ ЗАСАДИ У ПСИХОЛОГІЇ152

О.С. Процишин

РОЗМІНУВАННЯ МІННИХ ПОЛІВ154

Адамович Я.Р., Дідух Н.А.

МАТЕМАТИКА В АРТИЛЕРІЙСЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ.....155

М.А. Каптованець, А.А. Іценко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

ТРИВАЛОГО ЗБРОЙНОГО КОНФЛІКТУ157

О.В. Столяр, М.О. Максимішин

МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ ТА ЗАХИСТІ ДАНИХ.....160

А.І. Цюнглевич

МАГІЯ ЧИСЛА e : ВІД СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ ДО КВАНТОВОЇ

МЕХАНІКИ.....162

Р.В. Мироненко

МАТЕМАТИКА В МУЗИЦІ: ГАРМОНІЯ ЧИСЕЛ І

ЗВУКІВ.....164

С.О. Іванова

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТА167

В.М. Копач

ПРИНЦИП КРАЙНЬОГО.....170

В. Олексин

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ.....172

П.О. Климчук

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРІЇ.....174

Х. Кардаш

ПОБУДОВА ІНТЕРВАЛЬНОГО РЯДУ РОЗПОДІЛУ У ЗАДАЧАХ
СТАТИСТИКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНКЦІЙ ПРОГРАМИ
EXCEL.....176

М. Василюк

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК ЗАСОБАМИ
ПАКЕТУ MAPLE180

Р. Жидак

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА У МАШИНОБУДІВНИЙ ГАЛУЗІ.....183

А. Жмуркевич

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ У
БУДІВНИЦТВІ.....185

Н. Гулковський

ГРАФИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ.....187

Секція 5

ПОСТАТІ В МАТЕМАТИЦІ.....189

В.О. Кмін, О.В. Казимирович

ЗАДАЧА ПРОГНОЗУ СПРАВНОГО СТАНУ
ПАРКУ ОДНОТИПНИХ БОЙОВИХ МАШИН.....189

В.П. Дубенков

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМНОГО ТАРИФУ В ТОРГОВІЙ
ПОЛІТИЦІ США.....191

П. А. Лаба

МИКОЛА БОГОЛЮБОВ: ЖИТТЯ, ПРИСВЯЧЕНЕ НАУЦІ.....193

Р.П. Довгань

МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПРИНЦИПИ МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО.....195

В.В. Химич

ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ТРАКТАТІВ ДО ПАКУВАННЯ СФЕР:
МАТЕМАТИЧНІ ДОСЯГНЕННЯ ГІПАТІЇ ОЛЕКСАНДРІЙСЬКОЇ
ТА МАРИНИ В'ЯЗОВСЬКОЇ.....197

Н.Т. Дідух

СТЕФАН БАНАХ – ГЕНІЙ МАТЕМАТИКИ.....199

А.О. Тудор

МАРІЯ ҐАЕТАНА АНЬСЗІ.....201

Д.О. Онучак

МАРИНА В'ЯЗОВСЬКА – ВИДАТНА
УКРАЇНСЬКА МАТЕМАТИКИНЯ203

В.А. Рубан

ДІЯЛЬНІСТЬ ТА МАТЕМАТИЧНИЙ ВКЛАД МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО.....205

О.П. Гавриленко

ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ МАКСИМАЛІЗАЦІЇ ПРИБУТКУ207

І. Денисевич

ГРАДІЄНТ: УНІВЕРСАЛЬНА МОВА ЗМІН210

О.І. Бойко

ГЕОРГІЙ ВОРОНИЙ — ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК213

М.М. Прийма

МИРОН ЗАРИЦЬКИЙ – ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ НАУКОВЕЦЬ ТА
ОСВІТЯНИН.....215

Є.В. Федорова

ДАВІД ГІЛЬБЕРТ:АРХІТЕКТОР СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ.....217

С.А. Броїло

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ: ПОМИЛКИ,
ЩО НАВЧАЮТЬ МИСЛИТИ.....220

Є.М. Марусяк

ВИДАТНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК АНАТОЛІЙ МИХАЙЛОВИЧ
САМОЙЛЕНКО.....223

С. Любар

ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ ТА МАТЕМАТИКА.....225

М. Нетепчук

ТЕОРЕМА ФЕРМА ТА ЇЇ ЗАГАДКА.....227

М. Суховецький

МАТЕМАТИКА ТА ВІЙСЬКОВА СПРАВА.....229

А. Уманський

МАТЕМАТИКА І МАЙБУТНЄ.....231