***ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ***

# ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

*XIII Всеукраїнської науково-практичної конференції курсантів та студентів*



# МАТЕМАТИКА, ЩО НАС ОТОЧУЄ: МИНУЛЕ, СУЧАСНЕ, МАЙБУТНЄ

*Львів 2026*


**РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ**

| | |
|---|---|
| д.т.н., професор | **Василь Попович** |
| к.ф.-м.н., доцент | **Ольга Меньшикова** |
| д. фіз.-мат. н., професор | **Роман Тацій** |
| к. т. н., доцент | **Тарас Гембара** |
| д.т.н., професор | **Лідія Дзюба** |
| к. фіз. -мат. наук, доцент | **Оксана Карабин** |
| к. пед. наук, доцент | **Мирослава Кусій** |
| к. фіз. -мат. наук, доцент | **Оксана Трусевич** |
| к. фіз. -мат. наук, доцент | **Оксана Чмир** |
| | **Іванна Сов'як** |
| | **Ольга Чопик** |
| | **Марта Маланчук** |

**ОРГАНІЗАТОР ТА ВИДАВЕЦЬ** Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

**Комп'ютерна верстка:** Маріанна КЛИМУС

**Друк:** Назарій ПЕТРОЛЮК

**АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:** ЛДУБЖД, вул. Клепарівська, 35
м. Львів, 79007

**контактні телефони:** (032)233-24-79
тел/факс 2330088

**Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє:**
Зб. наук. праць XIII Всеукраїнської конф. курсантів та студентів. – Львів: ЛДУБЖД, 2026. – 316 с.

Збірник сформовано за матеріалами XIII Всеукраїнської конференції курсантів та студентів **«Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє».**

**Збірник містить матеріали таких тематичних секцій:**

**Секція 1.** Математика в прикладних задачах
**Секція 2.** Математичні відкриття, що змінили світ
**Секція 3.** Історія математики
**Секція 4.** Математика і сучасність

**© ЛДУБЖД 2026**

За точність наведених фактів, економікостатистичних та інших даних, а також за використання відомостей, що не рекомендовані до відкритої публікації, відповідальність несуть автори опублікованих матеріалів. При передруковуванні матеріалів посилання на збірник обов'язкове.

# СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

***У. Р. Квасниця, Б. М. Мулярчик***
*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*Науковий керівник* ***Л. Ю. Фірман****, старший викладач каферди вищої математики*

## ГЕЙМІФІКАЦІЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ НАВЧАННЯ ПРАВИЛАМ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Сучасний освітній процес потребує нових підходів до подачі матеріалу, особливо у сфері безпеки життєдіяльності (БЖД). Традиційні лекційні методи нерідко не забезпечують належного рівня мотивації та залученості здобувачів освіти, що знижує практичну готовність до дій у надзвичайних ситуаціях. У цьому контексті гейміфікація – впровадження ігрових механізмів у неігровий освітній процес – постає перспективним і науково обґрунтованим інструментом підвищення ефективності навчання. Актуальність цього підходу зростає в умовах цифровізації освіти та поширення дистанційних форм навчання [1].

Під гейміфікацією розуміють застосування елементів ігрового дизайну – балів, рівнів, досягнень, рейтингів, нагород – у неігрових контекстах з метою підвищення мотивації та залученості учасників [2]. У навчанні правилам БЖД такий підхід дозволяє відтворити потенційно небезпечні ситуації у безпечному ігровому середовищі: симулювати евакуацію під час пожежі, відпрацювати алгоритм першої допомоги, вивчити правила поведінки при надзвичайних ситуаціях. Важливою перевагою є можливість повторного проходження сценаріїв, що сприяє формуванню стійких поведінкових навичок безпечної поведінки.

Результати досліджень. Мета-аналіз Huang et al. (2020), який охопив дані з формальних освітніх середовищ, підтвердив, що гейміфікація позитивно і значуще впливає на навчальні результати студентів [3]. Окреме дослідження у сфері навчання техніки безпеки на виробництві засвідчило, що гейміфіковані тренінги з використанням серйозних ігор та VR-симуляцій демонструють значний потенціал у формуванні культури безпеки та запобіганні нещасним випадкам [4]. Зокрема, один із виробничих кейсів зафіксував зростання кількості добровільних повідомлень про небезпечні ситуації на 177% після впровадження гейміфікованої програми безпеки на підприємстві [5].

Серед ключових переваг гейміфікованого навчання БЖД варто виділити: підвищення внутрішньої мотивації через систему винагород і визнання; можливість багаторазового повторення сценаріїв без реального ризику для здоров'я; миттєвий зворотний зв'язок, що сприяє корекції поведінкових навичок; формування командної взаємодії та відповідальності за безпеку оточуючих. Крім того, ігровий формат знижує тривожність при опрацюванні стресових сценаріїв, що є особливо важливим у контексті підготовки до надзвичайних ситуацій [1].

Таким чином, враховуючи усе вище згадане, пропонуємо впровадити гейміфікацію як дієвий педагогічний інструмент, щоб органічно доповнити традиційні методи навчання правилам безпеки життєдіяльності та суттєво підвищити якість підготовки здобувачів освіти. Світовий досвід підтверджує доцільність системного впровадження ігрових технологій у курси БЖД як у закладах вищої освіти, так і на виробництві. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою комплексних цифрових платформ, які поєднують елементи гейміфікації, мобільного навчання та технологій доповненої реальності для підготовки студентів до дій в надзвичайних ситуаціях.

**Література**

1. Сисоєва С. О. Інтерактивні технології навчання дорослих : навчально-методичний посібник. Київ : ВД «ЕКМО», 2011. 324 с.
2. Deterding S., Dixon D., Khaled R., Nacke L. From Game Design Elements to Gamefulness: Defining Gamification. Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference. 2011. P. 9–15.
3. Huang B., Hew K. F., Lo C. K. Investigating the effects of gamification-enhanced flipped learning on undergraduate students' behavioral and cognitive engagement. Interactive Learning Environments. 2020. Vol. 7. P. 1430–1448.
4. Alves M. et al. Gamification using technologies for occupational safety training in the civil construction sector: a systematic review. Work. 2023. Vol. 76(3). P. 1043–1055.
5. Vikaki. Gamification of Safety & its impact on enhancing Safety Culture. World Safety Forum. 2025. URL: https://worldsafetyforum.co.uk/2025/07/21/vikaki-gamification-of-safety/

***В. Дузенко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА У СПОРТІ

Математика є однією з найважливіших наук, яка супроводжує людину протягом усього життя. Вона оточує нас у повсякденних справах, техніці, економіці, медицині та, безумовно, у спорті. Спорт, на перший погляд, здається сферою, де головну роль відіграють фізична сила, витривалість і швидкість, проте за кожним спортивним результатом стоять точні математичні розрахунки, формули та статистичний аналіз. Саме математика допомагає зробити спорт більш об'єктивним, ефективним і науково обґрунтованим. У сучасному світі спорт уже давно перестав бути лише змаганням фізичних можливостей людини. Він перетворився на складну систему, де поєднуються фізика, біологія, психологія та математика. Без числових показників неможливо оцінити досягнення спортсменів, порівняти результати чи визначити переможців. Таким чином, математика відіграє ключову роль у розвитку як професійного, так і аматорського спорту.

Насамперед математика використовується для підрахунку результатів спортивних змагань. У більшості видів спорту результат виражається числом: кількістю секунд, метрів, очок або балів. У легкій атлетиці фіксується час бігу або довжина стрибка, у плаванні - час подолання дистанції, у футболі - кількість забитих м'ячів, у волейболі та баскетболі - кількість набраних очок. Саме точність математичних вимірювань забезпечує чесність і справедливість змагань. Особливе місце у спорті займає спортивна статистика. Статистичні дані дозволяють аналізувати виступи спортсменів і команд за тривалий період часу. За допомогою середніх значень, відсотків і графіків визначають ефективність гри, стабільність результатів та сильні й слабкі сторони спортсменів. Наприклад, у баскетболі обчислюють відсоток влучних кидків, у футболі - точність передач і володіння м'ячем, у тенісі - кількість подач навиліт та невимушених помилок. Такий аналіз допомагає тренерам коригувати тактику і стратегію гри.

Важливу роль математика відіграє у плануванні тренувального процесу. Тренери використовують математичні розрахунки для визначення оптимального навантаження, тривалості тренувань та часу відпочинку. Наприклад, кількість повторень вправ, інтенсивність бігу або вагу спортивних снарядів обчислюють за певними формулами та пропорціями. Це дозволяє поступово підвищувати фізичну підготовку спортсменів, не перевантажуючи організм і зменшуючи ризик травм. Окрім цього, математика тісно пов'язана з фізикою рухів у спорті. Розрахунок швидкості, прискорення, сили та траєкторії руху є надзвичайно важливим у багатьох видах спорту. Наприклад, у футболі та баскетболі обчислюють оптимальний кут і силу удару або кидка, щоб м'яч досяг цілі. У стрибках у довжину та висоту аналізують швидкість розбігу й кут відштовхування, а в метанні ядра або списа - траєкторію польоту спортивного снаряда.

У командних видах спорту математика допомагає створювати тактичні схеми та стратегії гри. Тренери аналізують розташування гравців на полі, відстані між ними, швидкість пересування та ймовірність успішних дій. За допомогою математичних моделей прогнозують можливий результат матчу та підбирають найефективнішу тактику проти конкретного суперника. Сьогодні багато професійних команд використовують спеціальні комп'ютерні програми, засновані на математичних алгоритмах. Важливою і є роль математики у суддівстві спортивних змагань. У деяких видах спорту, таких як фігурне катання, гімнастика чи стрибки у воду, результати визначаються за допомогою складних систем оцінювання. Оцінки суддів підсумовуються, з них можуть відкидатися найвищі та найнижчі значення, після чого обчислюється середній бал. Такий підхід зменшує вплив суб'єктивності та робить оцінювання більш справедливим.

Сучасний спорт неможливий без інформаційних технологій, які тісно пов'язані з математикою. Аналіз великих масивів даних, використання графіків, таблиць і діаграм допомагають глибше зрозуміти фізичний стан спортсменів. За допомогою математичних методів аналізують частоту серцевих скорочень, швидкість відновлення організму та рівень навантаження під час тренувань. Це дозволяє індивідуально підходити до підготовки кожного спортсмена.

Окрім професійного спорту, математика присутня і в повсякденній фізичній активності. Кожна людина, яка займається спортом або фізичними вправами, підраховує кількість повторень, час тренування, пройдену відстань або витрачені калорії. Таким чином, навіть на аматорському рівні спорт тісно пов'язаний із математикою. Отже, математика у спорті є невід'ємною складовою успіху. Вона допомагає точно вимірювати результати, аналізувати дані, планувати тренування та вдосконалювати спортивну техніку. Завдяки математиці спорт стає більш об'єктивним, безпечним і ефективним. Саме тому можна з упевненістю сказати, що математика не лише оточує нас у повсякденному житті, а й є надійним помічником у досягненні спортивних перемог.

## Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***А. Сем'янів***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ПОХІДНА ДЛЯ ПІДПРИЄМНИЦТВА: ЯК ПОХІДНА ДОПОМАГАЄ БІЗНЕСУ

Розглянемо питання: межа руху, ріст прибутку -усе про похідну, тобто як похідна допомагає бізнесу? Ви хочете максимізувати прибуток, оптимізувати процеси та передбачати ринкові зміни? Похідна – це не просто математичний термін, а потужний інструмент для бізнесу. Вона допомагає зрозуміти швидкість змін, знаходити оптимальні рішення та рухатися до фінансового успіху.

Що ж таке похідна? Просте пояснення для підприємців: похідна показує, наскільки швидко змінюється одна величина відносно іншої. У бізнесі це може бути швидкість зміни прибутку відносно обсягу продажів або часу. Уявіть, що ви ведете автомобіль. Спідометр показує вашу миттєву швидкість – це і є похідна вашої пройденої відстані відносно часу. Тобто похідна допомагає виявити точки максимуму чи мінімуму, що є надзвичайно цінним для прийняття стратегічних рішень у бізнесі.

Швидкість змін: як похідна показує, наскільки швидко змінюється ваш прибуток. У сучасному світі економіка -це постійний рух. Прибутки зростають або зменшуються, ринки коливаються, а компанії шукають способи швидко реагувати на зміни. Саме тут у гру вступає похідна -потужний математичний інструмент, який допомагає "виміряти" швидкість цих змін.

Похідна дозволяє побачити не просто загальну тенденцію, а миттєвий темп змін. Вона показує, як швидко зростає або падає прибуток у конкретний момент часу. Це ніби "знімок" стану бізнесу в секунду, коли ви хочете зрозуміти, що саме відбувається зараз. Якщо значення похідної додатне, це означає, що ваш прибуток зростає -бізнес рухається у правильному напрямку.

Якщо ж похідна від'ємна, це сигнал про спад. У такому випадку варто проаналізувати причини: можливо, змінилися витрати, попит чи ринкові умови. Таким чином, похідна допомагає не лише фіксувати зміни, а й розуміти їхню природу. Знання швидкості змін -це перевага. Похідна дозволяє компаніям реагувати швидше, приймати рішення вчасно і коригувати стратегію ще до того, як зміни стануть відчутними. Завдяки цьому бізнес стає більш гнучким і конкурентоспроможним.

У сучасній економіці успіх бізнесу часто залежить не лише від обсягів виробництва, а й від уміння знайти оптимальний баланс між витратами та прибутком. Саме тут похідна стає незамінним інструментом -вона допомагає виявити той рівень виробництва, де витрати найменші, а прибуток -найбільший. Похідна дозволяє аналізувати, як змінюються витрати чи прибуток при збільшенні або зменшенні обсягів виробництва, тобто як кожна додаткова одиниця продукції впливає на кінцевий результат. Це дає можливість побачити не просто загальну тенденцію, а точку, у якій робота підприємства стає найефективнішою.

За допомогою похідної можна визначити, як змінюються середні та граничні витрати. Це допомагає зрозуміти, коли виробництво нової партії товару вже не приносить переваги або коли витрати на неї починають перевищувати очікуваний дохід. Завдяки цьому підприємство може раціонально планувати свої ресурси та уникати перевиробництва.

Точка беззбитковості - це той обсяг виробництва, при якому прибуток дорівнює нулю, тобто компанія покриває усі витрати, але ще не має чистого доходу. Використовуючи похідні, можна точно знайти цей момент і побачити, з якого рівня виробництва починається реальний прибуток. Це допомагає керівникам ухвалювати обґрунтовані рішення щодо розширення чи скорочення виробництва.

Похідна допомагає ефективно розподіляти ресурси - час, матеріали, персонал, енергію. Вона показує, як змінюється ефективність використання кожного ресурсу при збільшенні обсягів роботи. Таким чином, можна досягти максимальної продуктивності без перевитрат і зайвих затрат. Не варто виробляти занадто багато чи занадто мало - економічна рівновага досягається

тоді, коли знайдено ідеальний баланс. А похідна - це саме той інструмент, який допомагає побачити, де проходить межа між ефективністю та перевитратами. Похідна допомагає побачити, як змінюється попит, коли змінюється ціна. Тобто можна зрозуміти, чи люди купуватимуть менше, якщо підняти ціну, або чи попит майже не зміниться. Похідна допомагає знайти оптимальну ціну, тобто ту, за якої прибуток найбільший, а кількість покупців ще достатньо велика. Це та сама “ідеальна ціна”, де компанія не втрачає клієнтів, але й отримує хороший прибуток.

Таким чином, похідна - це мова змін, за допомогою якої людина може точно описувати світ і прогнозувати його розвиток. Вона навчає нас бачити закономірності там, де на перший погляд є лише хаос, і приймати обґрунтовані рішення на основі фактів, а не припущень.

Отже, можна зробити висновок, що похідна - це міст між теорією й практикою, між математикою і реальним життям. Вона вчить мислити глибше, аналізувати точніше й діяти ефективніше. У світі, де все постійно змінюється, похідна стає символом руху вперед - до точності, розвитку й успіху.

**Література**

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***Д. Разумовський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## АНАЛІЗ ДНК МАТЕМАТИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Вища математика є основою для багатьох сучасних прикладних наук. Одним із її ключових розділів є лінійна алгебра, яка вивчає вектори, матриці та операції над ними. Матриці використовуються для опису складних систем, аналізу великих масивів даних та побудови математичних моделей. Однією з галузей, де активно застосовуються матричні методи, є аналіз ДНК. Розглянемо поняття матриці, її властивості та операції, щоб згодом проаналізувати біологічний аспект, як приклад практичного застосування абстрактних математичних ідей даного розділу математики.

Згідно [1] маємо, що матриця - це прямокутна таблиця чисел, упорядкованих у рядки та стовпці. Матриці можуть бути прямокутними або квадратними в залежності від кількості її рядків та кількості стовпців. У лінійній алгебрі матриці використовуються для: розв’язування систем лінійних рівнянь. опису лінійних перетворень, обробки та аналізу багатовимірних даних, моделювання складних процесів тощо. Основними операціями над матрицями є додавання, віднімання, множення на число, множення матриць та транспонування.

Саме множення матриць має велике прикладне значення, оскільки воно дозволяє описувати послідовні перетворення та взаємодію різних систем. Для застосування математичних методів реальні об’єкти необхідно подати у числовому вигляді. У математиці це досягається за допомогою векторів і матриць. Вектор – це впорядкований набір чисел, який можна розглядати як окремий випадок матриці.

У задачах аналізу ДНК символи, що позначають елементи послідовності, замінюють числовими векторами. Кожному символу ставиться у відповідність певний вектор, після чого вся послідовність подається у вигляді матриці. Таким чином, ДНК розглядається не як текст, а як математичний об’єкт, до якого можна застосовувати операції лінійної алгебри. З математичної точки зору це означає перехід від якісного опису до кількісного, що є ключовим принципом прикладної математики.

Однією з важливих математичних задач є порівняння двох наборів даних. У термінах лінійної алгебри це зводиться до аналізу двох матриць. Для цього будуються спеціальні матриці оцінок, елементи яких відображають ступінь відповідності між елементами двох послідовностей. Заповнення таких матриць відбувається за певними правилами, які мають вигляд рекурентних співвідношень. Це означає, що кожен елемент матриці обчислюється на основі вже відомих сусідніх елементів. З математичної точки зору маємо дискретну оптимізаційну задачу, де необхідно знайти максимальне або мінімальне значення серед можливих варіантів.

Подібні підходи широко застосовуються не лише в біоінформатиці, а й у теорії алгоритмів, чисельних методах та економічному моделюванні. Особливе місце у вищій математиці займають квадратні матриці. Вони дозволяють вводити такі важливі поняття, як визначник, власні значення та власні вектори. Ці поняття є фундаментальними для аналізу лінійних систем. У прикладних задачах часто

використовуються стохастичні матриці. Це квадратні матриці, у яких сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці. Такі матриці описують ймовірнісні переходи між станами системи.

Аналіз стохастичних матриць зводиться до знаходження власних значень і власних векторів. Власні значення дозволяють зробити висновки про поведінку системи в довгостроковій перспективі, що є важливим як у математичній теорії, так і в прикладних дослідженнях.

Приклад аналізу ДНК показує універсальність матричного апарату. Ті самі математичні методи використовуються у фізиці, інформатиці, економіці, статистиці та машинному навчанні. Матриці дозволяють працювати з великими обсягами інформації та знаходити приховані закономірності. Таким чином, матриці є не просто зручним інструментом, а фундаментальною мовою опису складних систем у вищій математиці.

*Висновки*

Матриці займають центральне місце в лінійній алгебрі та є важливим інструментом прикладної математики. Вони дозволяють формалізувати реальні процеси, подати їх у строгій математичній формі та застосовувати ефективні методи аналізу.

Застосування матричних методів в аналізі ДНК демонструє, як абстрактні математичні поняття знаходять практичне використання. Це підтверджує важливість вивчення вищої математики для розуміння сучасних наукових і технічних задач.

**Література**

1. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

2. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

3. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***А. Бусел***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ У СЕЙСМОГРАФІЇ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЗЕМЛЕТРУСІВ

Вища математика відіграє важливу роль у дослідженні природних явищ. Одним із важливих понять математичного аналізу є похідна, яка дозволяє описувати швидкість зміни величин. Це поняття широко застосовується у фізиці, інженерії та геофізиці, механіці тощо. Особливо важливе значення похідні мають у сейсмографії - науці, що займається реєстрацією та аналізом землетрусів.

Під час землетрусу земна поверхня здійснює складні коливальні рухи. Для того щоб зрозуміти характер цих рухів, необхідно не лише зафіксувати самі коливання, а й проаналізувати, як швидко та з яким прискоренням вони відбуваються. Саме тут похідні стають незамінним інструментом математичного аналізу.

1. *Поняття похідної та її зміст*

Як відомо [1] похідна функції характеризує швидкість зміни однієї величини відносно іншої. У випадку, коли величина залежить від часу, похідна показує, наскільки швидко відбуваються зміни в кожен конкретний момент. З математичної точки зору похідна є граничним значенням середньої швидкості зміни функції.

У фізичному сенсі похідна має чітке трактування. Якщо функція описує положення точки в просторі, то її перша похідна відповідає швидкості руху, а друга похідна - прискоренню. Ці поняття є базовими для опису будь-яких механічних коливань, зокрема і коливань земної поверхні під час землетрусів.

2. *Сейсмічні коливання як об'єкт математичного аналізу*

Землетрус викликає хвилеподібні рухи земної кори, які поширюються на великі відстані. Ці рухи мають змінний характер: напрям і швидкість руху постійно змінюються. Сейсмічні коливання часто мають періодичний або близький до періодичного характер, тому їх зручно аналізувати методами математичного аналізу. Запис руху земної поверхні у часі являє собою графік, на якому видно підйоми, спади та різкі зміни. Похідні цього графіка дозволяють визначити моменти, коли рух стає найінтенсивнішим, а також оцінити швидкість і прискорення коливань у різні моменти часу.

3. *Застосування похідних у роботі сейсмографів*

Сейсмографи реєструють рух земної поверхні у вигляді сигналу, який змінюється з часом. Залежно від конструкції приладу, він може безпосередньо фіксувати зміщення, швидкість або прискорення. Якщо прилад вимірює лише зміщення, то похідні дозволяють отримати додаткову інформацію про характер руху.

Перша похідна запису сейсмографа показує швидкість коливань земної поверхні. Друга похідна дозволяє визначити прискорення, яке є надзвичайно

важливим показником, оскільки саме прискорення визначає рівень навантаження на будівлі, споруди та інші інженерні об'єкти. Тому в сучасній сейсмології особлива увага приділяється аналізу похідних сейсмічних сигналів.

4. *Аналіз сейсмічних хвиль за допомогою похідних*

Під час землетрусу реєструються різні типи сейсмічних хвиль, які відрізняються швидкістю поширення та характером руху. Аналіз похідних сигналу дозволяє відрізнити початкові слабкі коливання від основних сильних хвиль.

Різкі зміни значень похідної вказують на моменти, коли рух земної поверхні стає особливо інтенсивним. Це дає змогу визначити час початку землетрусу та оцінити його потужність. Таким чином, похідні виконують роль інструменту для виявлення критичних моментів у сейсмічному процесі.

5. *Практичне значення похідних у сейсмології*

Дані, отримані за допомогою похідних, використовуються не лише для наукового аналізу, а й у практичних цілях. На основі швидкості та прискорення сейсмічних коливань інженери оцінюють сейсмічну небезпеку територій та розробляють норми будівництва. Застосування похідних дозволяє зменшити ризики руйнувань та підвищити безпеку людей. Це ще раз підтверджує, що абстрактні поняття вищої математики мають важливе прикладне значення.

*Висновок*

Похідні є одним із найважливіших інструментів математичного аналізу. У сейсмографії вони використовуються для дослідження руху земної поверхні під час землетрусів. Аналіз першої та другої похідних дозволяє визначати швидкість і прискорення сейсмічних коливань, що є ключовими характеристиками інтенсивності землетрусів. Таким чином, використання похідних у сейсмографії демонструє тісний зв'язок вищої математики з реальними природними процесами та підкреслює її важливу роль у сучасній науці.

**Література**

1. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

2. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

3. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***К. О. Задорожна***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*
*Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

## МАТЕМАТИКА ЦІН: ДОСЛІДЖЕННЯ СПРИЙНЯТТЯ ЧИСЕЛ ТА «ЕФЕКТУ ЛІВОЇ ЦИФРИ» В ІСПАНСЬКИХ МЕРЕЖАХ СУПЕРМАРКЕТАХ MERCADONA ТА CARREFOUR

**Когнітивні механізми сприйняття цін.** У сучасному світі математичні методи дедалі глибше проникають у повсякденне життя, зокрема в економіку та психологію споживання. Одним із найяскравіших прикладів такого впливу є сфера ціноутворення, де суб'єктивне сприйняття чисел відіграє ключову роль у прийнятті покупцями кінцевих рішень. Фундаментом цієї теми є «ефект лівої цифри» (*left-digit effect*), за якого споживачі сприймають ціну, наприклад, 9.99 євро як суттєво нижчу за 10 євро, незважаючи на мінімальну математичну різницю в 0.01 євро [1-2].

Це явище ґрунтується на когнітивних упередженнях, при яких перша, тобто ліва, цифра числа (наприклад, «9» замість «10») домінує в оцінці величини. З точки зору когнітивної психології це пояснюється механізмом обробки інформації: люди зчитують та інтерпретують числа зліва направо, тому перша цифра має непропорційно великий вплив на загальне сприйняття ціни. Теоретично це базується на моделях кодування чисел у мозку, де ліва цифра слугує своєрідним «якорем» для оцінки вартості.

Математично це можна моделювати як нелінійну функцію сприйняття: сприйнята ціна

$$P' = f(\text{ліва_цифра}) + \varepsilon,$$

де $\varepsilon$ – мала похибка для решти цифр [1].

Таке упередження значно посилюється в умовах швидких рішень, коли споживачі, обмежені в часі, вдаються до евристик – спрощених правил мислення, – замість того щоб виконувати точні математичні розрахунки. Математичний аналіз продажів показує, що зміна лівої цифри може збільшити попит на 1–2%, що підтверджує ефективність подібних стратегій, відомих із досліджень на ринку США [3].

У контексті ритейлу це призводить до прояву феномену «пенні-мудрості та фунт-дурниці» (*penny wise and pound foolish*): споживачі схильні переоцінювати малі знижки, фокусуючись на зміні лівої цифри, але при цьому часто ігнорують загальну вартість товарів.

**Особливості іспанського ринку роздрібної торгівлі.** Хоча ефект лівої цифри є універсальним для світової економіки, його застосування набуває специфічних рис залежно від регіональних ринків. Перехід від загальних

теоретичних моделей до конкретного аналізу європейського досвіду дозволяє глибше зрозуміти, як інфляційні очікування та споживчі звички посилюють ефективність «психологічних цін». Іспанія, як країна з високою конкуренцією в секторі ритейлу та стабільним використанням євро, є репрезентативним майданчиком для дослідження того, як математичні моделі сприйняття чисел адаптуються до сучасних ринкових реалій 2025–2026 років [4-6].

**Стратегії ціноутворення в мережах Mercadona та Carrefour.** В Іспанії, де ринок супермаркетів є високо конкурентним, мережі як Mercadona (лідер з 27% ринку) та Carrefour (другий з 10%) активно застосовують стратегії ціноутворення для залучення ціночутливих споживачів (рис. 1).




а) б)

**Рисунок 1 –** Логотипи досліджуваних мереж супермаркетів:
а) Mercadona; б) Carrefour

Мережа Mercadona відома політикою "Siempre Precios Bajos" (завжди низькі ціни), де фокус на стабільних низьких цінах без частих акцій, але з використанням оптимізованих цін для максимізації продажів [7]. Наприклад, вони знижують ціни на продукти, змінюючи форму упаковки, щоб досягти економії (наприклад, зниження на 0.15 євро), що іноді включає just-below pricing.

У 2025–2026 роках Mercadona продовжує використовувати психологію цін, наприклад, у продуктах на кшталт 0.99 €, 1.99 € чи 4.95 € за великі упаковки (як-от 5 кг картоплі за 4.95 €, тобто 0.99 €/кг), що створює враження "менше ніж 1 €" або "менше ніж 5 €" [8]. Це інтегрується в загальну стратегію низьких витрат, де продажі на м² залишаються на 60% вищими за Carrefour.

Мережа Carrefour, навпаки, використовує динамічні ціни з акціями, де багато продуктів мають ціни на кшталт 1.99 €, 3.99 € чи 4.59 €, що безпосередньо експлуатує ефект лівої цифри. Аналіз актуальних каталогів та онлайн-ціни Carrefour (станом на 2025–2026) показує поширений патерн: helado Cornetto – 2.99 €, Magnum – 2.99 €, багато заморожених продуктів та напоїв закінчуються на .99, а популярні "всі по 2.99 €" стають мемами у соцмережах, бо фрукти, овочі чи десерти часто фіксуються саме на цій позначці, посилюючи ілюзію "дешево, бо не 3 €" [9-10].

Дослідження сприйняття в цих мережах базується на загальних емпіричних даних: експерименти демонструють, що ефект посилюється при порівнянні цін поруч (side-by-side), як на полицях супермаркетів, де споживачі швидко сканують етикетки. У Іспанії, з урахуванням інфляції та тиску на ціни

(наприклад, у 2022 році Carrefour запровадив кошик за 30 € з 30 базових товарів), такі стратегії допомагають утримувати клієнтів [11].

**Висновки.** Аналіз стратегій ціноутворення в іспанських мережах Mercadona та Carrefour підтверджує, що «ефект лівої цифри» залишається потужним інструментом впливу на споживчу поведінку навіть у висококонкурентному ринковому середовищі 2025–2026 років. Попри те, що обидві мережі оперують в однакових економічних умовах, їхні підходи до використання когнітивних упереджень суттєво різняться.

Mercadona інтегрує цінові «якорі» у стратегію низьких витрат (EDLP), тоді як Carrefour використовує їх для стимулювання імпульсних покупок через динамічні акції.

Проте частки ринку, що займають мережі, та показник максимальної операційної ефективності свідчать про те, що споживачі надають перевагу моделі стабільної цінової прозорості [7].

Отже, в межах конкурентної боротьби за споживчий вибір «ефект лівої цифри» трансформується з психологічного трюку на інструмент стратегічного управління, де успіх визначається здатністю ритейлера гармонійно поєднувати математичну оптимізацію витрат із передбаченням когнітивних упереджень покупця.

## Література

1. Thomas M., Morwitz V. Penny Wise and Pound Foolish: The Left-Digit Effect in Price Cognition. *Journal of Consumer Research*. 2005. Vol. 32, no. 1. P. 54–64. DOI: https://doi.org/10.1086/429600

2. Sokolova, T., Seenivasan, S., & Thomas, M. The Left-Digit Bias: When and Why Are Consumers Penny Wise and Pound Foolish? *Journal of Marketing Research*. 2020. 57(4), 771-788. DOI: https://doi.org/10.1177/0022243720932532

3. Strulov-Shlain A. More than a Penny's Worth: Left-Digit Bias and Firm Pricing. *The Review of Economic Studies*. 2023. 90(5), 2612–2645. DOI: https://doi.org/110.1093/restud/rdac082.

4. Tendencias Retail 2025: Del consumismo cauteloso a mayor automatización. *InformaBTL*. 2025. URL: https://www.informabtl.com/retail-tendencias-2025/

5. Tuchman G. The Left-Digit Effect: Why Game Prices End in .99. *Psychology Today*. 2013. URL: https://www.psychologytoday.com/us/blog/mind-games/201306/the-left-digit-effect-why-game-prices-end-in-99

6. Schneider, G., Park, T., & Guha, A. (2025). Getting the most for a penny: How retailers can best use left-digit effects. Journal of Retailing and Consumer Services. 2025. 101 (2), 217-226.

DOI: https://doi.org/10.1016/j.jretai.2025.02.002

7. Hanna J. How Mercadona Fixes Retail's 'Last 10 Yards' Problem. *Harvard Business School Working Knowledge*. 2010. URL: https://www.library.hbs.edu/working-knowledge/how-mercadona-fixes-retails-last-10-yards-problem

8. Mercadona Prices in Spain ES | Real Supermarket Food Prices (2026). *Videspaña*. 2026. URL: https://www.youtube.com/watch?v=mBrb9z_WS7s

9. Carrefour España : офіційний вебсайт. URL: https://www.carrefour.es

10. Nati. ¿Todo a 2,99? El extraño caso de los precios en el supermercado (y el helado de 4,99). *Nati recetas caseras*. 2025. URL: https://natirecetascaseras.com/2025/06/16/todo-a-299-el-extrano-caso-de-los-precios-en-el-supermercado-y-el-helado-de-499/

11. Wynne-Jones S. Carrefour unveils €30 shopping basket in Spain following price-cut proposal. *ESM Magazine*. 2023. URL: https://www.esmmagazine.com/retail/carrefour-unveils-e30-shopping-basket-in-spain-following-price-cut-proposal-207051

***А. А. Ковальський***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*
*Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

## ЙМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕГРАДАЦІЇ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

У роботі досліджуються показники надійності турбовентиляторних двигунів на основі датасету NASA C-MAPSS (вибірка FD003) [1]. Дана вибірка містить результати моніторингу 100 одиниць обладнання до моменту виходу з ладу. Особливість цього масиву полягає в одночасному впливі двох чинників деградації – вентилятора та компресора високого тиску, що формує неоднорідну статистичну вибірку [2]. Така природа об'єкта формує складну гетерогенну статистику, що є критичним фактором для перевірки гнучкості математичних моделей.

Складність деградаційних процесів у наборах C-MAPSS зумовлює застосування широкого спектру підходів: від нейромережевих архітектур із гібридною оптимізацією гіперпараметрів [3] до аналітичних імовірнісних моделей на основі сумішей розподілів. Останні дозволяють не лише апроксимувати дані, а й отримати інтерпретовану картину переходу між різними механізмами зносу.

Для опису складного процесу відмов використовується адаптивна суміш експоненціального розподілу $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$, та розподілу Ерланга $g(x) = \frac{\mu^k}{(k-1)!} x^{k-1} \exp(-\mu x)$, $\mu > 0$, $k \in$ [4]. Ключовою відмінністю моделі є використання динамічного вагового коефіцієнта у формі сигмоїди:

$$p(x)=\frac{1}{C}\left(\omega(x)f(x)+\left(1-\omega(x)\right)g(x)\right), \quad (1)$$

де $C=\int_0^{+\infty}p(x)dx$; $\omega(x)=\frac{1}{1+\exp\left(-r\left(x-a\right)\right)}$, $r>0$, $a>0$.

Така структура моделі (1) дозволяє моделі гнучко підлаштовуватися під зміну домінуючого механізму відмови.

Ідентифікацію параметрів моделі здійснюється за критерієм максимальної правдоподібності (MLE). Обчислювальну процедуру реалізується в програмному середовищі Maple із застосуванням вбудованих градієнтних методів нелінійної оптимізації. Параметр форми розподілу Ерланга $k$ визначається на етапі попереднього аналізу за методом моментів. Для забезпечення глобальної збіжності та нівелювання ризику потрапляння цільової функції у локальні екстремуми застосовується стратегія пошуку з множинними стартами (multistart approach). Такий підхід у поєднанні з попереднім аналітичним оцінюванням початкових наближень забезпечує високу стійкість ітераційного процесу та гарантує достовірність знайденого вектора оптимальних значень.

Об’єктивна оцінка ефективності передбачає порівняльний аналіз із базовим розподілом Ерланга та статичною сумішшю зі сталими вагами. Результати оптимізації демонструють перевагу динамічної моделі: значення логарифмічної функції правдоподібності для неї складає (–567.954), що є вищим за показники спрощених аналогів ($-575.688$ та $-582.291$ відповідно).

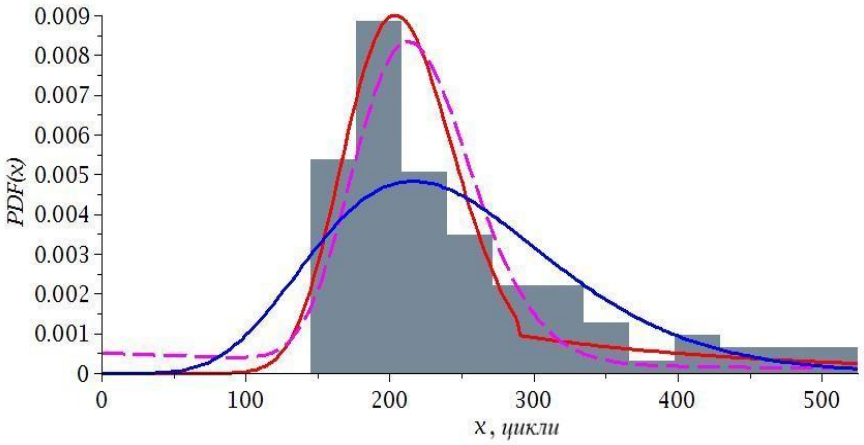



**Рисунок 1** – Зіставлення теоретичних щільностей імовірності (PDF) із гістограмою напрацювань двигунів (NASA FD003):
суцільна (червона) лінія – адаптивна суміш (1) з динамічними ваговими коефіцієнтами;
пунктирна (magenta) лінія – статична модель із фіксованими вагами;
синя лінія – базовий однокомпонентний розподіл Ерланга

**Висновки.** Результати підтверджують, що використання сигмоїдних функцій змішування дозволяє точніше описувати неоднорідні дані. Подальшим етапом дослідження стане розробка двокомпонентної суміші виключно з

розподілів Ерланга. Це забезпечить ще більше ступенів вільності для апроксимації складних асиметричних кривих зносу.

**Література**

1. Saxena A., Goebel K. Turbofan Engine Degradation Simulation Data Set (FD003). NASA Ames Prognostics Center of Excellence (PCoE). 2008. [Dataset]. URL: https://www.kaggle.com/datasets/bishals098/nasa-turbofan-engine-degradation-simulation. Accessed: Jan. 29, 2026.

2. NASA Turbofan Engine Degradation Simulation Dataset: About Dataset. Kaggle. 2023. [Electronic Resource]. URL: https://www.kaggle.com/datasets/bishals098/nasa-turbofan-engine-degradation-simulation/data. Accessed: Jan. 29, 2026.

3. Shen, L.; Wang, Y.; Du, B.; Yang, H.; Fan, H. Remaining Useful Life Prediction of Aero-Engine Based on Improved GWO and 1DCNN. *Machines* **2025**, *13*, 583. https://doi.org/10.3390/machines13070583

4. Tuluchenko H. Ya. Dynamically Weighted Mixture of Exponential and Erlang Distributions with Independent Rate Parameters. XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 17–20 листопада 2025 р.). Київ: Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 2025. P. 143-144.

***В. О. Кошелєв***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*
*Науковий керівник: **А. О. Ткаченко**, кандидат технічних наук, доцент кафедри «Автоматизовані електромеханічні системи»*

## ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ЯК ОСНОВА АВТОНОМНОЇ НАВІГАЦІЇ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ ТА РОБОТІВ

Сучасні роботи все частіше виконують складні завдання в реальному світі, тому їм необхідно точно орієнтуватися у просторі. Одним із ключових інструментів для цього є векторна алгебра. Вона дозволяє описувати рух, напрям і положення об’єктів у просторі.

Вектори допомагають визначати положення та переміщення робота. Кожен рух можна представити у вигляді вектора, що має напрям і довжину. Робот має своє поточне положення та координати точки призначення. Різниця між ними утворює вектор, який показує, куди потрібно рухатися. Наприклад, якщо робот рухається зі стартової точки до заданої цілі, система обчислює вектор переміщення, який показує найкоротший шлях до неї. Система бере координати стартової точки $P_s$ та координати цілі $P_g$ і знаходить між ними різницю [1]:

$$\vec{D} = P_g - P_s. \tag{1}$$

Отриманий вектор $\vec{D}$ – це і є той самий найкоротший шлях (пряма лінія). Його напрям дає роботу ідеальний азимут для руху, а його довжина $|D|$ (модуль вектора) повідомляє системі точну відстань до цілі в метрах чи сантиметрах. Положення в просторі описується радіус-вектором $\vec{P}$. Для двовимірного простору це вектор із координатами $\vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Якщо робот рухається з вектором швидкості $\vec{u}$ протягом часу $\Delta t$, його нове положення обчислюється за формулою:

$$P_n = P_0 + \vec{u} \times \Delta t \tag{2}$$

Робот аналізує навколишнє середовище за допомогою сенсорів і створює вектори, що описують розташування об'єктів. Якщо на шляху є перешкода, робот обчислює новий напрям руху, змінюючи свій вектор. Вектор притягання $\vec{P}_a$ – це цільова точка. Вона діє як магніт, створюючи вектор сили, що тягне робота до себе. Вектор відштовхування $\vec{P}_r$ – це вектор сили, який відштовхує робота від перешкоди, яку бачать сенсори робота (лідар або інфрачервоні датчики) [2]. Інфрачервоні датчики встановлені в передньому бампері, використовують у системі навігації за попередньо встановленими алгоритмами і SLAM-картографі. Робот постійно обчислює результуючий вектор руху за формулою:

$$\vec{P}_t = \vec{P}_a + \vec{P}_r. \tag{3}$$

У багатоосьових роботах (наприклад, маніпуляторах або дронах) вектори використовуються для прямої та оберненої задач кінематики. Наприклад, щоб дрон полетів уперед і вгору, вектор його бажаної тяги розкладається на компоненти (за осями X, Y, Z) і система керування вираховує, з якою швидкістю має обертатися кожен окремий пропелер [3]. Система формує вектор бажаної тяги $\vec{F}_t$, який розкладається на компоненти за осями координат: $\vec{F}_t = \begin{bmatrix} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{bmatrix}$. При цьому сумарний вектор сили $\vec{F}_{tt}$ повинен не лише направляти апарат, а й безперервно компенсувати вектор гравітації $\vec{F}_g = mg$ та вектор аеродинамічного опору $\vec{F}_d$. Згідно з другим законом Ньютона, рівняння руху дрона виглядає:

$$\vec{F}_{tt} = \vec{F}_t + \vec{F}_g + \vec{F}_d = m\vec{a}, \quad (4)$$

де m – маса дрона, $\vec{a}$ – вектор його прискорення.

Щоб дрон стабільно висів у повітрі ($a$=0), система вираховує обертання пропелерів так, щоб вектор тяги ідеально врівноважував зовнішні сили:

$$\vec{F}_t = -(\vec{F}_g + \vec{F}_d). \quad (5)$$

Коли дрон летить прямо, його напрямок задається одиничним вектором (вектором з довжиною 1). Щоб змінити швидкість, процесор множить цей вектор на певне число (скаляр) $k$ наступним чином [4]:

- якщо $k > 1$, вектор подовжується – дрон прискорюється;
- якщо $k < 1$, вектор коротшає – дрон гальмує;
- якщо $k = -1$, вектор розвертається на 180 градусів – дрон дає задній хід;
- якщо $k = 0$, вектор перетворюється на «нульовий» – тяга для руху вперед вимикається і дрон повністю зупиняється, зависаючи на місці (режим ховера).

У реальних системах керування значення $k$ не є випадковим – воно динамічно обчислюється сотні разів на секунду і прямо залежить від відстані до цілі або перешкоди. Що ближче дрон підлітає до заданої точки, то меншим стає коефіцієнт $k$, забезпечуючи ідеально плавне гальмування. Крім того, у програмному коді завжди прописане обмеження максимальної довжини вектора, щоб система не намагалася задати швидкість, яка перевищує фізичні можливості двигунів.

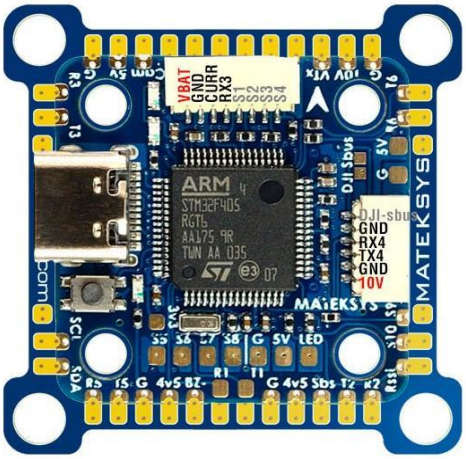



**Рисунок 1** – Польотний контролер Matek F405-miniTE

Для технічної реалізації представлених математичних формул та рівнянь використовується контролер польоту – це компактна електронна плата на базі процесорів серії STM32 (тактова частота від 100 МГц), яка поєднує в собі кілька взаємопов'язаних модулів, рис. 1. Кожен з них виконує конкретну функцію: збір даних сенсорів; стабілізація польоту; забезпечення режимів польоту; утримання висоти та напрямку; взаємодія з системою дистанційного керування, приймачем, GPS навігатором та телеметрією; формування вектора навігації; PID-стабілізація [5].

Програмування контролера польоту передбачає оновлення прошивки, калібрування датчиків, налаштування PID-регуляторів, портів та радіокерування.

Для налаштувань використовують програму Mission Planner – це повнофункціональна програма наземної станції керування з відкритим кодом. Вона дозволяє налаштовувати БПЛА, дрони, коптери, ровери, планувати автономні місії за точками, моніторити політ у реальному часі.

Таким чином, математичні методи векторної алгебри є фундаментальною основою для систем навігації сучасних пристроїв. Саме через обчислення векторів переміщення, сил, прискорень та орієнтації дрон отримує можливість інтерпретувати навколишній простір і перетворювати абстрактні математичні поняття на конкретні керуючі сигнали. Контролер польоту, застосовуючи фільтрацію сенсорних даних, формування навігаційного вектора та PID-стабілізацію, реалізує ці математичні операції у реальному часі, забезпечує точний рух, утримання висоти, уникнення перешкод і стабільний політ.

**Література**

1. Мельник І. В., Ткаченко В. М. Моделювання кінематики та динаміки безпілотних літальних апаратів: підручник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 215 с.
2. Kala R. Autonomous Mobile Robots: Planning, Navigation and Simulation. London: Elsevier, 2023. 800 p.
3. Apoorva, Rahul Gautam, and Rahul Kala. 2018. «Motion Planning for a Chain of Mobile Robots Using A* and Potential Field» Robotics 7, no. 2: 20. doi: 10.3390/robotics7020020
4. Петренко О. І., Сидоренко В. М. Векторна алгебра: теорія та інженерні застосування: навч. посіб. Харків: НТУ «ХПІ», 2022. 198 с.
5. Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2024. 450 p.

***В. А. Сусло***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*
*Науковий керівник* ***А. О. Ткаченко****, кандидат технічних наук, доцент кафедри «Автоматизовані електромеханічні системи»*

# МАТРИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МЕХАТРОННИХ ТА РОБОТОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Мехатроніка та робототехніка базуються на синергії механіки, електроніки та програмування. Проте «містком» між конструкцією робота та алгоритмом його керування є лінійна алгебра та матричний апарат. Матриці дозволяють описати конфігурацію механізму, положення ланок, орієнтацію інструмента, а також створюють основу для розв'язання прямих та обернених задач кінематики. Застосування матричного апарату є ключовим у сучасних мехатронних системах, промислових маніпуляторах, автономних мобільних платформах та дронах [1].

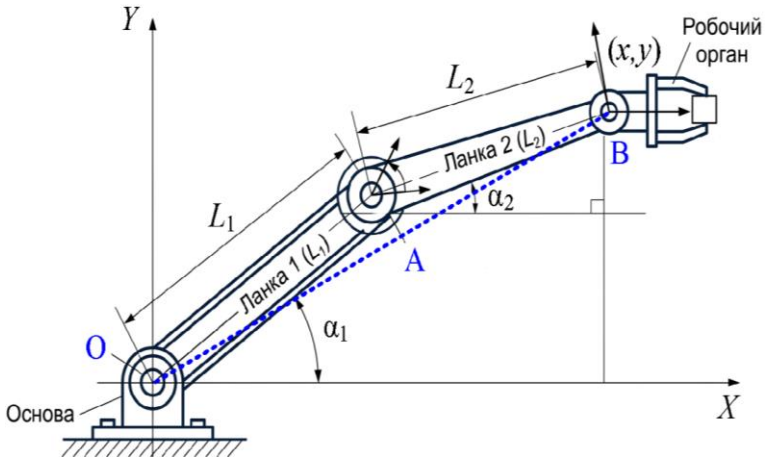



**Рисунок 1** – Схема дволанкового маніпулятора

Пряма задача кінематики полягає у визначенні координат робочого органу маніпулятора, якщо відомі кути повороту його ланок. Для дволанкового маніпулятора маємо дві ланки довжиною $L_1$ та $L_2$, які повернуті на кути $\alpha_1$ та $\alpha_2$ відповідно [2]. Робочий орган маніпулятора знаходиться в кінці другої ланки та має координати $(x, y)$ рис.1.

Вирішення прямої задачі кінематики за допомогою тригонометричних формул має наступний вигляд:

$$x = L_1\cos(\alpha_1) + L_2\cos(\alpha_1+\alpha_2),\ \ y = L_1\sin(\alpha_1) + L_2\sin(\alpha_1+\alpha_2). \qquad (1)$$

У матричному вигляді задача вирішується через однорідні матриці перетворень $T_1$ та $T_2$ для кожної ланки:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & L_1\cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & L_1\sin\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & L_2\cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & L_2\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Підсумкова матриця трансформації $T_{02}$ має вигляд: $T_{02}=T_1 \cdot T_2$. Після перемноження матриць, отримаємо ті самі координати робочого органу ($x$, $y$).

Розглянемо обернену задачу кінематики, де потрібно знайти такі кути $\alpha_1$ та $\alpha_2$, які дозволять маніпулятору з ланками $L_1$ та $L_2$ помістити робочий орган у задану точку ($x$, $y$) [2].

За теоремою Піфагора та теоремою косинусів маємо рівність:

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos(180 - \alpha_2). \quad (3)$$

Оскільки $\cos(180-\alpha_2) = -\cos(\alpha_2)$, то $\cos(\alpha_2) = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$.

Звідси знаходимо кут другої ланки $\alpha_2 = \pm\arccos\dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$.

Знаходимо кут першої ланки $\alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{L_2\sin\alpha_2}{L_1 + L_2\cos\alpha_2}\right)$.

Для визначення кутів $\alpha_1$ та $\alpha_2$ за допомогою матричного підходу рівняння кінематики представимо у вигляді [3-4]:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 + L_2\cos\alpha_2 \\ L_2\sin\alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Виконуючи матричні перетворення отримаємо ті самі кути нахилу $\alpha_1$ та $\alpha_2$.

На основі проведеного дослідження можна зробити висновок, що матричні методи є фундаментальним інструментом для кінематичного аналізу сучасних мехатронних та робототехнічних систем. Переваги матричного апарату:

- матриці дозволяють одночасно описувати як переміщення ($x$, $y$), так і орієнтацію ($\alpha_1$, $\alpha_2$) ланок у єдиній структурі;

- при збільшенні кількості ступенів свободи маніпулятора складність розрахунків зростає лінійно шляхом послідовного перемноження матриць, тоді як тригонометричні вирази стають громіздкими та важкими для аналізу;

- матричний підхід створює єдиний математичний «місток» між фізичною конструкцією робота та програмним алгоритмом керування, спрощуючи реалізацію алгоритмів на мікроконтролерах STM32, AVR, одноплатних мікрокомп’ютерах Raspberry Pi, які мають достатню обчислювальну потужність для виконання матричних обчислень у реальному часі [5].

**Література**

1. Bishop R. H. Mechatronics: an introduction. CRC Press, 2021. 285 p.
2. Craig J. J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 3rd ed. Pearson Prentice Hall, 2005. 408 p.
3. Петров О. В., Семенов В. Г. Лінійна алгебра для інженерів. Х.: Видавництво ХПІ, 2021.
4. Літнарович Р.М. Алгебра матриць. Курс лекцій. МЕГУ. Рівне, 2007. 112 с.
5. Zhu Y. Embedded Systems with ARM Cortex-M Microcontrollers in Assembly Language and C. 3rd ed. Portland, Maine: E-Man Press LLC, 2018. 864 p.

***М. Сеньків, І. Коваль***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***С. О. Ємельяненко****, кандидат технічних наук, ст. досл., доцент кафедри превентивної діяльності у сфері пожежної та техногенної безпеки*

## ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ПОШИРЕННЯ ТОКСИЧНИХ ПРОДУКТІВ ГОРІННЯ ТА ЇХ ВПЛИВУ НА БЕЗПЕЧНУ ЕВАКУАЦІЮ У САНАТОРІЯХ-ПРОФІЛАКТОРІЯХ ТА РЕАБІЛІТАЦІЙНИХ ЦЕНТРАХ

Небезпека пожеж прямо обумовлена низкою нових матеріалів з різним хімічним складом, які виділяють токсичні продукти згорання під час пожеж. Великі пожежі є серйозною небезпекою для людей які перебувають у санаторіях, санаторіях-профілакторіях та реабілітаційних центрах.

В Україні значна кількість об’єктів санаторно-курортного типу, санаторіїв-профілакторіїв та реабілітаційних центрів перебувають в експлуатації понад 30–40 років. Більшість із них мають застарілі інженерні системи, невідповідність сучасним нормам протипожежного захисту та обмежені можливості для безпечної евакуації маломобільних пацієнтів.

Дослідження пожежної небезпеки у санаторіях, санаторіях-профілакторіях та реабілітаційних центрах проводяться з метою запобігання виникненню пожеж та створення умов для саморятування людей.

Параметр питомого виходу диму $D_m$ (Нп м$^2$/кг) для таких приміщень у моделях (наприклад, CFAST або FDS) має прийматися за максимальними значеннями для суміші "текстиль + полімери". Токсикологічний індекс (CO, HCl, $CO_2$). Основна небезпека для людей з обмеженою мобільністю полягає у неможливості швидкого подолання задимленої зони. Навіть при низьких температурах (< 40°C), концентрація хлороводню та оксиду вуглецю за 3–4 хвилини досягає значень, що спричиняють втрату свідомості.

При розрахунку індивідуального пожежного ризику ($Q_в$) необхідно враховувати ймовірність втрати здатності до самостійного руху через токсичний вплив:

$$t_{бл} = min(t_{вид}, t_{токс}, t_{темп}, t_{кис})$$

На об'єктах дослідження майже у 85% сценаріїв $t_{вид}$ та $t_{токс}$ є меншими за $t_{темп}$, що вимагає впровадження систем димовидалення підвищеної потужності.

Тривалість пожежі та стійкість конструкцій, а також наявність великої кількості деревини у номерному фонді та господарських будівлях (особливо у закладах, розташованих у рекреаційних зонах із використанням дерев'яних зрубів або каркасних конструкцій) формує сценарій тривалого вільного горіння. Висока питома вага пожежного навантаження ($g_n$ > 500 МДж/м$^2$) забезпечує тривалу стадію розвиненої пожежі. Це створює загрозу перевищення межі вогнестійкості будівельних конструкцій (*R, E, I*). Існує загроза обвалення для санаторіїв старого фонду з дерев'яними перекриттями, час до втрати несучої здатності (*R*) може бути меншим за час, необхідний для повної евакуації всіх поверхів силами персоналу (враховуючи складність транспортування пацієнтів на ношах).

Тепловий вплив на суміжні приміщення, а також велика тривалість горіння сприяє прогріву огороджувальних конструкцій, що може призвести до самозайманння пожежного навантаження у сусідніх палатах ще до прямого контакту з полум'ям, що робить динаміку ризику нелінійною.

Співвідношення *ASET* та *RSET* для маломобільних груп. Розрахунок ризику базується на нерівності:

$$ASET \geq RSET \cdot K_б$$

де: *ASET* -доступний час безпечної евакуації; *RSET* -необхідний час евакуації; $K_б$ -означає коефіцієнт безпеки (або коефіцієнт надійності/запасу). Це безрозмірна величина, яка вводиться для того, щоб створити "запас часу" між моментом, коли остання людина покине будівлю (*RSET*), і моментом, коли умови в приміщенні стануть смертельно небезпечними (*ASET*). Значення цього коефіцієнта зазвичай приймається рівним 1,25. У деяких наукових підходах для об'єктів з МГН пропонується навіть збільшувати $K_б$ до 1,5, щоб гарантувати безпеку в умовах високої невизначеності евакуації.

Для реабілітаційних центрів значення *RSET* збільшується у 3–5 разів порівняно з адміністративними будівлями через низьку швидкість руху людей ($V$=10–15 м/хв для людей на кріслах-каталках) та час затримки початку евакуації ($t_{н.е.}$).

Через специфічне пожежне навантаження (високий вихід диму та токсинів) значення *ASET* стрімко скорочується.

Аналіз пожежної небезпеки санаторно-курортних та реабілітаційних закладів дозволяє зробити наступні висновки:

Для реабілітаційних центрів розрахункова модель ризику повинна базуватися на найгіршому сценарії, де швидкість поширення диму порівнюється зі швидкістю руху найбільш повільних груп пацієнтів.

Традиційні підходи до розрахунку ризиків потребують коригування через введення додаткових коефіцієнтів токсичності та врахування специфічного часу затримки евакуації ($t_{н.е.}$) для пацієнтів, які потребують допомоги персоналу.

**Література**

1. ДСТУ 4268:2003 Послуги туристичні. Засоби розміщування. Загальні вимоги. URL:https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page.html?id_doc=41636

2. ДБН В.2.2-10:2022 Заклади охорони здоров`я. Основні положення. URL:https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page.html?id_doc=101916

3. Construction of a visual model of people's movement to manage safety when evacuating from a sports infrastructure facility Ivanusa, A., Marych, V., Kobylkin, D., Sergiy, Y. Eastern-European journal of enterprise technologies, 2023, 2(3-122), pp. 28–41 DOI 10.15587/1729-4061.2023.277492

4. Improving the operational efficiency of control centers for emergency events by using gis technologies Yemelyanenko, S., Kuzyk, A., Ivanusa, A., ... Koval, R., Morshch, Y. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2023, 4(10(124)), pp. 37–49 DOI 10.15587/1729-4061.2023.285938

***В. А. Філіппова, Р. А. Торський***
*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*Науковий керівник* ***Л. Ю. Фірман****, старший викладач кафедри вищої математики механіко-математичного факультету*

## МАТЕМАТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ РОЗМІЩЕННЯ АКУСТИЧНИХ СИСТЕМ ОПОВІЩЕННЯ В НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ

В умовах повномасштабного збройного вторгнення російської федерації проти України питання своєчасного оповіщення населення набуло критичного значення. Особливої уваги потребують заклади освіти, де щоденно перебуває значна кількість громадян. Незважаючи на наявність загальнодержавної системи оповіщення, частина навчальних закладів не обладнані внутрішніми акустичними системами оповіщення. Це призводить до ситуацій, коли студенти, учні, викладачі та вчителі можуть не чути сигнал повітряної тривоги - особливо у внутрішніх аудиторіях, класах, підвальних приміщеннях тощо [1].

Метою даної роботи є математичне обґрунтування необхідної кількості акустичних оповіщувачів та їх оптимального розміщення для забезпечення рівномірного звукового покриття приміщень навчального закладу.

При комплексній розробці системи оповіщення необхідно враховувати не лише площу приміщень та загальну площу будівлі, а й тип приміщень, їхню геометричну форму та пропорційність сторін. Для спрощеного розрахунку необхідної потужності вводять коефіцієнт питомої потужності P_пит (Вт/10 м²) [2]. Загальна необхідна потужність системи визначається за формулою:

$$\mathbf{P = P_пит \times S \times 0{,}1} \quad (1)$$

де *S* -площа приміщення (м²). Для навчальних закладів рівень фонового шуму становить 55–65 дБ (тип N1–N2, P_пит = 1–2 Вт/10 м²).

Найбільш якісним методом є розрахунковий, що ґрунтується на фізичній залежності звукового тиску від потужності оповіщувача та відстані [2]. При цьому сигнал системи оповіщення має перевищувати рівень постійного шуму в приміщенні не менше ніж на 15 дБ:

**SPL = SPL(шум) + 15 дБ** (2)

Рівень звукового тиску на відстані *R* від оповіщувача потужністю *P(оп)* та чутливістю *SPL(1Вт)* визначається за формулою:

**SPL = SPL(1Вт) + 10·lg P(оп) − 20·lg R** (3)

де *SPL* -необхідний рівень звукового тиску (дБ); *SPL(1Вт)* -чутливість оповіщувача (дБ при 1 Вт на відстані 1 м); *P(оп)* -електрична потужність, що підводиться до оповіщувача (Вт); *R* -відстань від оповіщувача до точки вимірювання (м) [2].

З формули (3) знаходимо необхідну потужність оповіщувача:

**10·lg P(оп) = SPL − SPL(1Вт) + 20·lg R** (4)

Для стельових оповіщувачів відстань *R* від оповіщувача до точки вимірювання (на висоті 1,5 м від підлоги) визначається як:

**R = 1,4 × (h − 1,5)** (5)

де *h* -висота встановлення оповіщувача (м) [2].

Для навчальної аудиторії із стельовими оповіщувачами площа озвучування одним оповіщувачем визначається як:

**S(оп) = 3,14 × h²** (6)

Для настінних оповіщувачів використовують співвідношення дальності дії *R* до ширини покриття *W* як 1,5 : 1:

**S(оп) = R² / 1,5** (7)

Загальна кількість оповіщувачів для приміщення площею *S* визначається як:

**N = S / S(оп)** (8) [2].

Наприклад, спробуємо розрахувати орієнтовне значення для типового коридору навчального закладу. Нехай рівень шуму SPL(шум) = 60 дБ, висота стелі h = 3 м, чутливість стельового оповіщувача SPL(1Вт) = 91 дБ (модель CS-710). Тоді:

- За (2) формулою : SPL = 60 + 15 = 75 дБ
- За (5) формулою : R = 1,4 × (3 − 1,5) = 2,1 м
- За (4) формулою : 10·lg P(оп) = 75 − 91 + 20·lg(2,1) = 75 − 91 + 6,4 = −9,6 → P(оп) = 10^(−0,96) ≈ 0,11 Вт
- За (6) формулою : S(оп) = 3,14 × 3² = 28,3 м²

Отже, для коридору площею, наприклад, 200 м² за формулою (8): N = 200 / 28,3 ≈ **8 оповіщувачів**.

Таким чином, наведений математичний апарат дозволяє розрахувати як потужність, так і кількість та місця розміщення акустичних оповіщувачів для кожної зони навчального корпусу окремо. Використання лише одного потужного динаміка для озвучування великих площ є неприпустимим з точки зору забезпечення розбірливості мови та ймовірності його пошкодження.

Впровадження внутрішньої системи оповіщення є прямою вимогою законодавства України у сфері цивільного захисту та може суттєво зменшити ризики для учасників освітнього процесу в умовах надзвичайної ситуації [1, 3].

**Література**

1. Кодекс цивільного захисту України (Відомості Верховної Ради (ВВР), 2013, № 34-35, ст.458) URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/5403-17#Text

2. Теоретичні основи розрахунку системи озвучування та оповіщення. DarDali, Київ, 2019. URL: https://dardali.com/uk/akademiya-praktiki/teoriya/132-teoretychni-osnovy-rozrakhunky-systemy-ozvuchuvannya-ta-opovishchennya-kyiv-ukraine#

3. Про затвердження Правил пожежної безпеки в Україні. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0252-15#Text

***А. С.Бучила***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## ОПТИМАЛЬНІ МАРШРУТИ ДЛЯ РЯТУВАЛЬНИКІВ

Оптимальні маршрути для рятувальників -це науково обґрунтовані та практично сплановані шляхи пересування аварійно-рятувальних підрозділів, які забезпечують мінімальний час прибуття до місця надзвичайної ситуації з урахуванням безпеки, доступності території та поточних умов середовища. Такі маршрути активно використовуються службами екстреного реагування, зокрема ДСНС України.

Ефективність роботи рятувальних служб значною мірою залежить від часу, за який вони прибувають на місце події. У надзвичайних ситуаціях важливо якнайшвидше дістатися до постраждалих, тому вибір маршруту пересування має вирішальне значення. Використання раціонально спланованих шляхів дозволяє скоротити затримки та підвищити якість надання допомоги і ліквідування НС.

Під оптимальним маршрутом розуміють такий шлях між початковою і кінцевою точками, який є найкращим за певним критерієм, найчастіше за часом або довжиною. У реальних умовах на вибір маршруту впливають додаткові чинники, зокрема інтенсивність руху, дорожні обмеження, погодні умови та стан інфраструктури.

Для формалізації таких задач застосовують математичні моделі, зокрема графи. У цій моделі об’єкти місцевості подаються як вершини, а дороги між ними -як зв’язки. Кожен зв’язок може мати числове значення, яке характеризує відстань або витрати часу на переміщення. Визначення найкращого маршруту

зводиться до аналізу можливих варіантів і вибору того, який має мінімальне значення обраного показника. Для цього використовуються алгоритмічні методи, що дозволяють послідовно перевіряти альтернативні шляхи та знаходити найбільш ефективний.

Одним із найефективніших методів є алгоритм Дейкстри. Це метод обчислення найкоротших відстаней від заданої вершини до всіх інших у графі з невід'ємними вагами ребер. Він належить до класу «жадібних» алгоритмів, оскільки на кожному кроці приймається локально оптимальне рішення. В основі алгоритму лежить операція оновлення мітки вершини (релаксація ребра). Для кожної суміжної вершини *v* перевіряється умова:

$$if\ d(v) > d(u) + w(u,v)\ then\ d(v) = d(u) + w(u,v)$$

де:

- *d(u)* - поточний найкоротший час від депо до перехрестя *u*;
- *w(u, v)* - час проїзду між перехрестями *u* та *v*;
- *d(v)* -оновлений (менший) час прибуття до наступної точки.

Задача визначення оптимальних маршрутів є класичною прикладною задачею дискретної математики та теорії графів. Використання алгоритмічних методів у поєднанні із сучасними інформаційними технологіями забезпечує ефективне планування пересування рятувальних підрозділів. Це сприяє зменшенню часу реагування та підвищенню результативності аварійно-рятувальних операцій.

**Література**

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Рівест Р., Стайн К. Вступ до алгоритмів. 3-тє вид. К. : К.І.С., 2019. 1288 с.
2. Кнут Д. Е. Мистецтво програмування. Том 1. Основні алгоритми. 3-тє вид. Х. : Вільямс, 2008. 720 с.
3. Яковлев В. І. Дискретна математика : навч. посіб. К. : Центр учбової літератури, 2012. 400 с.
4. Наказ МВС України № 340 від 26.04.2018 «Про затвердження Статуту дій у надзвичайних ситуаціях органів управління та підрозділів Оперативно-рятувальної служби цивільного захисту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0635-18.
5. Оптимізація безпекової інфраструктури у програмах післявоєнного відновлення з використанням сучасних геоінформаційних систем / А. М. Тригуба, Р. Т. Ратушний, А. Р. Ратушний та ін. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2025. № 31. С. 196–212. DOI: https://doi.org/10.32447/20784643.31.2025.20

***М. М. Чередниченко***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***О. В. Білаш****, кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

## РОЛЬ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Лінійна алгебра є однією з базових дисциплін сучасної математики, яка формує основу для широкого спектра прикладних наук і технологій. У XXI столітті її значення значно зросло завдяки розвитку обчислювальних систем. Особливо важливу роль вона відіграє у військовій справі, де точність, швидкість обробки інформації та надійність систем є критично важливими.

Лінійна алгебра оперує такими базовими поняттями як:

- вектори, які використовуються для опису швидкості, сили, напрямку руху об’єктів;

- матриці, які застосовуються для перетворення координат і обробки даних;

- системи лінійних рівнянь, які дозволяють моделювати складні взаємозв’язки між параметрами;

- власні значення та власні вектори, які застосовуються в аналізі динамічних систем.

Лінійна алгебра широко використовується у військовій сфері, зокрема для моделювання руху снарядів і ракет. Так, наприклад, векторні методи дозволяють: визначати траєкторію польоту кулі; враховувати вплив зовнішніх факторів, зокрема, таких як вітер та опір повітря; підвищувати точність стрільби. Окрім того, лінійна алгебра застосовується у системах навігації для обчислення координат об’єктів і визначення положення та руху техніки.

Методи лінійної алгебри широко застосовуються для розпізнавання об’єктів. Використання матриць дозволяє ефективно обробляти піксельні дані, а сингулярний розклад стискати інформацію без значної втрати якості. Усі сучасні алгоритми машинного навчання базуються на лінійній алгебрі: нейронні мережі – це композиції лінійних перетворень і нелінійностей; метод головних компонент використовує власні значення; регресійні моделі розв’язуються через матричні рівняння. Обробка великих масивів даних неможлива без оптимізованих лінійно-алгебраїчних операцій.

Варто зазначити, що використання лінійної алгебри містить значні переваги: ефективна обробка великих обсягів даних; можливість формалізації складних процесів; висока обчислювальна продуктивність при реалізації алгоритмів; універсальність застосування в різних видах розвідки. Однак, не зважаючи на широке застосування, існують труднощі пов’язані із складністю обчислень при роботі з великими матрицями та інтерпретацією результатів у деяких моделях.

У складних системах управління використовується математичне моделювання, засноване на лінійній алгебрі, що дає змогу: оптимізувати

розподіл ресурсів; прогнозувати розвиток ситуації; підтримувати прийняття рішень у реальному часі. Лінійна алгебра є основою алгоритмів машинного навчання, які застосовуються для аналізу розвідданих; автономного керування технікою; прогнозування дій противника. Матричні перетворення використовує криптографія для захисту інформації, що надзвичайно важливо для забезпечення безпеки військових комунікацій. Сьогодні використовують дуже складні методи шифрування і дешифрування повідомлень. Екстремально важкі для зламування коди використовують великі матриці для шифрування повідомлення. Одержувач повідомлення розшифровує його, використовуючи обернену до цієї матриці. Перша матриця називається кодуючою матрицею, а обернена – декодуючою матрицею. [1, с. 150].

Проведений аналіз наукової літератури показав, що лінійна алгебра відіграє важливу роль у військовій справі, адже дозволяє створювати математичні моделі бойових дій, що враховують різноманітні параметри, зокрема, такі як: чисельність сил; розташування техніки; логістичні можливості. Маючи такі моделі військовослужбовці можуть спрогнозувати результати операцій і обирати оптимальні стратегії для виконання бойових завдань.

Отже, лінійна алгебра є фундаментальною основою сучасних обчислень і технологій. Вона забезпечує ефективні методи обробки інформації, лежить в основі моделювання складних систем та формує математичну базу для вирішення широкого спектра військо-прикладних задач. Без її розвитку неможливе подальше вдосконалення цифрових технологій, науковий прогрес та якісне виконання бойових завдань. Застосування лінійної алгебри сприяє підвищенню ефективності управління військами, точності стрільби та якості прийняття рішень, що є критично важливим у сучасних умовах ведення бойових дій.

## Література

1. Рокіцький І. О. Застосування лінійної алгебри / І. О. Рокіцький, О. Б. Панасенко. – Вінниця : Вид. Главацька Р. В., 2012. – 240 с.

***О. С. Танасков***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# ХАКЕРСЬКА МАТЕМАТИКА: КОМБІНАТОРНІ ТА ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ В АЛГОРИТМАХ АТАКИ Й ЗАХИСТУ АВТЕНТИФІКАЦІЙНИХ ДАНИХ

У сучасному глобалізованому кіберпросторі, який характеризується експоненціальним зростанням кількості мережевих сервісів та інтеграцією хмарних обчислень, автентифікація користувачів залишається одним із найбільш критичних та водночас вразливих рубежів інформаційної безпеки. Попри активне впровадження біометрії та безпарольних технологій, класичний буквено-цифровий пароль залишається базовим методом захисту доступу до персональних, корпоративних та державних ресурсів. Проте протистояння між зловмисниками та інженерами з безпеки давно перейшло з площини простого написання програмного коду в область глибокого математичного протиборства. Надійність автентифікаційних даних, швидкість їхнього перебору та ефективність криптографічних загороджень безпосередньо підпорядковані законам комбінаторики, теорії ймовірностей, теорії чисел та теорії обчислювальної складності. Актуальність дослідження цієї проблематики полягає в необхідності детального математичного моделювання сучасних методів зламу для розробки стійких криптографічних систем, здатних ефективно протистояти атакам із використанням спеціалізованих апаратних прискорювачів (GPU/ASIC) та перспективних квантових обчислень.

З погляду дискретної математики, будь-який пароль є упорядкованим кортежем, елементи якого належать до фіксованої множини символів (алфавіту). Якщо потужність використовуваного алфавіту (кількість доступних символів, включаючи регістрозалежні літери, цифри та спецсимволи) становить $k$, а фіксована довжина пароля дорівнює $n$, то повний простір можливих комбінацій $N$ (ентропія простору пошуку) визначається фундаментальною формулою комбінаторики для розміщень із повтореннями:

$$N = k^n$$

Наочним прикладом експоненціальної залежності обчислювального простору від довжини є порівняння двох систем. Якщо пароль складається лише з 26 малих літер латинського алфавіту і має довжину $n = 5$, простір пошуку становить $26^5 \approx 11{,}8 \times 10^6$ комбінацій, що сучасний обчислювальний модуль перебирає за частки мікросекунди. Проте, якщо розширити алфавіт до повного набору стандартних символів ASCII ($k = 94$) і збільшити довжину до $n = 8$, кількість варіантів зростає до $94^8 \approx 6{,}09 \times 10^{15}$. Ця математична залежність ілюструє концепцію обчислювальної стійкості: збільшення довжини пароля

чинить значно потужніший геометричний вплив на захист, ніж просте розширення алфавіту при малій довжині.

Аналіз методів зламу паролів (криптоаналізу автентифікаційних даних) дозволяє класифікувати атаки за їхньою алгоритмічною та математичною складністю:

**Повний перебір (Brute Force):**

Класичний детермінований алгоритм, який передбачає послідовну генерацію та перевірку всіх елементів простору $k^n$. Часова складність такої атаки в найгіршому випадку описується як $O(k^n)$, що робить її практично нереалізованою для великих значень $n$ через обмеженість фізичного часу та енергетичних ресурсів обчислювальних систем.

**Словникові атаки (Dictionary Attacks):**

Цей метод базується на емпіричному факті, що людський вибір паролів не є рівноймовірним. Замість перебору всього простору $k^n$, алгоритм обмежується підмножиною $M \subset N$, де $M$ - база даних реальних, раніше скомпрометованих або популярних паролів. Це дозволяє зменшити простір пошуку на багато порядків, зводячи складність до лінійної $O(|M|)$.

**Ймовірнісні атаки та марковські моделі:**

Найбільш інтелектуальний вид атак, що використовує статистичні закономірності природних мов та патерни поведінки користувачів. На основі аналізу великих масивів витоків даних будуються приховані марковські моделі (HMM) та обчислюються умовні ймовірності появи наступного символу $s_i$ за умови наявності попередніх символів $P(s_i \mid s_{i-1}, s_{i-2}, \dots)$. Хакерські утиліти (наприклад, Hashcat) використовують ці ймовірнісні шаблони (наприклад, додавання року в кінець слова або заміна літери «о» на цифру «0»), суттєво підвищуючи математичне сподівання успішного зламу за обмежений час.

**Райдужні таблиці (Rainbow Tables):**

Метод, що реалізує класичний компроміс «час–пам'ять» (time-memory trade-off) у криптографії. Замість обчислення хеш-функцій у реальному часі, зловмисники заздалегідь генерують гігантські ланцюжки хешів, використовуючи спеціальні функції редукції $R$, які відображають простір хешів назад у простір паролів. Зберігаючи лише початкові та кінцеві елементи ланцюжків, вдається миттєво відновлювати пароль за його хешем за допомогою фіксованої кількості кроків редукції, трансформуючи складність перебору в операцію швидкого пошуку в базі даних.

Сучасна криптографія протиставляє математичним методам атак не менш потужний математичний захист. Паролі ніколи не повинні зберігатися у відкритому вигляді. Фундаментом їхнього захисту є операція криптографічного хешування - відображення рядка довільної довжини у фіксований бітовий рядок (хеш) $h = H(p)$. Математична стійкість хеш-функцій (таких як SHA-256) базується на трьох обов'язкових властивостях: стійкість до відновлення прообразу (односторонність - обчислення $H(p)$ є простим, а знаходження $p$ за відомим $h$ є обчислювально неможливим), стійкість до другого прообразу та

стійкість до колізій (важко знайти два різні паролі, що дають однаковий хеш). Ефект лавини гарантує, що зміна навіть одного біта в паролі повністю змінює структуру підсумкового хешу, унеможливлюючи застосування градієнтних методів пошуку чи частотного аналізу.

Для нівелювання загрози використання Райдужних таблиць та паралельних атак на GPU застосовується механізм сальтизації (Salt) - додавання до пароля перед його хешуванням унікального випадкового рядка фіксованої довжини, що зберігається разом із користувацькими даними:

$$h = H(password \parallel salt)$$

З погляду математики, додавання унікальної «солі» розширює простір пошуку для кожного користувача окремо, роблячи попереднє обчислення глобальних Райдужних таблиць економічно та технічно безглуздим, оскільки зловмиснику доведеться генерувати нову таблицю під кожну унікальну сіль. Окрім того, сучасні стандарти вимагають використання спеціальних «повільних» криптографічних функцій формування ключа (KDF), таких як bcrypt, scrypt або Argon2. Математичний зміст цих алгоритмів полягає в навмисному введенні параметрів складності (кількості ітерацій циклів та об'єму оперативної пам'яті), що збільшує час обчислення одного хешу на кілька порядків, кардинально уповільнюючи швидкість перебору під час Brute Force атак.

Історія великих кіберінцидентів наочно демонструє, що ігнорування математичних законів криптографії завжди призводить до катастрофічних наслідків. Під час витоку даних мережі LinkedIn (2012 рік, 117 млн акаунтів) паролі були захешовані за допомогою застарілого алгоритму SHA-1 без використання солі, що дозволило зловмисникам розшифрувати понад 90% бази за допомогою готових Райдужних таблиць протягом кількох діб. Схожа проблема спіткала компанію Adobe у 2013 році (150 млн паролів), де використання алгоритму тривіального блочного шифрування 3DES у режимі ECB призвело до того, що однакові паролі отримали однакові шифротексти, дозволивши криптоаналітикам успішно застосувати класичний частотний аналіз без повного перебору. Злам баз Yahoo (3 млрд акаунтів) та інциденти з Dropbox і Facebook підтвердили, що збереження даних у відкритому вигляді або використання слабких криптографічних функцій повністю нівелює будь-які інші архітектурні рівні захисту інформаційних систем.

Таким чином, безпека автентифікаційних даних у сучасному цифровому світі є класичною оптимізаційною та ймовірнісною задачею, де математика виступає головним арбітром. Рівень захищеності інформації визначається не декларативними правилами, а строгою комбінаторною ентропією простору паролів та обчислювальною складністю криптографічних функцій хешування. Ефективна стратегія захисту вимагає комплексного підходу: генерації довгих випадкових паролів з метою експоненціального розширення простору перебору, обов'язкового використання унікальної солі для руйнування логіки Райдужних таблиць, а також застосування ітераційних, адаптивних до об'єму пам'яті алгоритмів (Argon2), що математично обмежують апаратну швидкість хакерського перебору. Лише глибоке розуміння та практичне впровадження

математичних механізмів криптографічного захисту дозволяє створювати стійкі системи автентифікації, здатні гарантувати конфіденційність та цілісність даних у сучасному високоризиковому кіберсередовищі.

**Література**

1. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms. - 3rd ed. - Reading: Addison-Wesley, 2019. - 784 p.
2. Stallings W. Cryptography and Network Security: Principles and Practice. - 8th ed. - Upper Saddle River: Pearson, 2022. - 752 p.
3. Shannon C. E. Communication Theory of Secrecy Systems // Bell System Technical Journal. - 1949. - Vol. 28, No. 4. - P. 656–715.
4. Баришевський В. О., Глухов З. О. Криптографічні методи захисту інформації: Навчальний посібник. - К.: Наукова думка, 2021. - 340 с.
5. Ковалевський В. Г. Алгоритми обчислювальної складності та аналіз кіберзагроз. - Львів: Світ, 2023. - 216 с.

***П. О. Марусов***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***М. М. Симотюк****, кандидат фізико-математичних наук, с.н.с., доцент кафедри фундаментальних наук*

## КРИВА ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

**Вступ.** Задачі переслідування є класичним розділом теорії диференціальних рівнянь, вони мають важливе прикладне значення у задачах керування рухом, навігації. Зокрема, у військовій справі моделювання траєкторій перехоплення повітряних цілей є актуальним для аналізу ефективності систем протиповітряної оборони та безпілотних комплексів. Важливим є й комп'ютерна візуалізація задач переслідування. Це дозволяє отримати наочне уявлення про поведінку системи «утікач-перехоплювач», дати графічну інтерпретацію аналітичних властивостей розв'язків задачі переслідування. Доповідь присвячено побудові, аналізу та графічній інтепретації засобами Python кривої переслідування.

**Формулювання задачі.** У площині $Oxz$ безпілотний літальний апарат (БПЛА) рухається по прямій зі сталою швидкістю $a$ км/год на висоті $z = h > 0$ км. У початковий момент часу $t = 0$ БПЛА знаходиться у точці $(x; z) = (0; h)$. У цей же момент часу з точки $(0;0)$ запускають ракету-перехоплювач, напрям руху якої в площині $Oxz$ спрямований на БПЛА. Швидкість ракети є сталою і дорівнює $b$ км/год, $b > a$. Слід знайти рівняння кривої переслідування та час, необхідний для збиття БПЛА.

**Складання рівняння кривої.** Використаємо методику з [1, 2, 3]. Нехай $(x(t), z(t))$, $t \geq 0$, – координати ракети у момент часу $t$, запис $x(z)$ означає, що . Оскільки напрям руху ракети спрямований на БПЛА, то

$$\frac{dx(t)}{dz(t)} = \frac{at - x(t)}{h - z(t)} . \quad (1)$$

Із рівняння (1) випливає, що

$$(h-z)\frac{dx}{dz} = at - x \quad , \quad x + (h-z)\frac{dx}{dz} = at . \quad (2)$$

Від початку відліку до моменту часу $t$ ракета проходить шлях, який, з одного боку, дорівнює $bt$, а з іншого боку, дорівнює довжині дуги $OR$ на кривій переслідування. Тому

$$OR = \int_0^z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = bt . \quad (3)$$

Тоді з рівностей (2), (3) випливає, що

$$x + (h-z)\frac{dx}{dz} = \frac{a}{b}\int_0^z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}\, d\xi . \quad (4)$$

Диференціюючи рівність (4) за змінною $z$, отримуємо

$$(h-z)\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} . \quad (5)$$

Позначимо $y(z) = \frac{dx}{dz}$. Тоді рівняння (5) матиме вигляд

$$(h-z)\frac{dy}{dz} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + y^2} . \quad (6)$$

Розділяючи змінні у рівнянні (6), отримуємо

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{a}{b}\frac{dz}{h-z} . \quad (7)$$

Враховуючи, що $y(0) = x'(0) = 0$, із (7) дістанемо

$$y + \sqrt{1+y^2} = \left(\frac{h}{h-z}\right)^{a/b} . \quad (8)$$

Після нескладних перетворень із (8) отримаємо

$$y(z) = x'(z) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h}{h-z}\right)^{a/b} - \left(\frac{h}{h-z}\right)^{-a/b}\right) . \quad (9)$$

Інтегруючи рівність (9) і враховуючи умову $x(0) = 0$, із (9) дістанемо, що

$$x(z)=\frac{abh}{b^2-a^2}+\frac{b}{2}\left(\frac{(h-z)}{(a+b)h^{a/b}}^{1+a/b}-\frac{(h-z)}{(b-a)h^{-a/b}}^{1-a/b}\right). \quad (10)$$

Рівняння (10) є рівнянням кривої переслідування.

**Момент перехоплення.** Нехай $T>0$ – момент перехоплення. У цей момент БПЛА і ракета перебуватимуть в точці $(aT;h)$. Тому з (10) випливає, що виконується рівність $aT=\frac{abh}{b^2-a^2}$, тобто

$$T=\frac{bh}{b^2-a^2}.$$

Для однієї з найпростіших задач переслідування отримано рівняння кривої перехоплювача. Знайдено залежність часу перехоплення від вхідних даних. Розроблено програму на Python для візуалізації траєкторій, яка дозволяє проаналізувати геометричні та динамічні властивості процесу переслідування. Отримані результати можна використати для моделювання задач керування рухом та оптимізації стратегій перехоплення.

**Література**

1. Б.І. Сокіл, А.І. Андрухів, О.В. Білаш, Т.Я. Глова, Н.М. Гузик, Х.Л. Ліщинська. Збірник військово-прикладних задач з вищої математики: навчальний посібник. – Львів: НАСВ, 2019. – 314 с.
2. R. Kent Nagle, E. B. Saff, and A. D. Snider. Fundamentals of Differential Equations, Sixth Edition, Pearson Addison Wesley, 2004.
3. V. I. Arnold. Ordinary Differential Equations, 1978.

***А. В. Гончарук***
*Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гродзь****, доктор філософії, доцент кафедри фундаментальних наук*

## МАТЕМАТИКА ПОЗА ПІДРУЧНИКОМ АБО ЯК ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ КЕРУЮТЬ СУЧАСНИМ СВІТОМ

У сучасному світі математика давно перестала бути лише набором абстрактних символів на шкільній дошці. Вона перетворилася на «невидимий двигун», який приводить у рух практично все, чим ми користуємося починаючи від смартфонів у наших кишенях до складних систем прогнозування клімату. Прикладна математика сьогодні -це не просто розв'язування рівнянь, а мистецтво перекладу реальних проблем на мову алгоритмів. Мова алгоритмів у свою чергу - це мова цифровізації усього сучасного світу, котрий тримається власне на математичних засадах і відповідному інноваційному рівні інтелекту людини.

Наведемо приклади базового використання прикладних задач у математиці у наш час. Наприклад, цифрова економіка та інтелектуальні системи працюють на основі базового алгоритму математичної системи. Найбільш динамічна сфера застосування математики сьогодні -це Data Science, так звана наука про дані та усім широко вживаний та відомий сучасний штучний інтелект, або як звикли його називати -ШІ. Щодо процесу обробки даних, можна стверджувати, що кожне натискання кнопки в інтернеті генерує дані, які потрібно своєчасно обробити. Щодо іншого варіанту дій, то можна звернути увагу на задачі по класифікації та регресії, коли, наприклад, автономний універсальний банк вирішує, чи видавати вам кредит, він розв'язує прикладну задачу з використанням логістичної регресії або нейронних мереж.

Прикладні математичні задачі використовуються також у рекомендаційних системах, де алгоритми широковживаних додатків YouTube або Spotify базуються на матричному численні. Математична модель аналізує Ваші вподобання, як вектори в багатовимірному просторі та знаходить «найближчих сусідів» -контент, який Вам сподобається.

Прикладні задачі математичного напрямку стосуються логістики та оптимізації ресурсів, оскільки світ стає глобальним і на цьому його вичерпність не обмежується, а отже, питання доставки товарів стає критичним. Розглянемо приклад задачі комівояжера, котра вважається класичною прикладною задачею -як об'їхати 100 точок продуктової доставки за найкоротшим маршрутом, витративши мінімум палива. Сучасні логістичні гіганти, як, наприклад, Amazon чи Нова Пошта щосекунди розв'язують тисячі таких задач, враховуючи сучасні трафіки, вантажність машин та графіки роботи складів. Керування товарними запасами також стосується математичного моделювання, котре дозволяє ритейлерам точно знати, скільки молока чи хліба потрібно замовити на завтра, щоб мінімізувати відходи та уникнути дефіциту.

Криптографія також відноситься до прикладного застосування математики, яка дозволяє контролювати процеси безпеки в мережі і повністю базується на теорії чисел. Щоразу, коли ви вводите пароль або оплачуєте покупку банківською карткою, а відповідно своїм фінансовим рахунком, то у цей час працюють алгоритми шифрування. Складність обчислень також можна віднести до прикладних математичних задач математичного характеру, наприклад щоб розкласти величезне число на прості множники (факторизація) для комп'ютера надзвичайно важко. На цій «математичній важкості» тримається вся світова фінансова система. Криптографія -це приклад того, як розділ математики, що вважався найбільш «чистим» і відірваним від життя, став основою кібербезпеки.

Моделювання біологічних та екологічних процесів як прикладної задачі з використанням математики у сучасній медицині та екології неможливі без використання диференціальних рівнянь. Наприклад, в епідеміології під час пандемії COVID-19 математичні моделі допомагали різним урядам прогнозувати піки захворюваності та приймати рішення про карантин. Це дозволило розрахувати необхідну кількість ліжок у лікарнях та апаратів ШВЛ. Фармакологія також використовує прикладні математичні задачі перед випуском нових ліків, коли власне вчені моделюють, як хімічна сполука взаємодіятиме з білками вірусу. У наш час це економить мільярди доларів і роки лабораторних досліджень.

Інженерія та архітектура майбутнього, де математика дозволяє будувати споруди, які раніше здавалися неможливими дозволяє використовувати метод скінченних елементів за допомогою якого інженери розраховують навантаження на кожен сантиметр майбутнього хмарочоса чи крила літака ще до початку будівництва.

Сучасний 3D-друк та топологічна оптимізація також використовує прикладні задачі математичного напрямку, котрий допомагає створювати деталі, які мають мінімальну вагу, але максимальну міцність, імітуючи структури кісток або рослин.

Прикладні задачі сучасності -це інструменти розвитку людства. Математика дає нам змогу бачити приховані закономірності в хаосі даних, передбачати майбутнє та створювати технології. У XXI столітті математика стала головною операційною системою нашої цивілізації.

**Література**

1. Бурда М. І. Прикладні задачі як засіб формування математичної компетентності учнів.Математика в рідній школі. 2020. № 2. С. 14–19.

2. Возняк Г. М. Прикладні задачі: від теорії до практики : монографія. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2019. 240 с.

3. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Харків : Факт, 2005. 360 с

4. Стюарт І. Неймовірні числа професора Стюарта / пер. з англ. А. Олійник. Харків : Книжковий Клуб «Клуб Сімейного Дозвілля», 2019. 320 с.

***В. О. Греков***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***М. Г. Грубель****, доктор технічних наук, професор, професор кафедри фундаментальних наук*

## ЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ЗАДАЧАХ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛІННЯ БЕЗПІЛОТНИМИ ЛІТАЛЬНИМИ АПАРАТАМИ

Сучасне використання безпілотників у бойових діях потребує переходу від приблизних розрахунків до точних математичних моделей. Коли ворожий РЕБ блокує супутниковий зв'язок, дрон змушений покладатися на власну математичну пам'ять. У таких умовах найпростіші інструменти аналітичної геометрії, як-от рівняння прямої, стають основою для навігації. Дрон розбиває свій шлях на прямі відрізки за допомогою інерціальних датчиків, що дозволяє йому тримати курс і виконувати завдання навіть без сигналу GPS.

Апарат аналітичної геометрії допомагає також автоматизувати розвідку. Оптична вісь камери дрона розглядається як геометричний промінь. Знаходячи точку перетину цього променя з площиною земної поверхні, система миттєво обчислює точні координати об’єкта в кадрі. Такий підхід дозволяє програмам автоматично вираховувати «сліпі зони» за пагорбами чи будівлями, що допомагає оператору непомітно підібратися до противника.

Для подолання ворожої ППО часто використовується тактика групового удару, де математика прямої допомагає синхронізувати роботу групи дронів. Завдяки простим рівнянням бортові комп'ютери швидко обчислюють час і точку зустрічі кількох апаратів для одночасного удару по цілі з різних сторін.

Розглянемо ефективність цього методу на прикладі перехоплення колони техніки, що рухається по шосе (лінія $3x-4y+12=0$). Використовуючи властивості нормального вектора, оператор визначає перпендикуляр від точки старту дрона до лінії шосе. Якщо точка старту $S(6;\ 2)$, то найкоротша відстань до дороги складе всього 4,4 км. При швидкості дрона 90 км/год він досягне цілі за 2,9 хвилини. Оскільки ворожій колоні, що рухається зі швидкістю 45 км/год до цієї точки потрібно їхати майже 10 хвилин, у оператора з’являється «золотий запас» у 7 хвилин. Цей час витрачається на те, щоб обрати найбільш вразливе місце в колоні або дочекатися зручного моменту для удару.

Також лінійні моделі допомагають оптимізувати логістику. Порівнюючи ідеальну пряму з реальним маршрутом обходу ППО, можна точно оцінити витрати палива чи заряду акумулятора.

Таким чином, незважаючи на динамічність і хаос реального бою, саме лінійні математичні моделі та геометричний аналіз забезпечують необхідну швидкість обробки даних у реальному часі. Вони закладають підґрунтя для формування нової якості оперативного управління безпілотними системами, що дозволяє досягати технологічної переваги на полі бою завдяки точності, швидкості прийняття рішень та раціональному використанню наявних ресурсів.

***Є. В. Добрянський***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***О. В. Білаш****, кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

## ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ

Математика завжди відігравала важливу роль у розвитку військової справи. Одним із ключових інструментів, який забезпечив значний прогрес у розв'язуванні військово-прикладних задач, було введення поняття вектора. Вектори дозволяють описувати процеси, пов'язані з рухом, силами та взаємодіями, що є основою військових розрахунків.

Поняття вектора формувалося поступово і бере свій початок ще з античних часів. Давньогрецькі математики, зокрема Евклід, використовували геометричні відрізки для опису величин, однак ще не розглядали їх як самостійні об'єкти з напрямом. Розвиток ідей відбувся у XVII столітті завдяки працям Рене Декарта, який запровадив аналітичну геометрію. Введення координатної системи стало важливим кроком до формалізації напрямлених величин.

У XIX столітті відбувається становлення векторної алгебри як окремого розділу математики. Значний внесок зробили такі вчені як: Вільям Гамільтон, який у 1843 році ввів поняття кватерніонів, що стали попередниками векторного числення [2, с.10]; Герман Грассман, який створив теорії лінійних просторів; Джозайя Віллард Гіббс та Олівер Хевісайд, які незалежно один від одного переробили кватерніони, створивши сучасний векторний аналіз. Варто зазначити, що роботи Гіббса заклали основу сучасного розуміння векторів як величин, що мають модуль і напрям.

У XX столітті векторний аналіз набув широкого застосування у математиці та техніці. Було сформовано основні операції над векторами: додавання та віднімання; скалярний добуток; векторний добуток. Ці інструменти дозволили ефективно описувати: механічні процеси; електромагнітні поля; рух тіл у просторі. Векторний апарат став універсальною мовою інженерних і військових розрахунків. Величини, які визначаються не лише числовим значенням, а й напрямом у просторі, називають векторними. До них належать, зокрема, сила, переміщення, швидкість, прискорення, напруженість електричного та магнітного полів [1, с. 3].

Однією з перших військових галузей, де активно використовувалися вектори, є балістика. Вектори дозволяють: описувати траєкторію польоту снаряда; враховувати силу тяжіння, опір повітря, вітер; визначати дальність і точність стрільби. Рух снаряда моделюється за допомогою векторів швидкості та прискорення, що забезпечує високу точність розрахунків.

Важливу роль виконують вектори і у навігації, оскільки їх використовують для визначення: напрямку руху; координат об'єктів; положення підрозділів.

Варто зазначити, що складання векторів швидкостей дозволяє враховувати вплив вітру, течій та інших факторів, що особливо важливо для авіації та морських сил.

Окрім того, вектори застосовуються у системах управління: ракетними комплексами; безпілотними літальними апаратами; бронетехнікою. Алгоритми керування базуються на аналізі векторів швидкості, прискорення та положення, що дозволяє забезпечити точність і стабільність руху.

Сучасні військові операції передбачають використання математичного моделювання, яке базується на векторах, які дозволяють: описувати рух підрозділів; визначати відстані та напрямки; прогнозувати розвиток майбутніх ситуацій. Комп'ютерні симуляції бойових дій базуються на векторних моделях, що дає змогу оцінювати різні сценарії та приймати оптимальні рішення.

У сучасних умовах особливе значення мають безпілотні системи. У цій сфері вектори забезпечує високу точність виконання бойових завдань, оскільки використовуються для: навігації БПЛА; стабілізації польоту; автоматичного наведення на ціль. Варто заначити, що векторний апарат є основою: цифрових систем управління; геоінформаційних систем; систем штучного інтелекту у військовій сфері.

Отже, формуванням та дослідженням поняття вектора займалися багато вчених. У сучасний період векторний аналіз став невід'ємною складовою науки і техніки. У військовій справі вектори відіграють ключову роль у: балістичних розрахунках; навігації; управлінні технікою; моделюванні бойових дій. Таким чином, векторний апарат є важливим елементом підготовки сучасних військових фахівців і розвитку військових технологій.

**Література**

1. Уланова Н. П., Приходько В. В. Практикум з векторної алгебри : навч. посіб. / М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2019. – 69 с.

2. Crowe M. J. A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system. – New York : Dover Publications, 2013. – 288 p.

***П. Кушнір***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ТРИМАЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ ПЕРЕНОСНИХ ПОЖЕЖНИХ ДРАБИН

**Вступ та актуальність теми.** Ручний підйом особового складу ДСНС на висоту за допомогою переносних пожежних драбин (драбини-палиці, штурмової, висувної триколінної) є травмонебезпечним етапом гасіння пожеж. Система «драбина–людина–поверхня» є статично визначуваною, а її стабільність залежить від балансу сил тертя та моментів.

**Мета дослідження:** аналітичне дослідження сил, розрахунок критичного тертя для запобігання ковзанню та оцінка напружено-деформованого стану тятив.

**Математична модель.** Розглядаючи драбину як жорсткий стержень довжиною L, що спирається на землю (т. А) та стіну (т. В), складемо рівняння моментів відносно точки А для розрахунку реакції стіни $R_B$ (сили розпору):

$$\sum M_A = R_B \cdot L \cdot \sin\alpha - G \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\alpha - P \cdot l \cdot \cos\alpha = 0 ,$$

де: G – вага драбини; P– вага рятувальника (1000Н); $\alpha$ - кут нахилу; l – відстань від основи до рятувальника.

Для запобігання самовільному ковзанню основи сила тертя $F_{fr}$ має перевищувати силу розпору. Для запобігання ковзанню основи сила тертя $F_{fr} = \mu \cdot (P + G)$ має перевищувати силу розпору $R_B$. Критерієм надійності системи приймаємо безрозмірний коефіцієнт запасу стійкості:

$$k_{zap} = \frac{F_{fr}}{R_B} \geq 1.0 ,$$

де μ – коефіцієнт тертя поверхні.

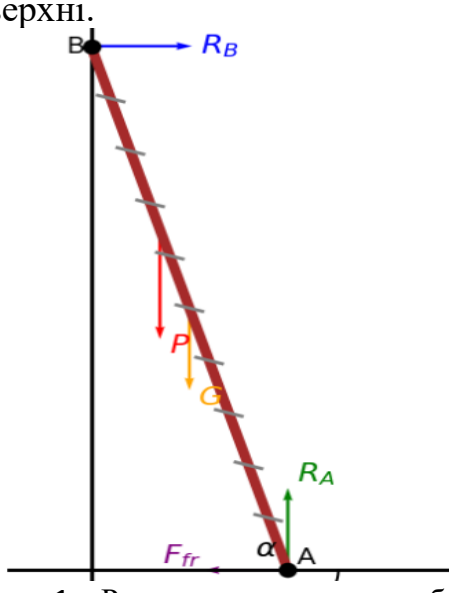



**Рисунок 1** – Розрахункова схема драбини

**Результати та аналіз.** Чисельний аналіз (рис.2 та таблиця 1) параметрів при зміні кута α від 30° до 85° зафіксував зростання сили $R_B$ та згинального моменту M у тятивах драбини при нахилі нижче 60°. При куті 45° момент у 2,5 рази вищий за номінальний, що загрожує незворотною деформацією алюмінієвих профілів.

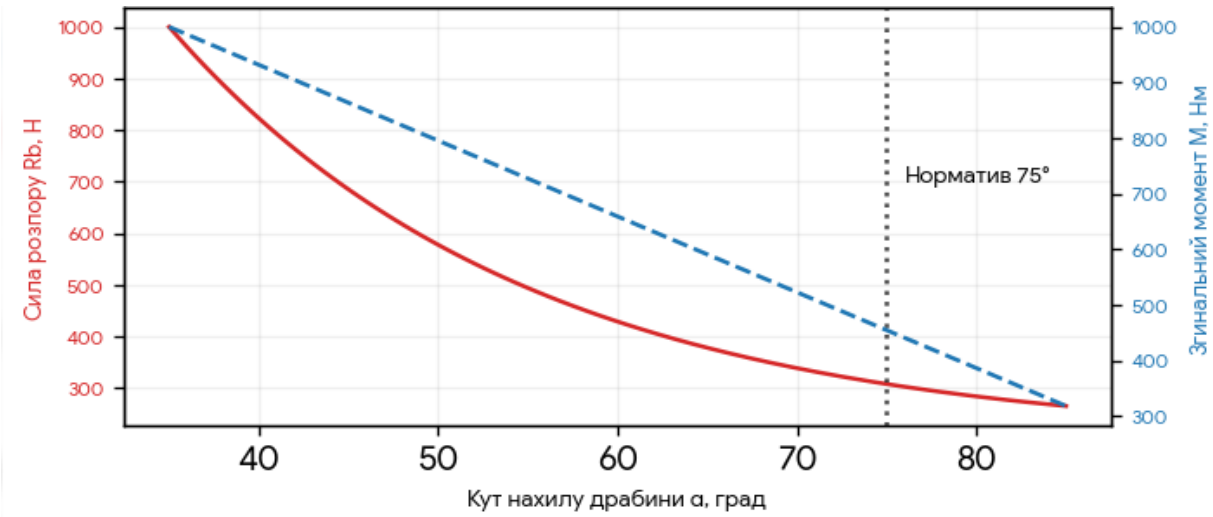



**Рисунок 2** – Залежність сили розпору та згинального моменту від кута нахилу драбини

| Тип опорної поверхні | Коефіцієнт тертя | Мінімальний кут нахилу, град | Запас стійкості $k_{zap}$ (при 75°) | Стан системи та ризики |
|---|---|---|---|---|
| Сухий асфальт | 0,25 | 40 | 2,24 | Висока стабільність, ковзання відсутнє |
| Мокрий бетон | 0,35 | 55 | 1,30 | Стабільний робочий стан |
| Вологий ґрунт | 0,25 | 63 | 0,93 | Критичний стан (Ризик зсуву основи) |
| Ожеледиця | 0,1 | 78 | 0,37 | Аварійний стан (Миттєве ковзання) |

Для забезпечення нормативного кута 75 градусів від стіни до основи обчислюється як $a = L \cdot \cos\alpha$ . Для стандартної 4-метрової драбини: $a = 4 \cdot \cos 75^0 = 1.03$ м. Це математично обґрунтовує практичне правило «одного метра».

**Висновки та рекомендації.** Підтверджено, що кут 75° є оптимальним: він мінімізує згинальний момент у тятивах і забезпечує стійкість проти ковзання на більшості поверхонь за винятком ожеледиці та вологого ґрунту. Зменшення кута до 60° збільшує внутрішні напруження в металі на 40%, що викликає деформацію профілів. Обґрунтовано необхідність використання металевих башмаків для штучного збільшення коефіцієнта μ на слизьких покриттях до рівня безпечного порогу стійкості.

## Література

1. ДСТУ EN 1147:2019. Драбини пожежні переносні для пожежно-рятувальних служб. – К. : ДП «УкрНДНЦ», 2021.

2. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів: Підручник. – К. : Вища школа, 2004. — 655 с.

***Д. Кондратенко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КАВІТАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОЖЕЖНИХ НАСОСАХ ПІД ЧАС ЗАБОРУ ВОДИ З ВІДКРИТИХ ВОДОЙМ

**Вступ та актуальність теми.** Експлуатація пожежних насосів під час забору води з відкритих водойм супроводжується критичними перехідними режимами (запуск, вакуумування, різка подача). Саме в ці моменти виникає перехідна кавітація (transient cavitation), що призводить до «прихованої» ерозії робочих коліс, навіть якщо манометри показують норму. Наслідками цього процесу є глибока піттингова ерозія, наскрізне викришування металу лопаток та передчасний вихід техніки з ладу (рис. 1).



**Рисунок 1 –** Характерні приклади кавітаційної ерозії та наскрізного викришування лопаток відцентрових коліс

**Мета роботи:** побудова комплексної моделі кавітації, що поєднує кінематику колапсу бульбашки та динаміку перехідних процесів у всмоктувальній лінії для визначення безпечних часових та геометричних меж роботи.

**Математична модель.** Для оцінки руйнівного потенціалу використано відоме рівняння Релея-Плессета, яке описує зміну радіуса R кавітаційної бульбашки в часі t, [1]:

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4v}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{2\sigma}{\rho R}=\frac{1}{\rho}\left[P_B(t)-P_\infty(t)\right]_{/}$$

Чисельний розв'язок показує, що при руйнуванні бульбашки виникає кумулятивний струмінь із локальним тиском до 1200 МПа, що перевищує межу текучості будь-якої сталі.

Для опису гідравлічного удару та падіння тиску у всмоктувальному рукаві використано модель перехідних процесів Майкла Чищевського, [2]. Ключовим параметром є час перебування рідини $t_{res}$ у всмоктувальній лінії довжиною L при швидкості потоку v:

$$t_{res} = \frac{L}{v}.$$

Згідно з моделлю Чищевського, якщо час перехідного процесу (наприклад, відкриття засувки) $t_{trans} < t_{res}$ у системі виникає хвиля розрідження (transient vacuum). Рівняння падіння наявного кавітаційного запасу $NPSH_\alpha$ у цей момент має вигляд:

$$NPSH_\alpha(t) = NPSH_{steady} - \Delta H \cdot e^{-\frac{t}{t_{res}}},$$

де $\Delta H$ – амплітуда гідравлічного стрибка. Якщо $NPSH_\alpha(t)$ падає нижче необхідного кавітаційного запасу насоса, миттєво розвивається кавітаційний зрив (рис.2).

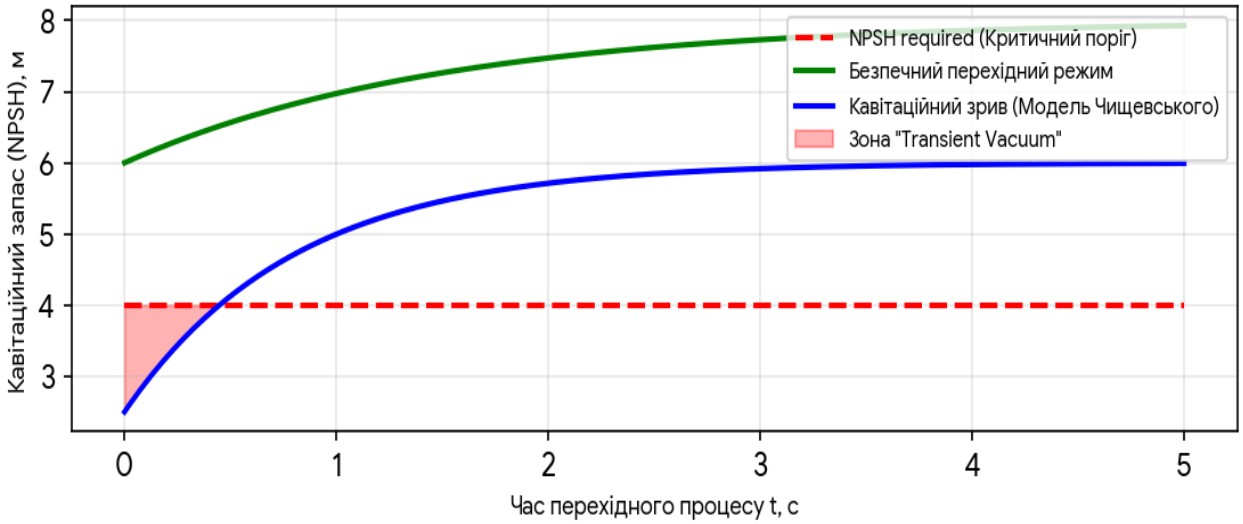



**Рисунок 2** – Динаміка зміни кавітаційного запасу..

**Результати моделювання.** На основі виконаних розрахунків за для стандартних всмоктувальних рукавів діаметром 125 мм встановлено критичні межі часу перехідних процесів (таблиця 1).

| Висота всмоктування, м | Час перебування $t_{res}$, с | Ризик перехідної кавітації | Рекомендація |
|---|---|---|---|
| < 3.5 | < 0.5 | Мінімальний | Штатний режим |
| 3.5 – 7.0 | 0.5 - 1.2 | Середній | Плавне відкриття вентилів |
| > 7.5 | > 1.5 | Критичний | Використання гідроелеваторів |

**Висновки.**

1. Доведено, що класичного розрахунку статики недостатньо. Моделювання виявило, що при висоті забору понад 7,5 м час перебування рідини у рукаві стає критичним. Це призводить до утворення «перехідного вакууму» при запуску насоса, навіть якщо стаціонарного кавітаційного запасу теоретично вистачає.
2. Саме цей короткочасний режим (тривалістю 1–2 с) генерує імпульси тиску до 1200 МПа (за Релеєм-Плессетом), які накопичуються і руйнують метал, як показано на фото (рис.1).

3. Розроблено математично обґрунтовану рекомендацію для ДСНС: при висоті всмоктування > 7.5 м заборонено прямий забір води; обов'язкове застосування гідроелеваторних схем або вакуумних переривників.

**Література**

1. Plesset M. S. Cavitation Dynamics and Bubble Collapse / M. S. Plesset, A. Prosperetti // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1977. — Vol. 9. — P. 145–185.

2. Czyszczewski M. F. Transient Cavitation and Residence Time Modeling in Centrifugal Pumping Systems // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 2018. — Vol. 144, Issue 4. — P. 215–228.

***М. А. Каптованець***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Х. І. Ліщинська****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПСИХОЕМОЦІЙНОЇ РЕАБІЛІТАЦІЇ ФАХІВЦІВ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ПРОФЕСІЙ У ПІСЛЯКРИЗОВИЙ ПЕРІОД

Математичне моделювання процесу відновлення психоемоційного ресурсу фахівців екстремальних професій дозволяє кількісно оцінити їхні адаптаційні можливості після перенесеного стресу у критичних ситуаціях. Динаміка відновлення психоемоційного ресурсу $R(t)$ після надзвичайної ситуації описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Таке диференціальне рівняння враховує два важливих чинники: внутрішню психологічну стійкість як здатність системи до самовідновлення та внутрішній опір, що відображає вплив залишкових стресових факторів і втоми. Такий підхід дозволяє інтерпретувати процес відновлення як аналог фізичної системи з демпфуванням, де баланс між відновлювальними силами та втратами визначає характер поведінки системи.

Диференціальне рівняння процесу має вигляд

$$R'' + 2\beta R' + \omega_0^2 R = 0,$$

де параметр $\omega_0$ – коефіцієнт, що враховує рівень внутрішньої психологічної стійкості (резильєнтності), а коефіцієнт $\beta$ – рівень психологічного виснаження. Початкові умови відображають психоемоційний стан особистості відразу після інциденту: наприклад, значне виснаження ресурсу до рівня $R(0) = 0,2$ та відсутність миттєвої динаміки відновлення $R'(0) = 0$. Аналітичне розв’язок

цього рівняння дозволяє отримати функціональну залежність $R(t)$ для різних випадків, що визначаються співвідношенням параметрів $\beta$ та $\omega_0$.

Диференціальне рівняння розв'язується з використанням характеристичного рівняння $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$, корені якого визначають тип динаміки системи. У випадку, коли $\beta < \omega_0$, система перебуває у режимі згасаючих коливань, що відповідає «стійкому відновленню». Для параметрів $\beta = 0,4$, $\omega_0 = 1$ маємо дискримінант $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(0,16 - 1) < 0$, отже, отримаємо комплексно-спряжені корені: $r_{1,2} = -\beta \pm i\mu$, де $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 0,9165$. Загальний розв'язок набуде вигляду $R(t) = e^{-0,4t}\left(A\cos(0,9165t) + B\sin(0,9165t)\right)$. Це експоненційно згасаючі коливання, де психоемоційний ресурс поступово зростає до норми, демонструючи хвилеподібну динаміку. Використовуючи початкові умови, знаходимо сталі: $A = 0,2$, а з умови $R'(0) = 0$ отримуємо $B = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,9165} \approx 0,0873$. Отже, $R(t) = e^{-0,4t}\left(0,2\cos(0,9165t) + 0,0873\sin(0,9165t)\right)$. Така поведінка відображає природні коливання емоційного стану: періоди покращення можуть змінюватися короткочасними регресами, причому період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{0,9165} \approx 6,85$ доби. Однак загальна тенденція залишається позитивною. Важливим є те, що наявність коливань у цьому контексті не є патологічною, а свідчить про активну роботу адаптаційних механізмів психіки.

Інший характер має розв'язок у випадку $\beta > \omega_0$, коли спостерігається аперіодичний режим. Для значень $\beta = 1,2$, $\omega_0 = 1$ маємо $D = 4(1,44 - 1) > 0$, тобто корені дійсні та від'ємні: $r_{1,2} = -1,2 \pm \sqrt{1,44 - 1}$, звідки $r_1 \approx -0,5367$, $r_2 \approx -1,8633$. Загальний розв'язок набуде вигляду $R(t) = C_1 e^{-0,5367t} + C_2 e^{-1,8633t}$. Для початкових умов маємо систему: $C_1 + C_2 = 0,2$, $-0,5367C_1 - 1,8633C_2 = 0$, звідки $C_1 \approx 0,333$, $C_2 \approx -0,133$. Таким чином, $R(t) = 0,333e^{-0,5367t} - 0,133e^{-1,8633t}$. Система демонструє повільне наближення до рівноважного стану без коливань. Такий сценарій інтерпретується як «повільне згасання», при якому високий рівень внутрішнього опору суттєво обмежує швидкість відновлення. Відсутність коливань свідчить про низьку реактивність системи та брак внутрішнього ресурсу для активного відновлення, що може відповідати станам емоційного вигорання або формуванню депресивних тенденцій.

Порівняння двох режимів показує, що не лише швидкість, але й форма траєкторії відновлення є діагностично значущою характеристикою. Так, аналіз

показує, що у першому випадку функція має екстремуми, які визначаються умовою $R'(t)=0$, тобто виникають локальні підйоми та спади, однак амплітуда коливань експоненційно зменшується. У другому випадку $R'(t)>0$ для достатньо великих $t$, а поведінка визначається домінуванням повільнішого експоненційного члена $e^{-0,5367t}$.

Практична цінність моделі полягає у можливості інтерпретації параметрів як об'єктів психологічного впливу. Зокрема, зменшення коефіцієнта $\beta$ може досягатися через зниження тривожності, нормалізацію сну, психологічну декомпресію та соціальну підтримку. Водночас підвищення $\omega_0$ пов'язане з розвитком внутрішньої стійкості, тренуванням навичок саморегуляції та формуванням ефективних захисних механізмів. Таким чином, модель дозволяє не лише описувати, але й цілеспрямовано впливати на процес відновлення через зміну її параметрів.

Додатково модель дозволяє оцінити часові межі функціонального відновлення. Встановлення порогового рівня $R \geq 0,85$ як критерію готовності до обмеженої професійної діяльності дає змогу визначити орієнтовний час повернення до служби. Для коливального режиму цей момент настає швидше, тоді як у аперіодичному випадку досягнення порогу є значно повільнішим, що вимагає додаткових психологічних втручань.

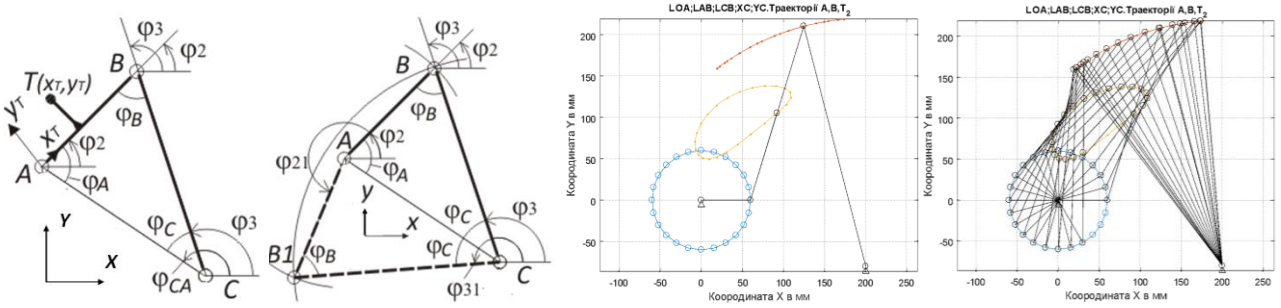
Отже, запропонована математична модель є ефективним інструментом аналізу, що поєднує інструментарій диференціальних рівнянь із прикладними задачами психологічної підтримки. Вона сприяє глибшому розумінню механізмів відновлення, дозволяє прогнозувати динаміку стану особистості та обґрунтовувати управлінські рішення щодо організації реабілітаційних заходів.

***Н. В. Кравс***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***В. М. Гелетій****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та інженерної графіки*

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО І СИЛОВОГО АНАЛІЗУ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

Графічні методи аналізу важільних механізмів практично перестають бути ефективним інструментарієм дослідження важільних механізмів з причини їх трудомісткості і низької точності Заміна ручної графіки на комп‘ютерну вирішує лише проблему точності і не дозволяє ефективно оцінювати механізм за різними критеріями упродовж усього циклу роботи. Недоліком використання твердотільного моделювання при аналізі механізмів є закритість алгоритмів аналізу і складність їх застосування при синтезі механізмів. Тому реалізація аналітичних методів аналізу механізмів відкритими алгоритмами і програмними продуктами з ефективною візуалізацією одержаних результатів є достатньо актуальним завданням.

Кінематичний аналіз плоских важільних механізмів аналітико-числовими методами зводиться до аналізу геометрії структурних груп. Для структурної групи 2 класу 1 виду ( див. рис.), яка складається з ланок *AB* і *BC* за вхідні параметри приймаємо координати зовнішніх кінематичних пар $x_A$, $y_A$ і $x_C$, $y_C$, та довжини ланок $l_{AB}$ і $l_{BC}$, а вихідними координати кінематичної пари *B* ($x_B$, $y_B$ ) і кути $\varphi_A$, $\varphi_B$, $\varphi_C$, $\varphi_{CA}$, $\varphi_2$.




Алгоритм розв‘язку цієї задачі полягає в послідовному застосуванні наступних формул

$$l_{AC}^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2 \quad \varphi_B = \arccos[(l_{AB}^2+ l_{BC}^2\, l_{AC}^2)/( 2l_{AB}\cdot l_{BC})],$$

$$\varphi_A = \arcsin[(l_{BC} / l_{AC}) \cdot \sin(\varphi_B)], \quad \varphi_C = 180^0 - \varphi_A - \varphi_B,$$

$$\varphi_{CA}= \text{arctg}\,[(y_A-y_C) / (x_A-x_C)] + 0{,}5\cdot\pi \cdot [1-\text{sign}(y_B-y_A)],$$

$$\varphi_3 = \varphi_{CA} + pp \cdot\varphi_C, \qquad \varphi_2 = \varphi_3 + pp \cdot\varphi_B.$$

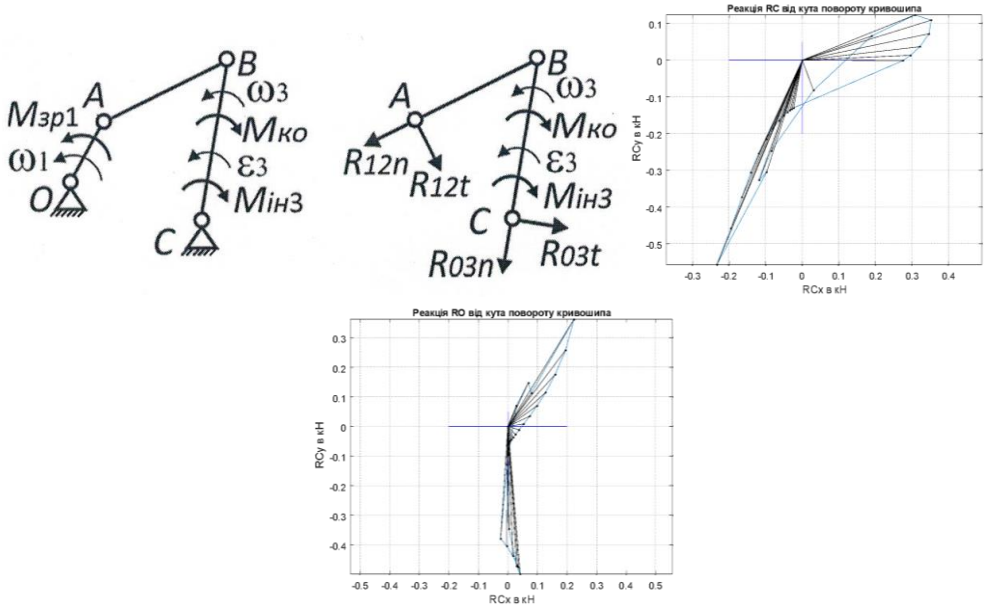
Проблеми аналітико-числового методу – це неоднозначність розв’язку рівнянь, які описують геометрію механізму (варіанти складання ланок), складність опису топології механізму і візуалізації руху ланок.

Комп'ютерна програма визначає положення точок і ланок механізму, виконує покрокову графічну побудову положень ланок за повний оберт

кривошипа , формує масиви числових значень кінематичних параметрів та їх екстремальні значення.

Силовий або кінетостатичний аналізу механізму для заданого закону руху його вхідної ланки, базується на принципі Д‘Аламбера, згідно з яким до активних зовнішніх зусиль, що діють на механізм додаються зусилля інерції і далі розглядаються умови статичної рівноваги цієї системи сил. Основна мета силового аналізу механізму визначити реакції в кінематичних парах і необхідне зусилля, які потрібно прикласти до вхідної ланки для забезпечення заданого закону руху.

Силові параметри обчислюються не графічними побудовами, а за допомогою аналітичних співвідношень між геометричними параметрами механізму і проекціями відповідних сил. Нижче. показана розрахункова схема і приклад візуального представлення результатів розрахунку реакцій в кінематичних парах механізму впродовж повного циклу його роботи




Математичні методи аналізу плоских важільних механізмів і розроблені комп'ютерні програма реалізують покрокову візуалізацію і графічне представлення кінематичних та силових параметрів механізмів та визначають їх екстремальні значення. Перспективи подальших досліджень пов’язані з врахуванням тертя в кінематичних парах та розв’язанням задач параметричного синтезу плоских важільних механізмів

## Література

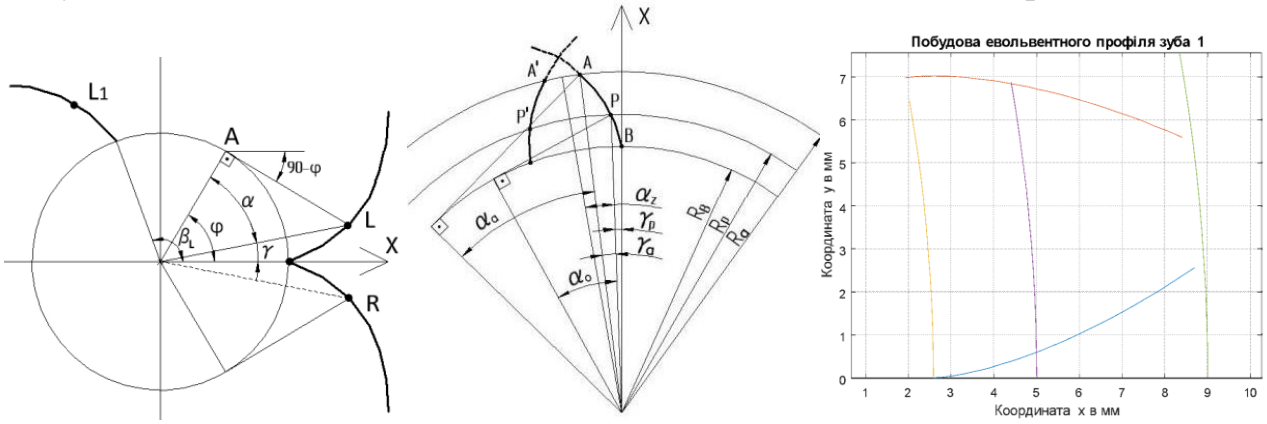
1. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К. Наук. думка. 2002.-660с.
2. Uicker J.J., Pennock G.R., Shigley J.E. Theory of Machines and Mechanisms. Oxford University Press. 2003. 744 p.
3. Пасіка В.Р., Гелетій В.М. Аналітичний метод у дослідженні важільних механізмів ІІ класу: Навчальний посібник – Дрогобич: «Посвіт», 2019. – 142 с.
4. Гелетій В.М. Теорія машин і механізмів : практикум. Львів: СПОЛОМ, 2025. 152 с. : рис., табл. Бібліогр.: с. 77 (7 назв). Текст: укр., англ.

***В. М. Місюк***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***Я. А. Зінько****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та інженерної графіки*

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ ЗУБЧАСТИХ І КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

Побудова евольвентного профілю зуба і профілю кулачка є актуальними завданнями, які можуть бути виконані як графічними методами так і аналітичними з послідуючою комп'ютерною реалізацією. Графічні методи недостатньо точні і трудомісткі і лише завдяки наочності і можливості додаткової перевірки правильності одержаних результатів використовуються в навчальному процесі. Заміна ручної графіки на комп'ютерну вирішує лише проблему точності і не дозволяє ефективно проводити синтез цих профілів за різними критеріями Недоліком використання твердотільного моделювання є закритість алгоритмів аналізу і складність їх застосування при синтезі механізмів.

Аналітико числовий метод геометричного синтезу зубчастого зачеплення базується на аналітичних залежностей, які описують евольвентні профілі зубців Побудова евольвенти і евольвентного профілю зуба показані на рис.1.




*а* *б* *в*

**Рисунок 1** – Побудова евольвентного профілю зуба в Декартових координатах

Аналітичні вирази для лівої і правої евольвент в Декартових координатах (рис. 1,а) представлені формулами

$$X_L =\cdot\ [cos\ cos\ (\varphi+\beta_L)\ +\varphi\cdot sin\ sin\ (\varphi+\beta_L)\ ],$$

$$Y_L =\cdot\ [sin\ sin\ (\varphi+\beta_L)\ -\varphi\cdot cos\ cos\ (\varphi+\beta_L)\ ].$$

$$X_R =\cdot\ [cos\ cos\ (\beta_R-\varphi)\ -\varphi\cdot sin\ sin\ (\beta_R-\varphi)\ ],$$

$$Y_R =\cdot\ [sin\ sin\ (\beta_R-\varphi)\ +\varphi\cdot cos\ cos\ (\beta_R-\varphi)\ ].$$

$$\gamma = tg\alpha-\alpha,\qquad \varphi=\alpha+\gamma,\qquad \varphi=tg\alpha.$$

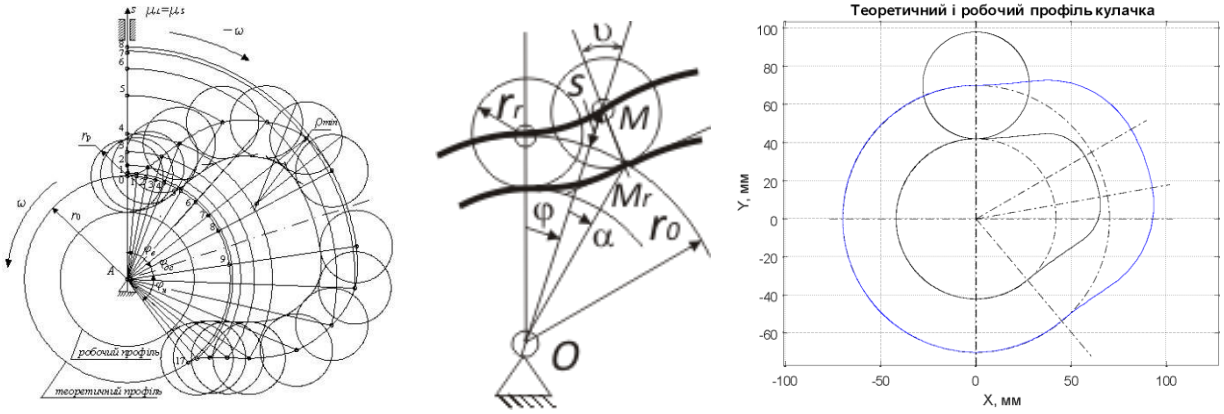
Розроблені на їх основі комп'ютерні програми виконують розрахунок геометричних параметрів зуба, візуалізацію побудови його профілю і визначення якісних характеристик зубчастого зачеплення.

Для побудови теоретичного і робочого профілів кулачка може бути використаний алгоритм, який полягає у представлені кута повороту кулачка у вигляді масиву дискретних значень *(i=1,…,n)* і визначенні відповідних їм полярних координат точок теоретичного *($R_i$, $\varphi_i$)* і робочого *($r_i$, $\varphi_i$)* профілів кулачка.

Координати робочого профілю кулачка в полярній системі координат визначаються з трикутника *OMMr* (Рис.) за формулами

$$r_i = \sqrt{R_i^2 + r_R^2 - 2 \cdot R_i \cdot r_R \cdot cosv_i}, \quad \alpha_i = arcsin(r_R \cdot sin\, sin\, v_i / r_i)$$

Тут $r_i$ $\alpha_i$ полярні координати робочого профілю кулачка для заданих значень $\varphi_i$ на фазі віддалення.




Математичні методи синтезу механізмів і розроблені комп'ютерні програма реалізують покрокову візуалізацію і графічне представлення профілів механізмів та визначають їхні характеристики. Перспективи подальших досліджень пов’язані з розв’язанням задач параметричного синтезу таких механізмів

## Література

1. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К. Наук. думка. 2002.-660с.
2. Uicker J.J., Pennock G.R., Shigley J.E. Theory of Machines and Mechanisms. Oxford University Press. 2003. 744 p.
3. Гелетій В.М. Теорія машин і механізмів : практикум. Львів: СПОЛОМ, 2025. 152 с. : рис., табл. Бібліогр.: с. 77 (7 назв). Текст: укр., англ.

***Х. Ю. Кучма***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **М. І. Кучма**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТА ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬЦЕВИХ ПІДПИСІВ НА ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ

Активний розвиток інформаційних технологій вимагає нових підходів до забезпечення конфіденційності користувачів. Одним із таких інструментів є кільцеві підписи (Ring Signatures) — криптографічні протоколи, які дозволяють одному з учасників групи підписати повідомлення від імені всієї групи без розкриття своєї ідентичності [4–7]. Вперше концепція кільцевих підписів була сформульована Рон Рівест, Аді Шамір та Яель Тауман у 2001 році [1].

На відміну від протоколів сліпого підпису, кільцевий підпис приховує саме джерело підпису, а не зміст повідомлення [2]. Це забезпечує застосування кільцевого підпису в задачах кібербезпеки, зокрема, в системах електронного голосування, захисті викривачів та анонімних комунікаціях [5, 6].

Математичною основою сучасних схем кільцевих підписів є еліптичні криві над скінченними полями [3]. Еліптичну криву над полем $F_p$ задають рівнянням Вейєрштрасса:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b\ (p\ ),$$

де коефіцієнти $a, b \in F_p$ задовольняють умову невиродженості

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \text{ [3].}$$

Множина точок такої кривої утворює абелеву групу.

Для побудови криптографічних примітивів використовують операцію додавання точок на кривій. Сумою двох точок $P(x_1, y_1)$ та $Q(x_2, y_2)$ є точка $R(x_3, y_3)$, яку визначають через кутовий коефіцієнт $\lambda$ січної [3, 8]:

$$\lambda \equiv \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(p\ ),$$

$$x_3 \equiv \lambda^2 - x_1 - x_2(p\ ),$$

$$y_3 \equiv \lambda(x_1 - x_3) - y_1(p\ ).$$

У випадку подвоєння точки $(P = Q)$, нахил дотичної $\lambda$ обчислюють за формулою:

$$\lambda \equiv \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}(p\ ).$$

Основним елементом безпеки є скалярне множення точок $P = xG$, яке полягає у послідовному додаванні точки $G$ до самої себе $x$ разів. Складність зворотної операції — знаходження скаляра $x$ за відомими точками $P$ та $G$ (задача ECDLP) , яка забезпечує криптостійкість протоколу.

Нехай $G$ – базова точка порядку $q$, а $p$ – характеристика поля $F_p$. Для кожного користувача визначаються приватний ключ $x \in Z_q$ та відкритий ключ $P = xG$ [3]. Безпека базується на складності задачі дискретного логарифмування на еліптичних кривих [3].

Нехай задано кільце відкритих ключів $P_1, P_2, \dots, P_n$. Алгоритм формування підпису базується на узагальненні схеми Schnorr та побудові циклічної залежності значень:

$$c_{j+1} = H(m, r_j G + c_j P_j),$$

де $H$ – криптографічна хеш-функція [2,3]. Підписувач обчислює значення у такий спосіб, щоб замкнути цикл, у результаті чого всі учасники кільця є обчислювально нерозрізнюваними.

Практичне застосування кільцевих підписів реалізується у криптовалютах, зокрема, в системі Monero, де використовують модифіковані схеми (LSAG, CLSAG) [5, 6]. У таких схемах застосовують додаткові відкриті ключі (decoy), що підвищує рівень анонімності [5]. Подальший розвиток ідеї кільцевих підписів привів до реалізації кільцевих конфіденційних транзакцій (RingCT), які дозволяють приховувати не лише відправника, але й суму транзакції [6].

Перевагами кільцевих підписів є високий рівень анонімності, відсутність централізованого управління та криптографічна стійкість [2, 3]. Водночас збільшення кількості учасників кільця призводить до зростання розміру підпису та обчислювальних витрат, що створює проблему масштабованості [2].

Отож, кільцеві підписи на еліптичних кривих є ефективним інструментом сучасної криптографії, що поєднує строгі математичні основи з практичною значущістю в задачах захисту інформації.

**Література**

1. Rivest R., Shamir A., Tauman Y. *How to Leak a Secret*. ASIACRYPT, 2001.

2. Liu Z.-H., Hu Y.-P., Mu N., Ma H. A survey of ring signature. Frontiers of Electrical and Electronic Engineering in China. 2008. Vol. 3, No. 1. P. 10–19. URL: https://academic.hep.com.cn/fee/CN/10.1007/s11460-008-0012-8

3. Boneh D., Shoup V. A Graduate Course in Applied Cryptography. Stanford University. 2020. URL: http://toc.cryptobook.us/

4. Що таке кільцеві підписи? Gate Learn. URL: https://www.gate.com/uk/learn/articles/what-are-ring-signatures/7497

5. Cryptocurrency Privacy Technologies: Ring Signatures. Ventral Digital. 2023. URL: https://ventral.digital/posts/2023/9/27/cryptocurrency-privacy-technologies-ring-signatures/

6. Ring Signatures Explained. Binance Square. URL: https://www.binance.com/uk-UA/square/post/8714995353497

7. Ring Signatures (Кільцеві підписи). Verbalexx. URL: https://verbalexx.com/uk/terms/ring-signatures/

8. Silverman J. H. The Arithmetic of Elliptic Curves. Springer. 2009. -462 p.

***О. Р. Юхим***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***Р. Я. Предко****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та інженерної графіки*

# МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ВІДІГРАЛИ КЛЮЧОВУ РОЛЬ У РОЗВИТКУ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

Технічна механіка є однією з фундаментальних інженерних дисциплін, яка вивчає закони руху, рівноваги матеріальних тіл та їхню взаємодію під дією сил. Її розвиток нерозривно пов'язаний із досягненнями математики, які забезпечили можливість точного опису фізичних процесів і створення інженерних розрахунків. Метою даного дослідження є розгляд основних математичних відкриттів, що мали вирішальний вплив на розвиток технічної механіки.

*Диференціальне та інтегральне числення.* Одним із найважливіших математичних відкриттів є диференціальне та інтегральне числення, створене у XVII столітті. Воно стало основою для опису руху тіл, оскільки дозволяє досліджувати зміну фізичних величин у часі.

Похідна використовується для визначення швидкості та пришвидшення, тоді як інтеграл дозволяє обчислювати переміщення, роботу сили та енергію. У технічній механіці ці інструменти застосовуються для аналізу руху, розрахунку навантажень і дослідження механічних систем.

*Диференціальні рівняння*. Теорія диференціальних рівнянь є невід'ємною частиною сучасної механіки. Більшість фізичних законів формулюються саме у вигляді таких рівнянь. Вони дозволяють описувати рух тіл під дією сил, а також аналізувати складні механічні процеси.

Диференціальні рівняння широко застосовуються при розрахунках коливань, динаміки машин і механізмів, а також у задачах стійкості конструкцій. Вони забезпечують можливість не лише описувати, а й прогнозувати поведінку систем.

*Векторний аналіз*. Векторний аналіз відіграє важливу роль у розвитку технічної механіки, оскільки дозволяє враховувати як величину, так і напрям фізичних величин. Використання векторів значно спростило опис сил, швидкостей і прискорень.

Завдяки цьому методу стало можливим ефективно розв'язувати задачі статики та динаміки, аналізувати просторові системи та досліджувати обертальний рух тіл. Векторний підхід є основою сучасних інженерних розрахунків.

*Чисельні методи та комп'ютерне моделювання*. У сучасній технічній механіці важливе місце займають чисельні методи, які дозволяють розв'язувати складні задачі, що не мають точного аналітичного розв'язку. До таких методів належать методи скінченних різниць і скінченних елементів.

Завдяки розвитку комп'ютерних технологій стало можливим моделювати поведінку складних конструкцій, аналізувати їхній стан та оптимізувати інженерні рішення. Це значно підвищує точність і ефективність проєктування.

*Висновки.* Математичні відкриття стали основою розвитку технічної механіки. Диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, векторний аналіз і чисельні методи забезпечили можливість точного опису та аналізу механічних систем.

Сучасна технічна механіка є результатом тісної взаємодії математики та інженерії, що дозволяє ефективно розв’язувати складні практичні задачі та створювати нові технології.

**Література**

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів. — Київ: Вища школа, 2012.
2. Тимошенко С.П. Курс теоретичної механіки. — Київ: Наукова думка, 2010.
3. Бойко В.В. Технічна механіка. — Харків: Фоліо, 2015.
4. Зінченко О.В. Диференціальні рівняння в прикладних задачах. — Львів: ЛНУ, 2019.

***В.-І. Копач***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***М. С. Нагорний****, старший викладач кафедри фундаментальних наук*

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ШИФРУВАННЯ У СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ БПЛА

У сучасних умовах ведення бойових дій безпілотні літальні апарати (БпЛА) є важливим елементом розвідки, спостереження та управління бойовими діями. Ефективність їх застосування значною мірою залежить від надійності каналів зв’язку та захищеності інформації, що передається між оператором і бортовими системами. Передача команд управління, координат цілей і телеметричних даних у відкритому вигляді створює загрозу їх перехоплення та аналізу противником. У зв’язку з цим актуальним є використання криптографічних методів захисту інформації.

Одним із базових підходів до шифрування є застосування матричних алгоритмів, що ґрунтуються на методах лінійної алгебри. Одним із таких методів є шифр Хілла, який належить до класу лінійних блочних шифрів. Його суть полягає у перетворенні текстового повідомлення у числовий вектор із подальшим множенням на матрицю-ключ. У результаті такого перетворення формується зашифроване повідомлення, яке визначається лінійною залежністю між відкритим текстом і ключем. Загальний процес шифрування описується співвідношенням:

$$C = (K \cdot P) \bmod n,$$

де $P$ – вектор початкового повідомлення, $K$ – матриця-ключ, $C$ – зашифроване повідомлення, $n$ – розмір алфавіту.

Відповідно, процес дешифрування здійснюється за допомогою оберненої матриці $P = \left(K^{-1} \cdot C\right) \bmod n$.

Розглянемо приклад дешифрування повідомлення, отриманого системою управління БпЛА. Нехай бортова система отримала зашифровану команду:

"ГСРАУФОЯН"

Це повідомлення відповідає команді наведення апарата на ціль. Для дешифрування використаємо український алфавіт, що складається з 33 літер. Кожній літері поставимо у відповідність число від 0 до 32, що зумовлено використанням арифметики за модулем 33, де множина можливих залишків має вигляд 0, 1, 2, …, 32, що забезпечує однозначне кодування символів та коректність виконання обчислень. Тоді: Г = 3, С = 21, Р = 20, А = 0, У = 23, Ф = 24, О = 18, Я = 32, Н = 17.

Отримуємо числову послідовність: $(3, 21, 20, 0, 23, 24, 18, 32, 17)$.

Розіб’ємо її на блоки по три елементи: $(3, 21, 20)$, $(0, 23, 24)$, $(18, 32, 17)$.

Нехай для шифрування використовувалася матриця-ключ: $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для виконання дешифрування необхідно знайти обернену матрицю $K^{-1}$ за модулем 33. Обернена матриця існує тоді і тільки тоді, коли визначник матриці $K$ має обернений елемент за модулем 33, тобто існує таке число, яке при множенні на визначник дає одиницю за модулем 33. У даному випадку $\det K = 14$, і для нього існує обернений елемент, тому обернена матриця існує. Обернена матриця обчислюється як добуток приєднаної (ад’юнктованої) матриці на обернений до визначника елемент. За модулем 33 це записується у вигляді: $K^{-1} = \left(\det K\right)^{-1} \cdot K^{*}$, де $K^{*}$ – приєднана матриця. Знайдемо обернений елемент до визначника за модулем 33. Для цього визначимо таке число, при множенні на $14$ якого отримується одиниця за модулем 33: $14^{-1} = 26$, оскільки $14 \cdot 26$ дає остачу 1 за модулем 33. Далі виконуємо множення приєднаної матриці на знайдений обернений елемент. Після цього кожен елемент отриманої матриці приводиться за модулем 33, тобто замінюється остачею від ділення на 33. У результаті отримуємо обернену матрицю $K^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & 21 & 31 \\ 31 & 7 & 21 \\ 21 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Далі виконаємо дешифрування за формулою: $P = \left(K^{-1} \cdot C\right) \bmod 33$. Застосовуючи обернену матрицю до першого блоку $(3, 21, 20)$, тобто знайшовши добуток $\begin{pmatrix} 26 & 21 & 31 \\ 31 & 7 & 21 \\ 21 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ 20 \end{pmatrix}$ з урахуванням операції взяття за модулем 33 маємо $\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Аналогічно, застосування дешифрування дає $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ для другого блоку й $\begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$ для третього блоку відповідно. Об’єднавши результати, маємо: $(17, 0, 2, 6, 5, 6, 17, 17, 32)$. Переводячи числові значення у буквений вигляд, отримуємо: Н, А, В, Е, Д, Е, Н, Н, Я.

Отже, результат дешифрування: "ГСРАУФОЯН" → "НАВЕДЕННЯ".

Отримане слово відповідає команді наведення БпЛА на ціль, що підтверджує коректність дешифрування та працездатність матричного алгоритму. Наведений приклад показує, що методи лінійної алгебри дозволяють ефективно кодувати й відновлювати інформацію, ускладнюючи її аналіз без знання ключа. У практиці БпЛА такі підходи застосовуються для захисту каналів зв’язку під час передачі координат, команд управління та телеметрії, що особливо важливо в умовах радіоелектронної боротьби. Водночас класичні матричні алгоритми мають обмежену криптостійкість, проте залишаються важливою теоретичною основою криптографії.

***Л. С. Товкач***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***М. І. Войтович****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

# ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СТРИЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ВІЙСЬКОВОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Військові мости на жорстких опорах будують для забезпечення подолання військовими підрозділами водних та інших природних і штучно створених перешкод на шляху їхнього руху, маневру, підвезення і евакуації. Вони дозволяють замінити понтонно-мостові засоби і механізовані мости для забезпечення переправи військ на водних перешкодах. Не дивлячись на те, що військові мости призначені для короткострокової експлуатації, вони повинні бути достатньо міцними і надійними. Експлуатація мостів в умовах бойових дій призводить до значних навантажень на конструктивні мостові елементи, що може призвести до втрати їх несучої спроможності. Рамні елементи, як одні з найважливіших компонентів мостів, особливо схильні до ризику руйнування. Тому дослідження їх напружено-деформованого стану,проведення оцінки міцності та несучої здатності є актуальною практичною задачею. Це вимагає більш відповідального проведення розрахунків стрижневих елементів інженерних споруд, зокрема, мостів на міцність.

Метою даної роботи є дослідження напруженого стану і міцності рамних елементів мостів різних поперечних перерізів на основі методу сил розрахунку статично невизначуваних стрижневих систем з використанням матричних підходів лінійної алгебри, проведення на цій основі розрахунку рамних елементів дерев'яних мостів під дією силового навантаження; вироблення пропозицій щодо підвищення їх міцності. Практична реалізація методу сил дозволяє звести розрахунок статично невизначуваних стрижневих систем до системи канонічних рівнянь, що є системою n лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими. Для її розв'язування можна використати метод Крамера, метод Гауса або матричний метод. Попередньо потрібно переконатись, що матриця коефіцієнтів невироджена, тобто що її визначник буде відмінний від нуля, а її ранг і ранг розширеної матриці системи канонічних рівнянь рівні між собою і рівні кількості цих рівнянь. В цьому випадку система канонічних рівнянь буде сумісною і визначеною.

Проведено дослідження напруженого стану плоского двічі статично невизначуваного рамного мостового елемента під дією зосередженого силового навантаження, оцінено його міцність. Для підвищення міцності рекомендовано замість круглих горизонтальних елементів використовувати прямокутні тої ж площі поперечного перерізу. Розташовувати горизонтальні прямокутні елементи необхідно так, щоб довша сторона прямокутника була вертикальною. Це приведе до зменшення максимальних нормальних напружень в брусі, а значить і до підвищення його міцності.

***О. І. Черкаський, М. О. Назаров***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних наук*

## ЗАСТОСУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР У ЗАДАЧАХ УРАЖЕННЯ ЦІЛЕЙ ПРОТИВНИКА

У сучасних умовах ведення бойових дій, що характеризуються широким застосуванням високотехнологічних засобів розвідки, ураження та радіоелектронної боротьби, особливого значення набуває використання математичних методів для обґрунтування рішень військовослужбовців. Однією з актуальних задач є вибір способу ураження важливих об'єктів противника, зокрема радіолокаційних станцій, ефективне знищення яких суттєво впливає на зниження його бойових можливостей. У таких умовах доцільним є застосування апарату теорії матричних ігор, який дозволяє формалізувати конфліктну взаємодію сторін та визначити оптимальні стратегії в умовах невизначеності. Разом із тим, у практичній діяльності військовослужбовців важливо мати не лише точні, але й оперативні методи розв'язування таких задач, що зумовлює актуальність використання наближених методів.

Розглянемо задачу вибору способу ураження радіолокаційної станції противника. Нехай підрозділ (гравець А) має дві стратегії: $A_1$ – артилерійський удар та $A_2$ – застосування ударних безпілотних літальних апаратів. Противник (гравець В) може реалізувати одну з двох стратегій: $B_1$ – застосування засобів радіоелектронної боротьби та $B_2$ – розосередження і маскування техніки. Ефективність ураження об'єкта оцінюється у вигляді виграшів гравця А, що задаються платіжною матрицею

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача полягає у визначенні оптимальних змішаних стратегій гравців та ціни гри. Оскільки матриця має розмір 2×2, можливе використання аналітичного розв'язку, проте з навчальною метою доцільно застосувати наближений ітераційний підхід, який є більш універсальним і може бути поширений на задачі більшої розмірності.

Наближений метод ґрунтується на багаторазовому розігруванні гри, у процесі якого кожен гравець послідовно обирає стратегію, орієнтуючись на попередні результати. Нехай на першому кроці гравець А обирає стратегію $A_1$ У відповідь гравець В обирає стратегію, яка мінімізує виграш А, тобто $B_2$, оскільки 2<4. На наступному кроці гравець А, враховуючи попередній результат, може змінити свою стратегію на $A_2$, після чого гравець В реагує вибором $B_1$, оскільки 1<5. У подальшому процес повторюється, і кожен гравець поступово обирає свою стратегію, знаючи вибір противника на попередньому кроці.

Позначимо через $p_k$ відносну частоту використання стратегії $A_1$ після k кроків, а через $q_k$ – частоту використання стратегії $B_1$. У процесі ітерацій ці

величини збігаються до оптимальних значень. Для оцінки ціни гри використовується середнє значення виграшу

$$V_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} H_i$$

де $H_i$ – виграш на і-му кроці.

Важливим практичним аспектом застосування наближеного методу є оформлення результатів обчислень у вигляді таблиці, що дозволяє наочно відстежувати динаміку процесу. У такій таблиці, як правило, фіксуються номер ітерації, вибрані стратегії гравців на кожному кроці, відповідні виграші, а також накопичені суми виграшів і відносні частоти використання стратегій. Це дає можливість не лише отримати кінцевий результат, але й зрозуміти механізм формування оптимальних стратегій виявити закономірності поведінки гравців у процесі багаторазового повторення гри.

Проведення декількох ітерацій дозволяє встановити, що частоти використання стратегій поступово стабілізуються. Зокрема, для даної матриці спостерігається збіжність до значень $p \approx 0,57$ та $q \approx 0,43$. Відповідна ціна гри наближається до значення $V \approx 3$.

Отримані результати узгоджуються з точним аналітичним розв'язком для гри розмірності 2×2, що для запропонованої задачі має вигляд

$$p = \frac{5-1}{4+5-2-1} = \frac{4}{6} \approx 0,67, \quad q = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = 0,5,$$

а ціна гри $V = \frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 1}{4+5-2-1} = \frac{18}{6} = 3$.

Незважаючи на певну різницю між наближеними та точними значеннями, ітераційний метод дозволяє отримати прийнятні оцінки за обмежений час, що є критично важливим у бойових умовах. Його перевагами є простота реалізації, можливість використання без складних обчислювальних засобів та адаптивність до зміни умов задачі. Водночас підвищення ефективності застосування цього методу досягається за рахунок його автоматизації із використанням сучасних цифрових інструментів, зокрема Microsoft Excel. Реалізація ітераційного процесу в середовищі електронних таблиць дозволяє швидко виконувати обчислення, автоматично оновлювати результати при зміні вихідних даних, а також наочно відображати динаміку збіжності у вигляді таблиці. Це не лише зменшує ймовірність обчислювальних помилок, але й значно підвищує зручність аналізу результатів, що є важливим при практичному застосуванні методів теорії ігор у військовій діяльності.

З військової точки зору отримані результати свідчать про доцільність комбінування способів ураження. Зокрема, артилерійський удар і застосування безпілотних літальних апаратів повинні використовуватися у певному співвідношенні, що ускладнює противнику вибір ефективної стратегії протидії. У свою чергу, противник також змушений варіювати застосування засобів радіоелектронної боротьби та маскування.

***С. О. Шкурат***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних наук*

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ОЦІНКИ ЛІНІЇ ВІЗУВАННЯ В АРТИЛЕРІЙСЬКИХ РОЗРАХУНКАХ

У сучасних умовах ведення бойових дій, що характеризуються високою динамічністю, широким застосуванням високоточної зброї та цифрових технологій управління, особливого значення набуває задача визначення умов прямої видимості між вогневою позицією та ціллю. Вона безпосередньо впливає на вибір способу ведення вогню, ефективність ураження та живучість підрозділів. З математичної точки зору ця задача зводиться до аналізу взаємного розташування прямої лінії у тривимірному просторі та поверхні, що описує рельєф місцевості, який у сучасних системах подається у вигляді цифрових моделей висот (Digital Elevation Model).

Нехай вогнева позиція задана точкою $O(x_0, y_0, z_0)$, а ціль – точкою $T(x_t, y_t, z_t)$ у декартовій системі координат. Лінія візування між цими точками описується параметричними рівняннями прямої у просторі

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_t - x_0), \\ y(t) = y_0 + t(y_t - y_0), \\ z(t) = z_0 + t(z_t - z_0), \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

Ці рівняння задають безперервну множину точок, що утворюють відрізок між позицією та ціллю. Рельєф місцевості розглядається як функція двох змінних $z = h(x, y)$, яка може бути задана аналітично або у вигляді дискретної сітки значень висот. У загальному випадку ця функція не є гладкою і потребує застосування чисельних методів інтерполяції.

Критерієм наявності прямої видимості є виконання нерівності

$$z(t) \geq h(x(t), y(t)), \quad \forall t \in [0,1].$$

У випадку існування хоча б одного значення параметра $t^*$, для якого виконується умова

$$z(t^*) < h(x(t^*), y(t^*)),$$

лінія візування перетинає рельєф, що означає наявність перешкоди та формування так званої «мертвої зони».

Для ілюстрації розглянемо конкретний приклад. Нехай вогнева позиція розташована у точці O(0,0,30), а ціль – у точці T(2000,1000,15), де координати задані у метрах. Лінія візування між цими точками описується параметричним рівнянням прямої, яка задає геометричне місце точок, що потенційно можуть бути використані для перевірки наявності перешкод:

$$\begin{cases} x(t) = 2000t, \\ y(t) = 1000t, \\ z(t) = 30 - 15t, \ t \in [0,1] \end{cases}.$$

Водночас рельєф місцевості моделюється як функція двох змінних

$$h(x, y) = 10 + 0{,}01x + 0{,}015y + 8sin\left(\frac{500}{x}\right),$$

що поєднує лінійне підвищення місцевості та хвилясту складову, яка імітує природні нерівності рельєфу.

Задача полягає у порівнянні висоти лінії візування з висотою рельєфу у відповідних точках простору. Для цього використовується параметричне рівняння прямої, де параметр $t \in [0,1]$ визначає положення точки між початковою та кінцевою позиціями. При кожному значенні параметра обчислюються координати точки на прямій та відповідне значення функції рельєфу. Якщо хоча б для одного значення параметра виконується умова, за якої висота прямої є меншою за висоту рельєфу, це означає наявність перешкоди на лінії візування.

Аналітичне дослідження показує, що висота променя змінюється лінійно зі зменшенням від 30 до 15 метрів, тоді як висота рельєфу зростає як за рахунок лінійної складової, так і внаслідок синусоїдальних коливань. Чисельний аналіз дозволяє встановити, що вже на початковій ділянці траєкторії виникає ситуація, коли рельєф перевищує висоту променя. Це свідчить про те, що між вогневою позицією та ціллю існує ділянка місцевості, яка перекриває лінію візування.

Візуалізація задачі у тривимірному просторі за допомогою відомих цифрових платформ підтверджує отримані аналітичні результати. Просторова модель демонструє перетин прямої лінії з поверхнею рельєфу, що інтерпретується як утворення «мертвої зони». Такий підхід є особливо ефективним у навчальному процесі, оскільки дозволяє курсантам інтуїтивно зрозуміти взаємне розташування геометричних об’єктів у просторі та вплив навіть незначних змін рельєфу на видимість цілі.

З військової точки зору отриманий результат означає неможливість ведення вогню прямим наведенням по заданій цілі. У таких умовах необхідно застосовувати стрільбу з закритих вогневих позицій, використовувати навісні траєкторії або змінювати розташування вогневих засобів чи пунктів спостереження. Крім того, подібні розрахунки лежать в основі функціонування сучасних геоінформаційних систем та автоматизованих систем управління вогнем, що використовують цифрові моделі місцевості для підвищення ефективності бойового застосування артилерії.

Таким чином, розглянута задача є прикладом ефективного поєднання теоретичних методів аналітичної геометрії та практичних потреб військової справи. Її використання у навчальному процесі сприяє формуванню у курсантів просторового мислення, навичок математичного моделювання та здатності приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності та обмеженої видимості.

***Н. П. Юрко***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. Б. Сокульська,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних наук НАСВ*

## ДИЗ'ЮНКТИВНІ ТА КОН'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ У ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

У сучасному світі математика є не лише теоретичною наукою, а й потужним інструментом аналізу та прийняття рішень. Одним із важливих напрямів є математична логіка, яка дозволяє формалізувати складні процеси через висловлення та логічні операції над ними. Особливу роль у цьому відіграють диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми, які широко застосовуються у прикладних задачах, зокрема в технічних і військових системах.

Актуальність теми зумовлена необхідністю швидкої обробки інформації та прийняття рішень у складних умовах, де важливими є точність, надійність і швидкість. У військовій сфері це проявляється у задачах аналізу бойової обстановки, управління підрозділами, виявлення загроз і обробки сигналів у режимі реального часу.

Основою розгляду є логічні операції над висловленнями: кон'юнкція (І), диз'юнкція (АБО), заперечення (НЕ), імплікація та еквівалентність. Ці операції дозволяють будувати математичні моделі, які описують умови функціонування систем.

Диз'юнктивна нормальна форма (DNF) є об'єднанням кількох умов, де достатньо виконання хоча б однієї. Це дозволяє формалізувати задачі пошуку або виявлення. Наприклад, задача виявлення загрози може бути сформульована так: «Ціль класифікується як ворожа, якщо (тип сигналу відповідає шаблону 1) АБО (спостерігається характерна траєкторія) АБО (відсутній відповідь системи "свій-чужий")».

Кон'юнктивна нормальна форма (CNF), навпаки, використовується для опису задач, де необхідне виконання всіх умов. Наприклад, задача оцінки готовності підрозділу може бути сформульована так: «Операція дозволяється, якщо (погодні умови допустимі) І (розвіддані підтверджені) І (ризик втрат не перевищує допустимий рівень)».

Такі задачі природно описуються у CNF, оскільки всі обмеження є критично важливими.

Важливим аспектом є також оптимізація логічних виразів. Складні формули можуть бути спрощені без втрати змісту, що дозволяє зменшити обчислювальні витрати. Наприклад, вираз виду $(A \land B) \lor (A \land \neg B)$ еквівалентний просто A, що значно спрощує реалізацію.

Разом з тим, алгоритмізація аналізу сигналів у задачах розпізнавання, фільтрації та класифікації інтенсивно розвивається під впливом ідей дискретної та булевої алгебри. Перетворення описів логічної структури прийомів обробки сигналів у канонічні нормальні форми — диз'юнктивну (DNF) та кон'юнктивну

(CNF) — забезпечує універсальний спосіб формалізації правил виявлення, побудови детекторів та синтезу логічних блоків для апаратної імплементації. DNF/CNF дозволяють однозначно представити булеві функції та застосовуються при оптимізації логічних виразів і створенні ефективних алгоритмів обробки [1].

Завдання аналізу сигналів формалізується як набір булевих функцій від дискретних ознак (порогів, бітів коду, прапорів). Синтаксичні та семантичні методи перетворення формул у DNF/CNF можна здійснювати через побудову повних нормальних форм за допомогою таблиць істинності, застосовуючи перетворення за законами Де-Моргана та розподільності, а також використання алгебри імплікант (Quine–McCluskey, алгоритми мінімізації) для спрощення виразів. Для великих розмірностей розглядаються алгоритмічні стратегії, що поєднують евристичну мінімізацію з розбиттям на локальні підзадачі, та підхід до кодування реальних величин у булевий простір (бінаризація, порогова квантізація) [1,2].

Таким чином, за допомогою DNF і CNF можна знаходити розв’язки таких типів військово-прикладних задач:

1) просте виявлення паттернів (логічні шаблони): DNF часто природніше відображає набір альтернативних (АБО) умов, що робить її більш зручною для швидкої апаратної перевірки;

2) складні фільтри з послідовними вимогами: CNF зручніша для формалізації умов «всі вимоги повинні бути виконані»;

3) оптимізація апаратних реалізацій: комбіновані підходи з використанням мінімізації імплікант дозволяють зменшити апаратну складність при збереженні чутливості алгоритму [1,2].

Використання нормальних форм прискорює розробку детекторів та тригерів для реального часу, сприяє прозорості правил ухвалення рішень і полегшує верифікацію логіки. Крім того, сучасні підходи до інтерпретованості нейромереж демонструють, що булеві/комбінаторні представлення (аналогічні DNF/CNF) можуть бути корисними для аналізу дискретних компонентів високорівневих моделей розпізнавання сигналів [2].

Таким чином, нормальні диз’юнктивна та кон’юнктивна форми становлять цінний інструментарій в алгоритмізації аналізу сигналів, особливо коли потрібно отримати явні, перевірені логічні умови для апаратної імплементації або верифікації. Рекомендовано застосовувати комбіновані методи: первинне представлення у DNF/CNF для формалізації вимог, далі — мінімізацію імплікант та евристичне розбиття задачі для масштабування, а також взаємну перевірку для підвищення надійності та пояснюваності рішень.

**Література**

1. Disjunctive normal form. Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Disjunctive_normal_form (дата звернення: 08.12.2025).

2. García-Olmedo F. M. et al. Mathematical Foundation of a Functional Implementation of a Conjunctive Normal Form Boolean Function. MDPI. 2023. Vol. 16, Issue 10. URL: mdpi.com/1999-4893/16/10/459 (дата звернення: 08.12.2025).

***В. Ю. Бабійчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Т. В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЗАКОНУ БУГЕРА − ЛАМБЕРТА – БЕРА

Для експериментальних досліджень концентрації $CO_2$ у приміщенні використовують багатофункціональний прилад Xintest HT-2000 [1,2]. Роглянуто ринцип роботи NDIR-сенсора який ґрунтується на вибірковому поглинанні інфрачервоного випромінювання молекулами $CO_2$ у вузькій спектральній області.

Міру кількості випромінювання обрано інтенсивність $I$ , що по своєму фізичному змісту представляє кількість енергії випромінювання, падаючого на одиницю поверхні в одиницю часу. Абсолютне вимірювання інтенсивності являє собою складну задачу і для практичних цілей завжди використовують відносні методи вимірювання тому, що поглинання світла речовиною носить вірогідний характер. Це означає, що якою б не була інтенсивність падаючого світла, речовина при даних умовах поглине завжди одну і ту саму частку енергії, тобто відношення інтенсивностей падаючого випромінювання і випромінювання, яке пройшло крізь речовину, є сталою величиною при даних умовах і не залежить від абсолютної інтенсивності. При проходженні через середовище світловий потік з початковою інтенсивністю $I_0$ частково поглинається середовищем ( $I_n$ ), а частина світла відбивається від меж поділу фаз і розсіюється ( $I_{відб}$ ). Решта світла проходить крізь розчин ( $I_t$ ). Таким чином:

$$I_0 = I_{відб} + I + I \quad , \qquad (1).$$

Зв’язок між інтенсивністю падаючого світла і світла, що пройшло крізь шар речовини встановлено за законом Бугера − Ламберта, згідно з яким однорідні шари однієї й тієї ж речовини з однаковою товщиною поглинають одну й ту ж частку падаючої на них світлової енергії (при постійній концентрації речовини). Математично це виражається наступним чином:

$$I_t = I_0 \cdot e^{-al} \quad , \qquad (2)$$

де $e$ − основа натурального логарифму; $a$ − коефіцієнт поглинання, який залежить від природи поглинаючої речовини і довжини хвилі падаючого світла; $l$ − товщина шару. Величина $\frac{I_t}{I_0} = T$ характеризує пропускання світла. Пропускання змінюється від 0 до 1. Величина $T$, співвіднесена до товщини шару розчину в 1 см, називається коефіцієнтом пропускання. Поглинання світла характеризується величиною абсорбції $A$, котра дорівнює оберненому десятковому логарифму пропускання:

$$-lgT = lg\frac{I_0}{I_t} = A \quad , \qquad (3)$$

Величина абсорбції змінюється від 0 до ∞. Сучасні прилади дозволяють вимірювати $A \leq 2$. Зв'язок між абсорбцією і концентрацією поглинаючого розчину виражено законом Бера, згідно з яким абсорбція розчину пропорційна концентрації розчиненої речовини при постійній товщині шару розчину:

$$A = lg\frac{I_0}{I_t} = k_1 c, \quad (4)$$

де $k_1$ – коефіцієнт пропорційності; $c$ – концентрація речовини.

Об'єднаний закон Бугера – Ламберта – Бера встановлює залежність інтенсивності монохроматичного світлового потоку, який пройшов крізь шар забарвленого розчину, від інтенсивності падаючого потоку світла, концентрації забарвленої речовини і товщини шару розчину:

$$I_t = I_0 \cdot 10^{-kcl}, \quad (5)$$

Після перетворень одержимо:

$$lg\frac{I_0}{I_t} = klc, \quad (6)$$

де $k$ – коефіцієнт поглинання, залежить від виду розчиненої речовини, температури, розчинника і довжини хвилі. Із закону світлопоглинання випливає, що абсорбція пропорційна концентрації речовини.

Отримана графічна залежність абсорбції від концентрації (калібрувальний графік) показано на (рис. 1).

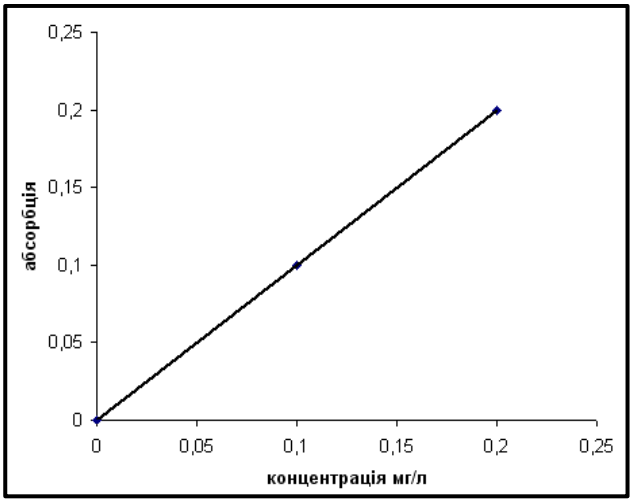



**Рисунок 1** – Залежність абсорбції від концентрації речовини

## Література

1. Гембара Т. В., Марич В. М. Диференціальне рівняння управління припливно-витяжною системою вентиляції за вмістом $CO_2$ у приміщенні. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. пр. IV Всеукр. наук.-практ. конф. викладачів та фахівців-практиків, Львів, трав. 2024 р. Львів: ЛДУ БЖД, 2024. С. 34–35.

2. Гембара Т. В., Марич В. М., Трусевич О. М. Математичне моделювання роботи системи припливно-витяжної вентиляції в стаціонарному та нестаціонарному режимах. Охорона праці: освіта і практика *:* зб. наук. пр. V Всеукр. наук.-практ. конф. викладачів та фахівців-практиків, Львів, трав. 2025 р. Львів : ЛДУ БЖД, 2025. С. 79–81.

***М. Р. Лапігуска***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Т. В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ВЕКТОРНО-МАТРИЧНИЙ ДОБУТОК НА ОСНОВІ ФАКТОРИЗАЦІЇ ТА ОПТИМАЛЬНОГО БЛОЧНОГО РОЗБИТТЯ

У задачах цифрової обробки сигналів векторно-матричний добуток на основі факторизації та оптимального блочного розбиття часто є проблематичним та трудоємким.

Для квадратної матриці A=[$a_{ij}$] розміром N*N з елементами $a_{ij}$=±1 алгоритм обчислення векторно-матричного добутку на основі факторизації вимагає поетапного розбиття матриці на блоки B (підматриці) розміром N*m. Для обчислення добутку підматриці B розміром N*m (N>>m) на відрізок вектора вхідного сигналу H розділили останній на дві частини H=(H1,H2). Довжина H1 та H2 визначається як:

H1=H2=m/2, якщо m=0 mod 2;

H1=(m+1)/2 и H2=(m−1)/2, якщо m≠0 mod 2.

Розбиття підматриці B на блоки проведено аналогічним чином. Тоді процедуру множення відрізка вектора H на підматрицю B представлено у вигляді:

$$B \cdot H = \begin{bmatrix} B_0 1 & B_0 2 \\ B_1 1 & B_1 2 \\ \vdots & \vdots \\ B_N 1 & B_N 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ --- \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 1 \cdot H1 + B_0 2 \cdot H2 \\ B_1 1 \cdot H1 + B_1 2 \cdot H2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_N 1 \cdot H1 + B_N 2 \cdot H2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Якщо відомі добутки B*H1 та B*H2 то для обчислення B*H з урахуванням виключення повторюваності частинних сум та інверсій потрібно виконати не більше 2m-1 операцій типу додавання - віднімання. Для обчислення добутків B*H1 та B*H2 застосуємо аналогічну процедуру. Обмежимо поділ відрізка вектора H випадком, коли перша частина відрізка міститиме два ненульові елементи.

Визначили для прикладу необхідну кількість операцій для обчислення добуту відрізка вхідного вектора на підматрицю V розміром 20*5:

$$V = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&-1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1&1&-1&-1&1 \\ 1&-1&-1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&-1&-1&1&1&-1&-1&1&1 \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

Підматрицю V представили у вигляді добутку наступних матриць співмножників:

$$V = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1&0&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ 0&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&1&0&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&1&0&-1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&0&1&-1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&0&1&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ 1&-1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&1&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&1&-1&&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\ &&&&1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \end{bmatrix} \quad (3)$$

При послідовному множенні вектора на кожну з представлених матриць на першій ітерації необхідно виконати 4 операції типу додавання - віднімання, на другій ітерації - 4 операції, на третій ітерації необхідно виконати $2^{5-1}$=16 операцій типу складання-віднімання. Для множення вектора на цю підматрицю необхідно виконати 24 операції. У разі використання такого розбиття необхідно виконати 28 операцій. Загальна кількість операцій для обчислення векторно-матричного добутку на основі розглянутого (К1) та традиційного розбиття (К) для різних значень m представлено у табл.1.

**Таблиця 1.** – Порівняння необхідногочисла операцій типу додавання – віднімання при множенні вектора на підматриці

| m | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| К | 6 | 12 | 28 | 46 | 82 | 152 | 408 | 666 |
| К1 | 6 | 12 | 24 | 44 | 82 | 152 | 292 | 560 |

Подальший етап множення вектора на матрицю при використанні алгоритмів факторизації передбачає підсумовування результатів обчислення добутку відрізків вхідного вектора на матриці-блоки. Таким чином, техніка обчислення векторно-матричного добутку оптимально може бути представлена

у вигляді виконання внутрішньої (множення вхідного вектора на матриці блоки) та зовнішньої (складання результатів внутрішніх обчислень) процедур.

**Література**

1. Proakis, John G.; Manolakis, Dimitris G. (2007). *Digital signal processing* (4th ed.). Upper Saddle River, N.J: Pearson Prentice Hall. pp. 196–1982.

2. Holton, T. (2021). Digital Signal Processing: Principles and Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 1058 p.

***Н. В. Лоїк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Т. В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ ЯДРО ПРОГРАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО АНАЛІЗУ НАУКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ З ЦИВІЛЬНОЇ БЕЗПЕКИ

Предметна наукова література з цивільної безпеки переконливо демонструє, що саме поле є багатокомпонентним, міждисциплінарним і вже активно описується текстоаналітичними методами [1]. Проте наявні методи здебільшого працюють із метаданими або тематичними картами, а не з лексичною організацією повного тексту. Отже, саме тут відкривається дослідницька ніша для поєднання філологічної інтерпретації та математичного моделювання.

Таким чином, підтверджена доцільність дослідження й водночас задає його межі: корпус має бути чітко окресленим, моделі – зіставлюваними, а інтерпретація – дисциплінарно й філологічно вмотивованою. Саме на цьому підґрунті можна переходити від огляду літератури до математичного моделювання, побудови програми й до аналізу реального корпусу англомовних статей з пожежної безпеки.

Після очищення тексту кожна стаття подається як послідовність токенів $w_1, w_2, \ldots, w_N$, де N – загальна кількість токенів у тексті. Токенами вважаються окремі слова після перетворення до нижнього регістру, вилучення більшості розділових знаків і відкидання надто коротких елементів. Множина різних словоформ тексту позначається через словник тексту $u_1, u_2, \ldots, u_V$, де V – кількість різних слів. Саме величини N і V є базовими для всіх розрахунків.

Класична форма закону Ципфа описує спадання частоти слова зі зростанням рангу:

$$f(r) = C \cdot r^{-s} . \quad (1)$$

Тут r = 1,2,…,V – ранг слова в упорядкованому за спаданням частот списку; f(r) – частота (кількість входжень) слова рангу r; C – масштабний коефіцієнт; s – показник степені (Zipf exponent). Для оцінювання параметрів використане логарифмування:

$$\log f(r) = \log C - s \cdot \log r \,. \quad (2)$$

Далі параметри (log C, s) визначено методом найменших квадратів як лінійну регресію y=a·x+b у просторі x=log r, y=log f. Діапазон апроксимації задано умовою $r \geq r_0$, щоб зменшити вплив «голови» розподілу (часто домінують службові слова та структурні елементи). Якість оцінюється коефіцієнтом детермінації $R^2$.

Модифікований закон Ціпфа використовується у формі Ципфа–Мандельброта

$$f(r)=C(r+q)^{-s} \quad . \quad (3)$$

Закон Хіпса (Heaps' law) описує зростання кількості різних слів зі збільшенням довжини тексту:

$$V(N) = K \cdot N^{\beta} \,, \quad (4)$$

де N – кількість токенів у префіксі тексту; V(N) – кількість різних слів у перших N токенах; K – коефіцієнт масштабу; β – показник (звичайно $0<\beta<1$).

У логарифмічних координатах отримано:

$$\log V(N) = \log K + \beta \cdot \log N \,, \quad (5)$$

обчислено профіль відхилення від Zipf-моделі:

$$\Delta(r) = \log f(r) - \log f_model(r). \quad (6)$$

Позитивні Δ(r) у середніх рангах можуть відповідати «тематичним» словам, які трапляються частіше, ніж очікує усереднена степенева модель.

Перед спектральним аналізом із залишкової функції вилучено середнє значення. Для послідовності отриманих значень обчислюється дискретне перетворення Фур'є. Комплексні коефіцієнти описують внесок різних частотних компонент у структуру залишкової функції. На основі коефіцієнтів Фур'є визначається спектральна потужність, аналізується перша половина спектра, оскільки для дійсних даних друга половина є симетричною. Обчислюється інтегральний показник загальної інтенсивності коливань залишкової функції EF, який вказує наскільки сильно емпіричний розподіл локально відхиляється від простої степеневої моделі. Далі використовується інтерполяція для усереднення по корпусу, оскільки окремі статті мають різну довжину та різний словник, їхні криві приводяться до спільних сіток. Описана математична модель є основою для побудови математичного ядра програми комп'ютерного аналізу. Для досліджень обрано 5 публікацій журналу Fire Safety. Результати програмних обчислень представлено на рис.1.

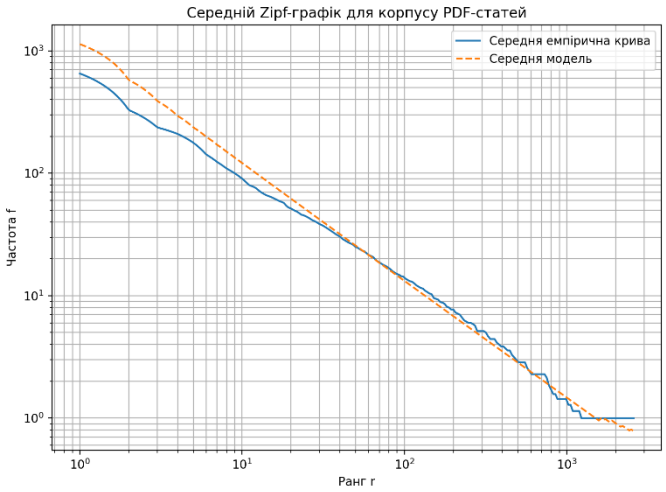



**Рисунок 1** – Результати обчислень за законом Ципфа

**Література**

1. Гембара, Т. В. Математичне моделювання та комп’ютерний аналіз лексичної структури наукових текстів на основі закону Ципфа. Збірник матеріалів IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Мова — кордон національної безпеки» берез. 2026 р. Львів: ЛДУ БЖД, 2026. С. 239–243.

***У. І. Гавілей***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Т. В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ОПТИМАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ПРОЦЕДУРИ ДЛЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянуто формальну сутність прикладних завдань кореляційної обробки зображень. Така обробка зображень важлива для роботи систем спостереження у галузі цивільної безпеки, а саме ідентифікації надзвичайних ситуацій.

Пошук об'єктів на зображенні шляхом зіставлення з стандартом є одним із головних способів виявлення. При цьому еталон порівнюється з усіма об'єктами, що знаходяться на зображенні, шляхом послідовного переміщення зображення, як правило, зліва направо, зверху вниз. Як оцінююча величина використовується взаємна кореляція між вхідним і еталонним зображеннями.

Кореляційний спосіб координатної прив'язки зображень полягає в поелементному порівнянні двох зображень одного і того ж об'єкта, отриманого різними датчиками або одним датчиком в різний час. При цьому формується величина, що вимірює кореляцію між двома зображеннями, і знаходиться положення максимуму кореляції функції. Сигнали, що характеризують кореляцію, надходять у автоматичний пристрій, який змінює взаємну орієнтацію еталонних і реальних об'єктів доти, поки показник їхнього збігу (функція кореляції) не перевищить значення порогової величини. Таким чином, розглянуті задачі обробки зображень, у загальному випадку, передбачають обчислення взаємної кореляції між двома зображеннями та подальшого порівняння її з порогом.

Кореляційна обробка передбачає роботу із зображеннями, представленими у растровому вигляді. Растрове зображення, у випадку, це двовимірна матриця, що з великого числа просторово упорядкованих дискретних елементів, кожен із яких може мати за однакових розмірів відмінне з інших елементів значення оптичних характеристик (колір, насиченість та інших.). Для бінарних зображень растрова матриця містить всього два види пікселів: 0 і 1. Растрове подання є дуже привабливим для його використання, оскільки має ряд істотних переваг у порівнянні з векторним поданням:

- відсутність будь-якої втрати інформації про об'єкти, що розпізнаються;
- простота обчислення деяких параметрів;
- відсутність необхідності в дуже трудомістких растр - векторних перетвореннях, які найчастіше забирають більшу частину часу, відведену на обробку зображень.

Загалом взаємна кореляція між двома растровими зображеннями $S_{n1,n2}$ и $X_{n1,n2}$ визначається як:

$$R_{s,x}[\tau_1,\tau_2]=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}S_{n1,n2}X_{n1-\tau1,n2-\tau2} \quad (1)$$

Для пошуку об’єкта розміром m×n на зображенні розміром M×N функцію кореляції потрібно обчислити для всіх (M-m+1)×(N-n+1) зміщень вікна в зоні пошуку. Отже, основний недолік кореляційних методів обробки у тому, що потрібні значні обчислювальні, отже, і часові витрати під час вирішення практичних завдань. При цифровій обробці, коли вхідний сигнал представляє потік чисел, оптимальна обробка реалізується з допомогою спеціалізованого обчислювача, або програмно, з використанням машинної обробки. В обох випадках час входження в синхронізм (декодування кодів методом максимальної правдоподібності) визначається кількістю елементарних операцій, які необхідно виконати. Завдання декодування коду методом максимальної правдоподібності зводиться до визначення номера максимальної компоненти вектора $B=(b_0,b_1,\ldots,b_{m-1})^T$, який є результатом обчислення функції кореляції між прийнятим словом та всіма можливими словами кодового словника. Отже, формальною сутністю процедур безпошукової синхронізації та декодування кодів методом максимальної правдоподібності є обчислення коефіцієнтів кореляції між вхідним сигналом та набором наявних послідовностей. Якість алгоритму множення матриці на вектор прийнято оцінювати коефіцієнтом обчислювальної складності S , рівним відношенню числа операцій, які необхідно виконати, до числа рядків матриці. Залежно від типу домінуючих операцій обчислювальна складність може бути:

- адитивна, тобто. що враховує тільки операції типу додавання - віднімання;
- мультиплікативна, тобто. що враховує тільки операції типу множення - ділення;

Для зменшення значного обсягу обчислень при кореляційному пошуку об'єктів та обробці сигналів запропоновано такі процедури:

1. Поєднання операції обчислення кореляції з операцією порівняння з порогом, тобто. обчислення кореляційних функцій припиняється для аналізованої позиції об'єкта на зображенні, якщо отримане значення кореляції на деякому кроці менше встановленого порога. 2. Обчислення двовимірної кореляції можна здійснити так:

виконати пряме перетворення на одному з базисів (Фур'є, Хаара чи Уолша-Адамара), тобто обчислити спектри для рядків аналізованого фрагмента

зображення та еталона шляхом множення рядків на матрицю коефіцієнтів базису, що використовується; обчислити поточковий добуток отриманих векторів;

- провести зворотне перетворення, тобто помножити отримані вектори на матрицю зворотного перетворення базису, що застосовується.

**Література**

1. Holton, T. (2021). Digital Signal Processing: Principles and Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 1058 p.

***Д. Р. Терлецька, О. П. Грищенко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **Л. Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ У МЕХАНІЦІ

Ефективним інструментом для опису руху, який має центральну симетрію або відбувається вздовж криволінійних траєкторій, наприклад, обертальний рух, рух по колу, рух по орбіті, є полярні координати.

Полярна система координат є двовимірною, в якій кожна точка на площині визначається двома числами - кутом $\varphi$ та відстанню $\rho$ (рис. 1).

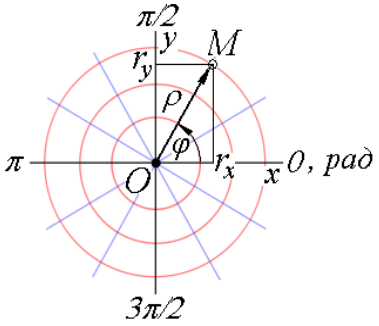



**Рисунок 1** – Положення точки в полярній системі координат

Для вивчення руху точки $M$ на площині використаємо полярну систему координат $\{\rho,\varphi\}$ (рис. 1). У такому разі кінематичні рівняння руху точки мають вигляд [1]

$$\rho = \rho(t),\ \varphi = \varphi(t), \tag{1}$$

де відстань $\rho$ - радіальна координата та кут $\varphi$ - кутова координата є функціями часу $t$.

Перехід від полярної системи координат до декартової виконують з урахуванням таких залежностей

$$x(t) = \rho\cos\varphi,\ \ y(t) = \rho\sin\varphi\ . \tag{2}$$

Після піднімання виразів (2) до квадрату та подальшого додавання, отримаємо:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\ .$$

З урахуванням того, що $\rho \geq 0$, формули зворотного переходу від декартової системи координат до полярної такі:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\qquad \varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x > 0, y \geq 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} + 2\pi, x > 0, y < 0; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}\ . \tag{3}$$

На рис. 2 показано траєкторії руху точки у полярній системі координат.

Траєкторію руху точки, яку називають спіраль Архімеда, коли $\rho(t) = 2 + 3t$, $\varphi(t) = t$ зображено на рис. 2 а.

Траєкторію, яку називають полярна роза, коли $\rho(t) = 2\cos(4t)$, $\varphi(t) = t$, показано на рис. 2 б.

Конічний переріз, для якого $\rho(t) = \dfrac{10}{1 + 0{,}6\cos(t)}$, $\varphi(t) = t$ для інтервалу $t \in [0{,}4\pi]$, показано на рис. 2 в.

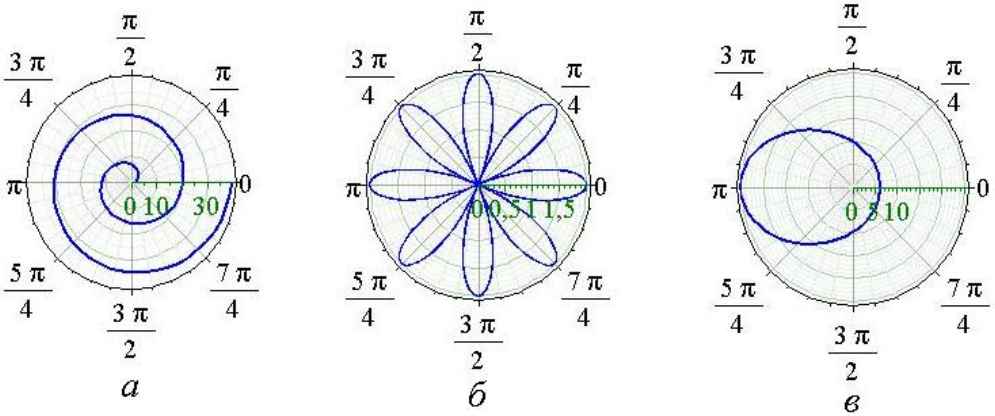



**Рисунок 2** – Траєкторії руху точки в полярній системі координат

Полярну систему координат доцільно застосовувати, коли положення точки найпростіше показати відстанню та кутом, уникаючи громіздких

тригонометричних залежностей у разі застосування прямокутної (декартової) системи координат. Полярну систему координат в механіці використовують для задач, коли важливо враховувати відстань до центра та кут.

У військовій справі полярну систему координат застосовують у радіолокації, коли координати цілі задають через дальність (відстань) та кут (азимут). У медичній практиці комп'ютерну томографію серця виконують у полярних координатах. У системах ідентифікації за райдужною оболонкою ока теж використовують полярну систему координат.

**Література**

1. Теоретична механіка. Навчальний посібник// Штанько П. К., Шевченко В. Г., Омельченко О.С., Дзюба Л. Ф., Пасіка В.Р., Поляков О. М. / Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 464 с.

2. https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/koord.pdf

***А. Ю. Дроботя***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **Л. Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РУХУ ШАТУНА, ОТРИМАНЕ НА ПІДСТАВІ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ІІ РОДУ

Рівняння Лагранжа ІІ роду - це диференціальні рівняння руху механічної системи, виражені через узагальнені координати $q_i$ та кінетичну енергію $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$, яка є функцією від узагальнених координат $q_i$, похідних по часу від узагальнених координат $\dot{q}_i$ та часу $t$. Узагальненими координатами називають набір незалежних змінних, які однозначно визначають положення механічної системи з $n$ ступенями вільності у просторі з урахуванням накладених в'язей. Для консервативних механічних систем диференціальні рівняння Лагранжа ІІ роду мають вигляд [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

де $Q_i$ - узагальнена сила, яка характеризує роботу зовнішніх сил при зміні узагальненої координати $q_i$.

Застосуємо рівняння Лагранжа ІІ роду для дослідження руху шатуна $AB$ масою $m$ завдовжки $l$, кінці якого обертальними кінематичними парами з'єднані з повзунами $A$ та $B$ (рис. 1). Повзуни ковзають під дією сили ваги шатуна по

напрямних $Ox$ і $Oy$. Нехтуючи масою повзунів і силами тертя в кінематичних парах, складемо диференціальне рівняння руху шатуна [2].

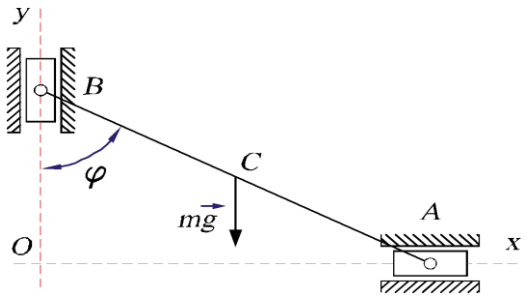



**Рисунок 1** – Розрахункова схема шатуна з двома повзунами

Шатун має один ступінь вільності, тому його положення будемо визначати однією узагальненою координатою - кутом $\varphi$. На рис. 1 зображена тільки активна сила - сила ваги $m\vec{g}$. Реакції в кінематичних парах між повзунами і стійкою не показуємо, тому що вони не ввійдуть у рівняння Лагранжа II роду. Відповідно до (1), для розрахункової схеми шатуна з повзунами запишемо рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q \quad . \tag{2}$$

Оскільки шатун виконує плоскопаралельний рух, то його кінетична енергія містить два доданки:

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_{Cz}\dot{\varphi}^2 \quad , \tag{3}$$

де $m$ - маса шатуна, $v_C$ - швидкість точки $C$, яка є центром мас шатуна, $I_{Cz}=\frac{ml^2}{12}$ - момент інерції маси шатуна відносно осі $Cz$, що проходить через точку $C$ перпендикулярно до площини руху, $\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}$ - кутова швидкість шатуна. Для обчислення швидкості точки $C$ запишемо її координати:

$$x_C(t)=\frac{1}{2}l\sin\varphi \quad , \quad y_C(t)=\frac{1}{2}l\cos\varphi \quad . \tag{4}$$

Диференціюючи вирази (4) за часом, отримаємо

$$\dot{x}_C(t)=\frac{1}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad , \quad \dot{y}_C(t)=-\frac{1}{2}l\dot{\varphi}\sin\varphi \quad . \tag{5}$$

З урахуванням (5) вираз для квадрату швидкості точки $C$ набуде вигляду:

$$v_C^2=\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2=\frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2 \quad . \tag{6}$$

Після підстановки виразів для $I_{Cz}$ та $v_C^2$ у (3), дістанемо залежність для кінетичної енергії шатуна

$$T=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2=\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad . \tag{7}$$

Для визначення узагальненої сили, запишемо вираз потенціальної енергії системи, вважаючи, що у горизонтальному положенні шатуна потенціальна енергія дорівнює нулю:

$$П(\varphi) = \frac{1}{2} ml\,\mathrm{g}\cos\varphi \quad . \tag{8}$$

Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті $\varphi$, і доданки, що входять у рівняння Лагранжа II роду, мають вигляд

$$Q = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} mgl\sin\varphi \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} ml^2\dot{\varphi} \; ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} ml^2\ddot{\varphi} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad . \tag{9}$$

Підсля підстановки виразів (9) у (3), отримаємо

$$\frac{1}{3} ml^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2} mgl\sin\varphi \quad ,$$

Звідси диференціальне рівняння руху шатуна

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi \quad .$$

## Література

1. Ропай В. А., Науменко О. Г., Киба В. Я. Застосування рівнянь Лагранжа II роду до рішення задач динаміки механічних систем – Дніпро: Національний гірничий університет, 2013. -56 с.

2. Теоретична механіка. Навчальний посібник// Штанько П. К., Шевченко В. Г., Омельченко О.С., Дзюба Л. Ф., Пасіка В.Р., Поляков О. М. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 464 с.

***Д. О. Киця***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Л. Ф. Дзюба****, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІГНУТОЇ ОСІ БАЛКИ НА ДВОХ ОПОРАХ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

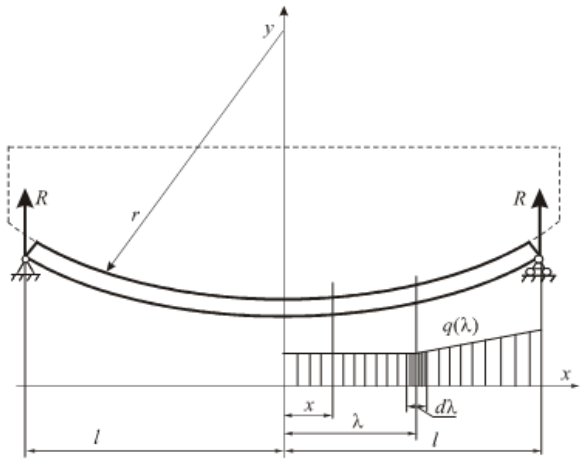



**Рисунок 1** – Схема згину балки штампом з постійним радіусом

Класична теорія згину Ейлера-Бернуллі не враховує наявність поперечних сил в перерізах балки. Однак для коротких та високих в перерізі балок врахування додаткових деформацій зсуву, викликаного поперечними силами, дає змогу виконати точніші розрахунки на міцність.

Для дослідження згину балки на двох опорах (рис. 1) перш за все потрібно записати диференціальне рівняння зігнутої осі балки з урахуванням деформації зсуву.

Балка від тиску штампа зігнеться по дузі кола радіуса $r = const$ відповідно до дуги основи штампа. Якщо під час розв'язування задачі виходити з відомої залежності, яка пов'язує радіус кривизни осі стержня зі згинальним моментом [1]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z},$$

то при $\rho = r = const$ згинальний момент $M$ має бути постійним, оскільки постійними є модуль Юнга $E$ та осьовий момент інерції перерізу $I_z$ зігнутої балки. Така балка має перебувати в умовах чистого згину у разі консольного закріплення одного кінця. Однак за заданої схеми навантаження балки на двох опорах (рис. 1) згинальний момент залежить від реакцій опор $R$ та розподіленого навантаження $q$. Це вказує на те, що в дослідженні згину потрібно враховувати не лише деформацію викривлення осі балки, пов'язану зі згинальним моментом $M(x)$, але і деформацію зсуву, яка залежить від величини поперечної сили $Q(x)$.

Для врахування деформації зсуву використаємо закон Гука при зсуві: $\tau = G\gamma$, де $G$ – модуль зсуву матеріалу балки, $\gamma$ – кут зсуву. При цьому слід взяти до уваги, що дотичні напруження в поперечному перерізі балки при зсуві не є постійними. Приймемо для врахування деформації зсуву найбільші дотичні напруження. Ці напруження визначають за формулою Журавського:

$$\tau = \frac{Q(x)\cdot S}{b\cdot I} = \frac{Q(x)}{A\cdot k},$$

де $k = \frac{I\cdot b}{A\cdot S}$ – коефіцієнт форми перерізу, $A, b, S$ – площа, ширина та максимальний статичний момент площі перерізу балки відповідно.

Урахувавши, що кут зсуву $\gamma = -\frac{dy_\theta}{dx} = \frac{\tau}{G} = \frac{Q(x)}{G\cdot A\cdot k}$, отримаємо:

$$\frac{d^2 y_\theta}{dx^2} = -\frac{1}{G\cdot A\cdot k}\cdot\frac{dQ}{dx},$$

де $y_\theta$ – переміщення точок осі балки від зсуву.

Сумарний прогин пружної осі балки з урахування деформації зсуву можна визначити з розв'язання диференціального рівняння [1]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z} - \frac{1}{G\cdot A\cdot k}\cdot\frac{dQ(x)}{dx}. \qquad (1)$$

Ураховуючи в (1), що $\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$, та ввівши позначення

$$\beta^2 = \frac{EI_z}{GAk} = \frac{2(1+\mu)}{k} i_z^{\,2},$$

де $i_z^{\,2} = \frac{I_z}{A}$ – радіус інерції поперечного перерізу балки, $\mu$ – коефіцієнт Пуассона матеріалу балки, отримаємо:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z}\left(M(x) + \beta^2 q(x)\right). \qquad (2)$$

Для заданої схеми навантаження балки (рис. 1) вираз для згинального моменту має вигляд:

$$M(x) = R(l-x) - \int_l^x q(\lambda)(\lambda - x)dx. \qquad (3)$$

Після підстановки (3) в (2) отримаємо диференціальне рівняння зігнутої осі балки з урахуванням деформації зсуву:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z}\left(R(l-x) - \int_l^x q(\lambda)(\lambda - x)dx + \beta^2 q(x)\right). \qquad (4)$$

## Література

1. Ольховий І. М. Дослідження згину балки симетричним штампом зі сталим радіусом кривизни / І. М. Ольховий, Л. Ф. Дзюба, О. В. Меньшикова// Наук. вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: РВВ НЛТУ України, 2013. - №23.7 – С. 341-346.

***А. П. Уманський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Л. Ф. Дзюба****, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

# СИСТЕМИ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ

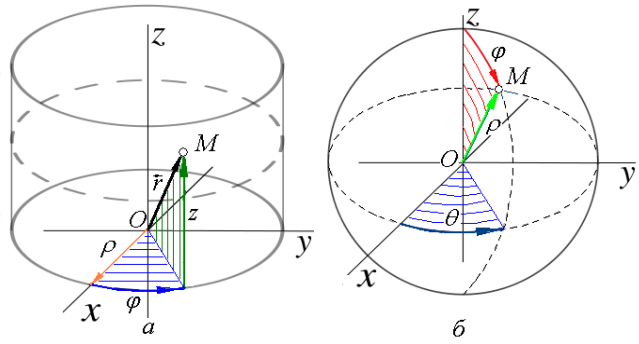



**Рисунок 1** – Криволінійні системи координат

Розглянемо дві системи криволінійних координат, які часто застосовують в механіці під час опису руху точки в тривимірному просторі. Такими є циліндрична (рис. 1 а) та сферична (рис. 1 б) системи координат.

За координати деякої точки $M$ в циліндричній системі координат приймають (рис. 1 а) такі координати:

1) $q_1 = q_1(x, y, z) = z$ - відстань $z$ від точки до площини $Oxy$, що визначена у вихідній ортонормованій декартовій системі координат $Oxyz$;

2) $q_2 = q_2(x, y, z) = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань $\rho$ від точки до осі $Oz$, що визначена в $Oxyz$; 3) $q_3 = q_3(x, y, z) = \varphi = arctg\dfrac{y}{x}$ - двогранний кут $\varphi$ між площиною $Ozx$ та площиною, що проходить через вісь $Oz$ і точку $M$, що теж визначені в $Oxyz$.

Якщо $q_1 = z = C_1 = const$, то маємо сімейство координатних поверхонь $R\Phi$, які є множиною площин, паралельних до площини $Oxy$. Якщо $q_2 = \rho = C_2 = const$, то сімейство координатних поверхонь $Z\Phi$ є множиною кругових циліндрів, центрами яких є вісь $Oz$. Якщо $q_3 = \varphi = C_3 = const$, то сімейство координатних поверхонь $RZ$ є множиною площин, що проходять через вісь $Oz$.

У разі, коли $q_2 = \rho = C_2 = const$, $q_3 = \varphi = C_3 = const$, отримаємо координатні лінії $Z$, що відповідають координаті $z$. Це прямі, паралельні осі $Oz$, які виникають унаслідок перетину координатних поверхонь з сімейств $Z\Phi$ та $RZ$ (рис. 2 а). У разі, коли $q_1 = z = C_1 = const$, $q_3 = \varphi = C_3 = const$ - маємо координатні лінії $R$, які є результатом перетину координатних поверхонь з сімейств $R\Phi$ та $RZ$ (прямі, що проходять через вісь $Oz$ та перпендикулярні до неї, рис. 2 б). Коли

$q_1 = z = C_1 = const$, $q_2 = \rho = C_2 = const$ - координатні лінії $\Phi$, утворюються на перетині координатних поверхонь з сімейств $R\Phi$ та $Z\Phi$ (кола з центрами на осі $Oz$ і паралельні площині $Oxy$, рис. 2 в).

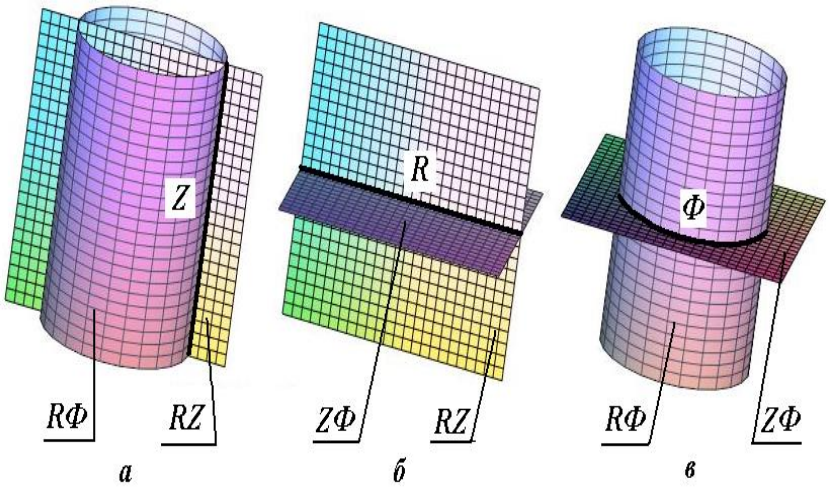



**Рисунок 2** – Координатні поверхні та координатні лінії циліндричної системи координат

Точка $M$ розміщена на перетині трьох координатних ліній $Z, R, \Phi$ (рис. 3).

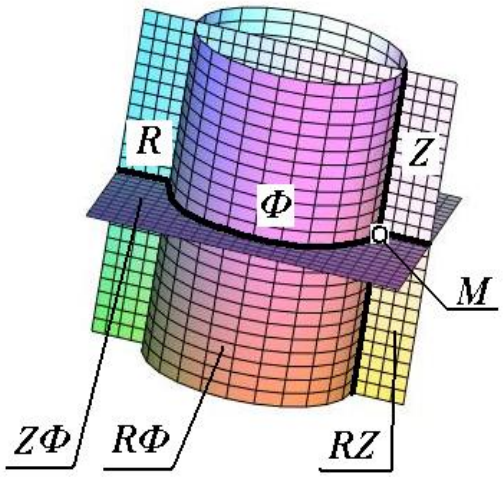



**Рисунок 3 –** Положення точки в циліндричній системі координат

Пряме перетворення декартових координат в циліндричні координати:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{1}$$

Зворотне перетворення циліндричної системи координат до декартової виконують за допомогою функцій

$$x = x(q_1, q_2, q_3) = \rho\cos\varphi, \quad y = y(q_1, q_2, q_3) = \rho\sin\varphi, \quad z = z(q_1, q_2, q_3) = z. \tag{2}$$

Полярна система координат є частковим випадком циліндричної.

За координати точки $M$ у сферичній системі координат (рис. 1 б) приймають:

- «полярний радіус» $\rho$ - модуль радіуса-вектора $\vec{r}$ точки $M$;
- «довготу» $\theta$ - двохгранний кут між площиною $Ozx$, яку називають площиною першого меридіана, та площиною, яка проходить через вісь $Oz$ і точку $M$;
- «широту» $\varphi$ - кут між площиною $Oxy$, яку називають площиною екватора, і радіус вектором $\vec{r}$ точки $M$. При цьому $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

**Література**

1. Теоретична механіка. Навчальний посібник// Штанько П. К., Шевченко В. Г., Омельченко О.С., Дзюба Л. Ф., Пасіка В.Р., Поляков О. М. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 464 с.

***В. П. Мулик***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ СТАЛЕВИХ СТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ЧАС ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВАННЯ

**Вступ та актуальність теми.** Проблема вогнестійкості сталевих конструкцій у сучасному будівництві стоїть надзвичайно гостро. Незважаючи на негорючість, сталь є дуже чутливою до високих температур. В умовах реальної пожежі нагрів не буває рівномірним і конструктивний елемент (наприклад, колона) піддається впливу полум’я лише з одного боку або в обмеженій зоні. Це створює температурний градієнт по перерізу, що призводить до нерівномірного теплового розширення та появи початкових деформацій. Розуміння механіки цього процесу дозволяє фахівцям з пожежної безпеки точніше прогнозувати час до обвалення будівлі.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Згідно з ДСТУ EN 1993-1-2, зниження міцнісних характеристик сталі починається вже при 400°C. Проте стандартні методики часто розглядають рівномірне нагрівання. Інженерний підхід потребує врахування нелінійної залежності модуля Юнга (E) від температури (T). Зміна властивостей матеріалу сталь Ст3пс (S235JR), відповідно до Eurocode 3 (EN 1993-1-2) показано на рис.1.

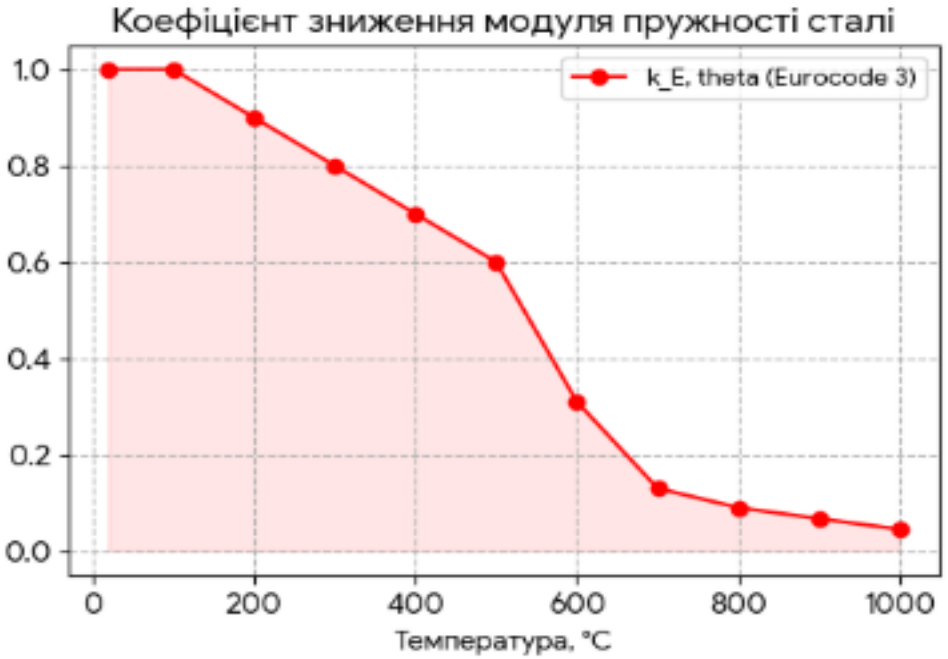



**Рисунок 1** – Залежність коефіцієнту зниження модуля Юнга від температури нагрівання для сталі Ст3пс (S235JR)

**Методика математичного моделювання.** Для дослідження було обрано модель вертикально стиснутого стержня (сталева колона), що працює в межах пружно-пластичної деформації. Для опису процесу деформування та визначення кінематики руйнування розроблено математичну модель на основі диференціального рівняння зігнутої осі стержня, яке враховує стан стиснутого елемента під впливом температурного фактора:

$$EJ\left(T\right)\frac{d^2y}{dx^2}+Py=P\cdot e_{th},$$

де EJ(T) – жорсткість перерізу, що зменшується в умовах термічного впливу; P – поздовжня стискаюча сила; y – прогин; $e_{th}$ – температурний ексцентриситет, викликаний нерівномірним розширенням волокон сталі по висоті.

**Результати моделювання.** Якщо стиснутий елемент жорстко защемлений між опорами, його лінійне теплове подовження блокується, трансформуючись у додаткову стискаючу силу термічного розпору. Втрата статичної рівноваги системи відбувається тоді, коли сумарне стискаюче зусилля зрівнюється з температурно-залежною критичною силою, обчисленою за формулою Ейлера. Формули для визначення внутрішньої сила розпору і критичної сили Ейлера відомі із курсу опору матеріалів і в даних тезах не наведено. Результати розрахунку сил розпору та критичної сили наведено на рис.2.

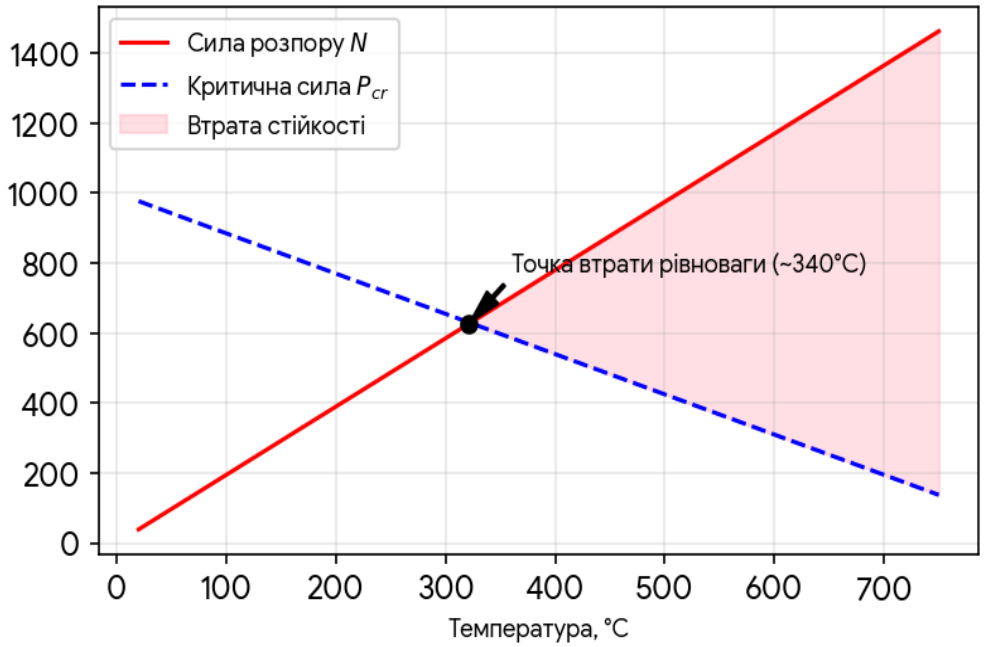



**Рисунок 2** – Залежність сили термічного розпору та критичної сили від температури локального нагрівання

**Практичне значення та висновки.** Доведено, що руйнування каркаса при пожежі є статико-геометричною проблемою виникнення критичних зусиль розпору та ексцентриситету, а не плавленням сталі. Обґрунтовано маркер безпеки для ДСНС: поява наочного прогину стійки чи колони на 2–3 см свідчить про вичерпання несучої здатності елемента (запас менше 10%) та є командою для негайної евакуації особового складу. Підтверджено інженерну необхідність обов'язкового проєктування конструктивних температурних швів, які нівелюють силу розпору і забезпечуючи додаткові 10–15 хвилин для евакуації людей.

## Література

1. Розрахунок сталевих конструкцій на вогнестійкість згідно Єврокоду 3 : Практичний посібник до ДСТУ-Н EN 1993-1-2:2010 / Український Центр Сталевого Будівництва (УЦСБ). — Київ, 2018.

2. The Impact of Local Heating Time of the Compressed Column on Its Loss of Stability / Structural Stability and Fire Safety Analysis // *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*. — 2020. — Vol. 17, Issue 1.

***М. Беззубка***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВУЗЛІВ РЯТУВАЛЬНОГО ІНСТРУМЕНТУ

**Вступ та актуальність теми.** Під час ліквідації наслідків дорожньо-транспортних пригод (ДТП) швидкість деблокування постраждалих безпосередньо залежить від надійності гідравлічного інструменту. Сучасні тенденції автомобілебудування спрямовані на широке впровадження високоміцних та надміцних сталей (бороміcткі, двофазні сталі класу AHSS/UHSS) у силових елементах кузовів. Це вимагає від розтискачів (рис.1) роботи на межі технічних можливостей за робочого тиску до 700 бар (70 МПа). Практика експлуатації показує, що за максимальних кутів розкриття ножів інструмент втрачає жорсткість, леза починають розходитися, що призводить до раптового критичного зламу центрального шарніра. Потреба у запобіганні таким аварійним відмовам без збільшення маси інструменту обумовлює необхідність точного аналізу його напружено-деформованого стану (НДС).




**Рисунок 1** – Загальний вигляд гідравлічного інструменту та приклад його застосування

**Мета дослідження:** математично визначити зони концентрації напружень та величину пружних переміщень в осьовому болті шарніра для обґрунтування методів локального зміцнення конструкції.

**Математична модель.** Оцінку критичного стану сталі 40ХН під робочим тиском у 700 бар (70 МПа) виконано за енергетичною умовою плинності Губера-Мізеса, яка враховує питому потенціальну енергію зміни форми, [1]. Математичний вираз для еквівалентних напружень через головні напруження має вигляд:

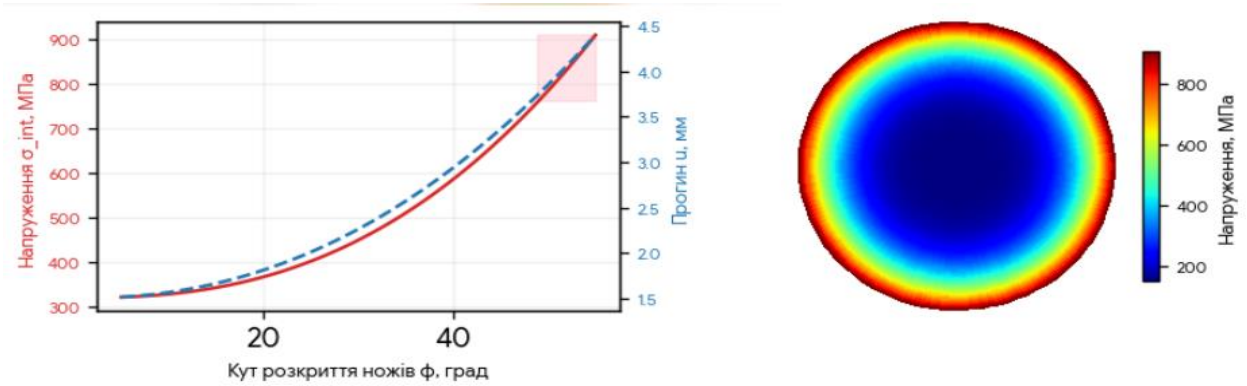
$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le \sigma_S$$

Зв'язок між тензором малих деформацій $\varepsilon_{ij}$ та пружними переміщеннями точок u(x, y, z) задається геометричними рівняннями Коші, [2]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Фізичне співвідношення описується законом Гука в тензорній формі через параметри Ламе. Прямий функціональний зв'язок між геометрією розкриття ножів та деструктивним станом осі шарніра обумовлений зміною передатних відношень механічних плечей. При збільшенні кута φ вектор зусилля штока переорієнтовується, і корисна сила розтискання трансформується у внутрішню реактивну бічну силу розклинювання. Ця сила діє на ножі як на важелі, створюючи нелінійно зростаючий еквівалентний згинальний момент відносно центрального шарніра.

**Результати та аналіз.** Збільшення кута розкриття ножів призводить до нелінійного зростання згинального моменту на осі і, як наслідок, нелінійної зміни напружено-деформованого стану (рис. 2.а). За кута розкриття ножів 55 градусів еквівалентні напруження сягають 910 МПа (рис. 2.а). Шарнір втрачає жорсткість, перетворюючись на деформовану систему з високим ризиком раптового крихкого зламу центральної осі. Прогин осі сягає 4.4 мм, що може спричинити розходження лез. Чисельний аналіз за методом скінченних елементів (МСЕ) показує нелінійний градієнт розподілу навантаження: центр болта залишається повністю розвантаженим (синя зона на рис. 2.б), а увесь контактний тиск (за формулами Герца) та пікові напруження зосереджені виключно на периферії.




а) б)

**Рисунок 2** – Параметри напружено-деформованого стану (а) та скінчено-елементна модель градієнта напружень (б).

**Висновки та рекомендації.** На основі змодельованого МСЕ-градієнта обґрунтовано неефективність повної зміни хімічного складу всього масиву осі. Оскільки нейтральна лінія болта при згині залишається розвантаженою, рекомендовано застосовувати виключно методи локального поверхневого зміцнення металу (азотування, хіміко-термічна обробка). Це забезпечить високу зносостійкість контактної периферії без втрати в'язкості серцевини вузла.

**Література**

1. Huber M. T. Specific work of strain as a measure of material effort // Czasopismo Techniczne. — Lwów, 1904. — Vol. 22. (p. 5).

2. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). Theory of Elasticity (3rd ed.). McGraw-Hill.

***К. Радзіонов***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТРАТИ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ВНАСЛІДОК ТЕРМІЧНОГО РОЗШИРЕННЯ ВІД ДІЇ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

**Вступ та актуальність теми.** Під час масштабних техногенних пожеж, зокрема на об'єктах нафтогазового комплексу, тримальні будівельні конструкції зазнають інтенсивного теплового опромінення задовго до безпосереднього контакту з відкритим полум'ям. Особливу небезпеку це становить для жорстко защемлених елементів, [1]. Теплове випромінювання викликає їх швидке лінійне розширення, яке через блокування опорами трансформується у колосальні внутрішні сили стиснення (рис.1). Механізм «термічної пастки» ініціює втрату стійкості елементів у критично короткі терміни.

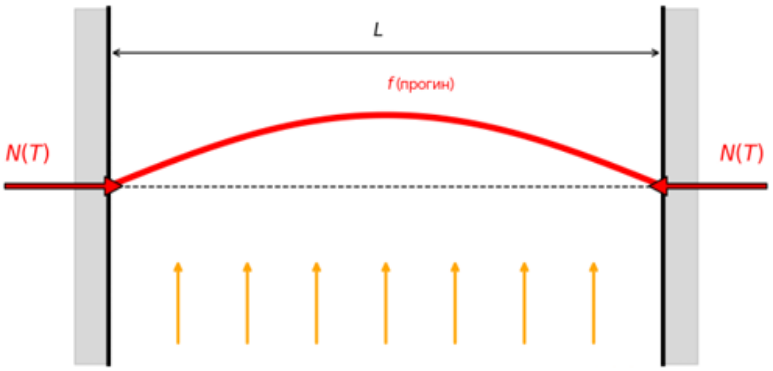



**Рисунок 1** – Розрахункова схема термічного розширення защемленої балки

**Мета дослідження:** побудувати математичну модель динаміки нагрівання від випромінювання защемленої сталевої колони та визначити критичний час її обвалення залежно від густини теплового потоку випромінювання.

**Математична модель.** На відміну від стандартних моделей конвективного пожежного нагріву, приріст температури конструкції T в часі t під дією теплового потоку випромінювання густиною q описується диференціальним рівнянням теплового балансу з урахуванням закону Стефана — Больцмана: [2]:

$$c \cdot \rho \cdot V \frac{dT}{dt} = A_s \cdot \left[ \varepsilon_{pr} \cdot q - \varepsilon_{st} \cdot \sigma_0 \cdot \left( \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_0}{100} \right)^4 \right) \right],$$

де c – питома теплоємність сталі; ρ - густина (7850 кг/м³); V - об'єм елемента; $A_S$ – площа опромінюваної поверхні; $\varepsilon_{pr}$- коефіцієнт поглинання (ступінь чорноти) поверхні; $\varepsilon_{st}$- коефіцієнт власного випромінювання сталі; $\sigma_0 = 5,67$ - стала Стефана — Больцмана.

Отримана функція температури T(t) інтегрується у рівняння термопружності для знаходження внутрішньої сили розпору N(t), [3]:

$$N(t) = \alpha \cdot \left[ T(t) - T_0 \right] \cdot E(T) \cdot A,$$

де E(T) — модуль Юнга, який нелінійно деградує відповідно до Eurocode 3, [1]

Критичний поріг, за якого конструкція втрачає статичну рівновагу і раптово вигинається, визначається за критерієм Ейлера, [3]:

$$P_{cr}(t) = \frac{\pi^2 \cdot E(T(t)) \cdot J}{(0.5 \cdot L)^2}.$$

Момент перетину функцій N(t) =$P_{cr}$(t) фіксує критичний час експлуатації конструкції.

**Результати та аналіз.** Моделювання виконано для густини теплового випромінювання q = 40 кВт/м² (характерно для горіння резервуара з нафтопродуктами на відстані до 15 м). Як показано на рис. 2, внаслідок теплового випромінювання температура металу стрімко зростає у перші хвилини. Перетин кривої діючої сили розпору та граничного порогу стійкості відбувається на 6,4 хвилині, коли температура досягає 295°C. Це точка розгалуження форм рівноваги, за якою стан стає нестійким.

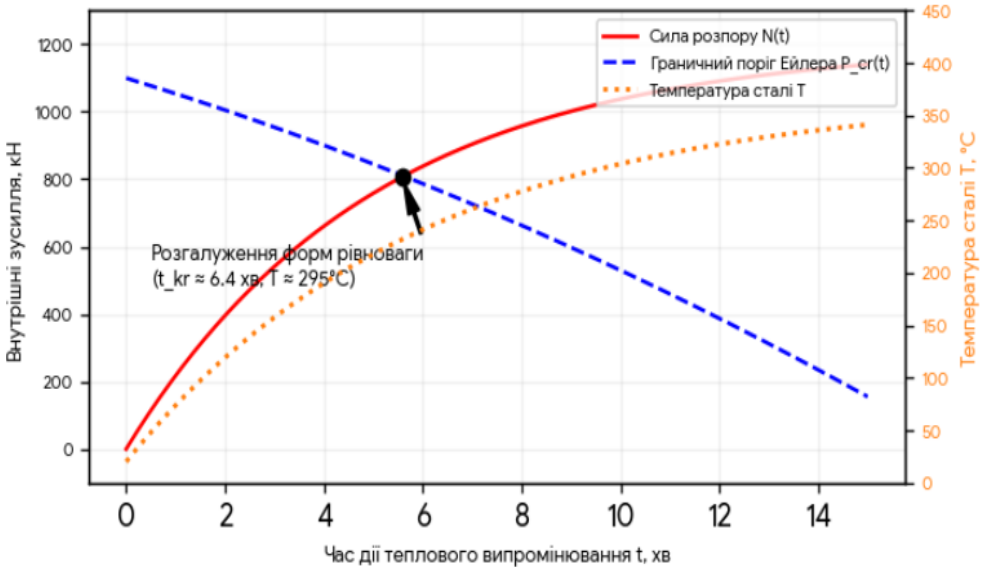



**Рисунок 2** – Зміна сил та температури в защемленій колоні під час нагрівання

Аналіз результатів доводить: за рахунок високої швидкості поглинання випромінюваної енергії, жорстко защемлений елемент втрачає статичну

стійкість задовго до критичного розм'якшення матеріалу, що створює загрозу миттєвого обвалення каркаса споруди.

1. **Висновки та рекомендації.** Встановлено, що при густині опромінювання 40 кВт/м² критичний час безпечної роботи защемленої сталевої колони складає всього 6,4 хвилини, що вимагає негайного виведення особового складу ДСНС із зони можливого обвалення.

2. Математично обґрунтовано, що для захисту від променистого теплового розширення інженерні розрахунки мають передбачати застосування дзеркальних (відбиваючих) екранів для мінімізації поглинального коефіцієнта поверхні.

**Література**

1. ДСТУ EN 1991-1-2:2018. Квазистатичні та термічні впливи на конструкції під час пожежі. — К., 2019.

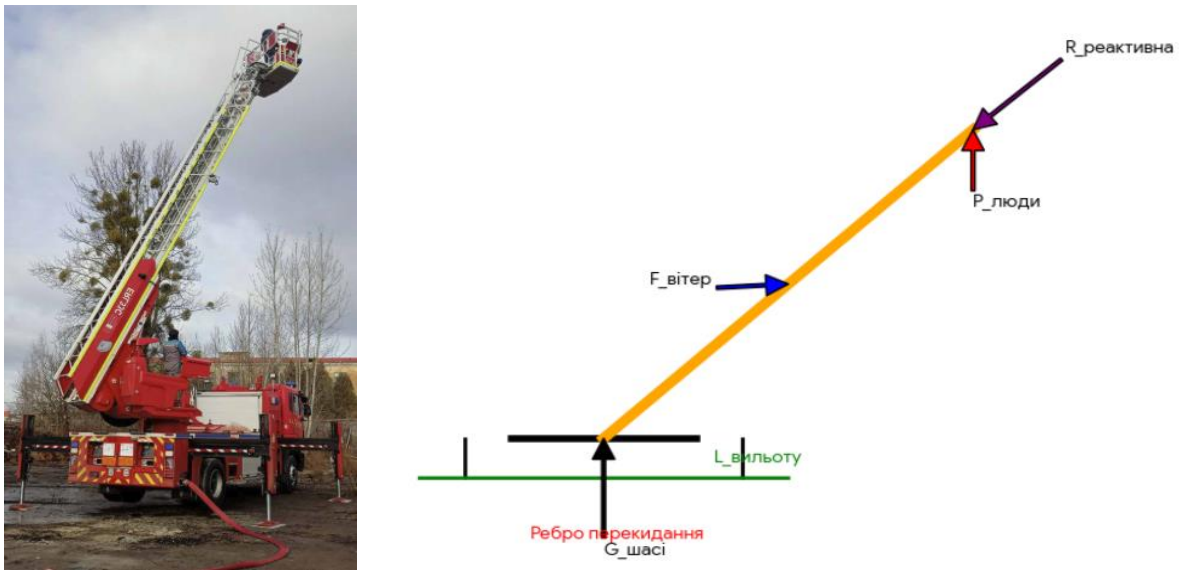
2. Ісаченко В. П. Теплопередача : підручник для ВНЗ / В. П. Ісаченко, В. О. Осипова, О. С. Сукомел. — К. : Вища школа, 1990. — 412 с.

3. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. — М. : Наука, 1971. — 544 с.

***Д. Гніздюх***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***В. В. Бариляк,*** *кандидат технічних наук; доцент кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ВИСУВНИХ ПОЖЕЖНИХ АВТОДРАБИН

**Вступ та актуальність теми.** Під час проведення рятувальних операцій на висотах 10–12 поверхів безпека особового складу та постраждалих безпосередньо залежить від конструктивної надійності сталевих ферм та стійкості опорних контурів автодрабин (рис. 1.а), [1]. У таких режимах стріла АД працює як консольна балка змінної довжини, що зазнає складного опору — сукупної дії стиску та вигину (рис. 1.б), [2]. Головною загрозою є виникнення перекидних моментів від додаткових динамічних навантажень (бічний вітер, реактивна сила водяного струменя лафетного ствола), які зміщують центр мас усієї системи, [2, 3].




а) б)

**Рисунок 1** – Загальний вигляд автодрабини АД (а) та її розрахункова схема (б).

**Мета дослідження:** побудувати математичну модель динамічної стійкості та міцності автодрабини АД-30 для визначення критичних меж вильоту стріли.

**Математична модель.** Розрахунок балансу сил та моментів перекидання (рис.1.б) реалізовано через безрозмірний коефіцієнт стійкості $\eta$, [2]:

$$\eta = \frac{M_{st}}{M_{over}} = \frac{G_{sh} \cdot \left(B_{out} / 2\right)}{\left(G_{str} \cdot L_c + P \cdot L\right)\cos\alpha + F_w \cdot h_w + R_{reac} \cdot h_{str}},$$

де $G_{sh}$ – вага шасі;$B_{out}$- ширина опорного контуру;$G_{str}$вага стріли; P - вага рятувальників;$F_w$ - сила вітру;$R_{reac}$ - реактивна сила струменя; L - виліт стріли;$\alpha$ - кут підйому. Безпечна експлуатація за нормативами можлива при $\eta = 1.4$.

Обчислення пружного деформаційного прогину вершини (\(f\)) виконано за формулою Максвелла — Мора, [4]:

$$f = \frac{P \cdot L^3}{3EJ}.$$

Сумарні напруження $\sigma$ у критичному перерізі (основа стріли) визначаються з урахуванням геометричного ексцентриситету, викликаного прогином f:

$$\sigma = \frac{P \cdot \sin\alpha}{A} + \frac{P \cdot \left(L \cdot \cos\alpha + f\right)}{W},$$

де A – площа поперечного перерізу; W – момент опору; E – модуль пружності для сталі 09Г2С.

**Результати та аналіз.** Чисельне моделювання параметрів для АД-30 зафіксувало нелінійний характер зростання напружень через збільшення додаткового плеча сили тяжіння від прогину стріли (рис.2).

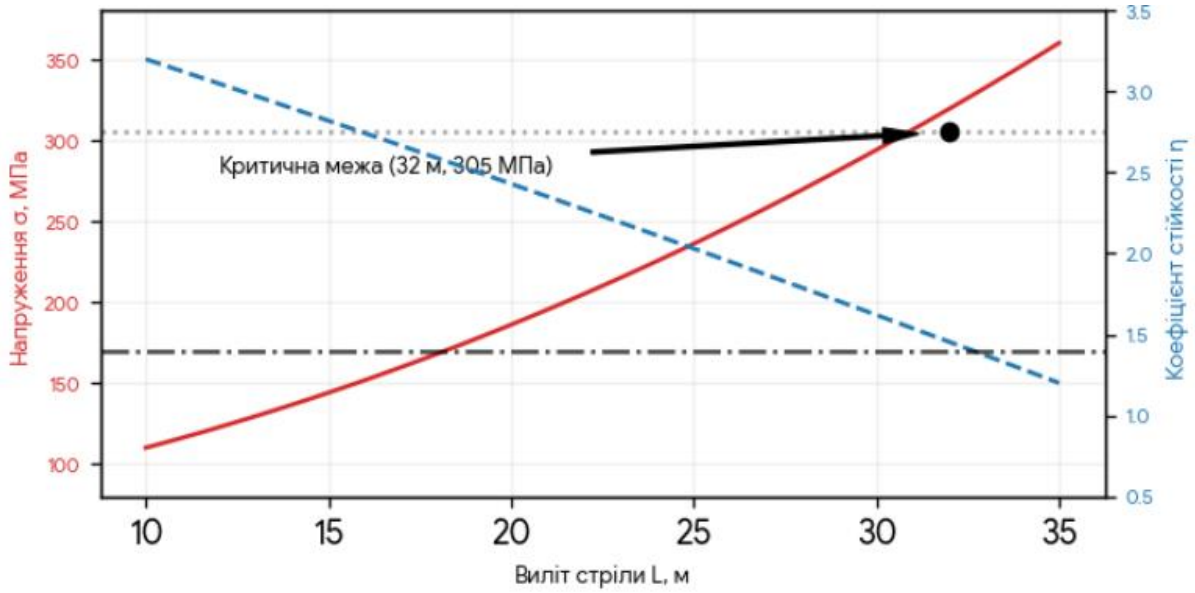



**Рисунок 2** – Залежність напружень та стійкості від вильоту стріли

При вильоті стріли у 32 метри прогин досягає екстремальних 65 см. Напруження в металі сягають 305 МПа, що є межею пружності для сталі 09Г2С, а коефіцієнт стійкості впритул наближається до нормативного порогу 1,4. Подальше висування переводить АД у зону непередбачуваної динаміки з ризиком миттєвого перекидання від імпульсних вітрових поривів.

**Висновки та рекомендації.** Математично доведено, що оцінки лише статичної ваги людей на вершині недостатньо для безпечної експлуатації автодрабини АД. Інтегрована бортова автоматика сучасної пожежної техніки повинна постійно прораховувати динамічний коефіцієнт стійкості в режимі реального часу, безперервно враховуючи поточний геометричний вигин стріли, фактичний вітровий тиск та кут роботи лафетного ствола.

## Література

1. ДСТУ EN 1777:2019 (EN 1777:2010, IDT). Пожежні автопідйомники гідравлічні. Вимоги щодо безпеки та випробування. — К. : ДП «УкрНДНЦ», 2021. — 56 с.

2. Пиляй С. Г. Конструктивна міцність та надійність телескопічних стріл спеціальних пожежних автомобілів : монографія / С. Г. Пиляй, О. М. Борсук. — Х. : НУЦЗУ, 2019. — 218 с.

3. Рутковський О. А. Оцінка динамічної стійкості висотної аварійно-рятувальної техніки в умовах дії вітрових навантажень // *Науковий вісник будівництва*. — 2022. — Т. 108, № 2. — С. 143–151.

4. Тимошенко С. П. Статическая и динамическая устойчивость сооружений / С. П. Тимошенко ; пер. с англ. під ред. Е. І. Ніколаї. — К. : Наукова думка, 1992. — 384 с.

# СЕКЦІЯ 2. МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ

***Р. І. Баб'як, Н. Р. Лазірко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***Т. В. Гембара****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ВУГЛЕКИСЛОГО ГАЗУ В ПРИМІЩЕННЯХ ТА ТЕХНІЧНИЙ КОНТРОЛЬ

В наукових працях [1,2] розроблена математична модель динаміки концентрації вуглекислого газу ($CO_2$) у закритому приміщенні з урахуванням його нестаціонарних та стаціонарних джерел, а саме модель враховує наявність постійної та змінної кількостість осіб, чисельність яких описано періодичною (синусоїдальною) функцією часу та за рядом статистичних законів.. Для опису процесу масообміну використано рівняння балансу концентрації $CO_2$ з урахуванням припливу зовнішнього повітря та інтенсивності внутрішніх джерел. Запропоновано аналітичний та чисельний підходи, з використанням програмного забезпечення Scilab, до розв'язання рівняння балансу для різних режимів роботи вентиляційної системи

$$dC = \frac{C_0 V_1 + V C_2 - C_p}{V} dt \quad , \qquad (1)$$

де $n_0$ – кількість осіб у приміщенні, $V_1$ - об'єм $CO_2$, який видихає особа на м$^3$, $C_2$ - концентрація $CO_2$ на м$^3$ у повітрі, що надходить зовні, $V_p$ – потужність вентиляційної системи, $V$ - об'єм приміщення. Проведено верифікацію моделі за експериментальними та теоретичними даними, наведеними в науковій літературі. Результати математичного моделювання дозволяють оцінити вплив потужності системи вентиляції та профілю джерел виділення на рівень концентрації $CO_2$ у приміщенні та запропонувати рекомендації щодо запобігання перевищенню гранично допустимих значень.

Для експериментальних досліджень концентрації $CO_2$ у приміщенні використано багатофункціональний прилад Xintest HT-2000, який поєднує функції детектора $CO_2$, термогігрометра та вбудованого логера (реєстратора даних) HT-2000. Його основні технічні характеристики: діапазон вимірювання концентрації $CO_2$ 0…9999 ppm; тип сенсора $CO_2$ – високоточний NDIR (інфрачервоний сенсор); час відгуку (інерційність) близько 10 с; діапазон вимірювання температури повітря приблизно від −10 до +70 °C із точністю близько ±0,6 °C у робочому діапазоні; діапазон вимірювання відносної вологості 0,1–99,9 % із типовою похибкою близько ±3 %; об'єм пам'яті логера порядку 12700 записів; варіанти живлення - від мережевого адаптера, батареї або через USB кабель при синхронній роботі з ПК.

Принцип роботи NDIR-сенсора ґрунтується на вибірковому поглинанні інфрачервоного випромінювання молекулами $CO_2$ у вузькій спектральній області. Усередині вимірювальної комірки розташовано інфрачервоне джерело та фотодетектор з оптичним фільтром. Потік випромінювання, що проходить через повітря з певною концентрацією $CO_2$ послаблюється пропорційно до кількості молекул газу на промені. Прилад обчислює концентрацію $CO_2$ вимірюючи інтенсивність сигналу на фотодетекторі Інтегрований логер НТ-2000 дозволяє зберігати часові ряди виміряних значень $CO_2$, температури та вологості з заданим інтервалом дискретизації. Ці дані можуть бути експортовані до персонального комп'ютера для подальшої обробки та порівняння з результатами математичного моделювання [1]. Завдяки поєднанню $CO_2$-контролера, термометра і гігрометра, НТ-2000 забезпечує комплексний підхід до оцінки якості повітря і дає змогу верифікувати математичну модель [1,2] додатково з урахуванням впливу мікрокліматичних умов.

Експериментальні випробування проведено в навчальних аудиторіях ЛДУ БЖД, тривалість кожного випробування 90 хв при інтервалах моніторингу 10 сек з примусовою рекуператорною вентиляцією. Зареєстровано значення вхідних даних – температура повітря в аудиторіях складала 19-22$C^0$ (зовнішнього середовища 0-5$C^0$), кількість студентів 22-29, вологість повітря 70-80%, концентрація вуглекислого газу зовнішнього середовища 450-530 ppm (на початок спостереження в аудиторії 600 – 800 ppm). За допомогою спеціального програмного забезпечення НТ Communication Tool в робочому вікні програми (рис.1) зафіксовано в нестаціонарному режимі концентрацію $CO_2$ у ppm, температуру та вологість повітря як графічно, так і файлами числових даних. Максимальна концентрація досягала 1200 ppm протягом 30 – 45 хв, після чого була включена примусова рекуператорна вентиляція і концентрація протягом 15-25 хв зменшувалась до 700-800 ppm, що свідчить про задовільний стан аудиторного повітряного середовища та встановленої системи вентиляції. Порівняльний аналіз теоретичних розрахунків за математичною моделлю концентрації $CO_2$ [1, 2] з отриманими експериментальними даними показав, що відносна похибка становить 10-15 %, зокрема вона збільшується при зростанні різниці температур зовнішнього та внутрішнього аудиторного повітряного середовища.

Діоксид вуглецю ($CO_2$) є найважливішим антропогенним парниковим газом. Проте моніторинг рівнів $CO_2$ є складним завданням через нерівномірний розподіл концентрацій і високу вартість точних сенсорів. У цьому дослідженні запропоновано методи вимірювань та верифікації, які дозволяють використовувати доступні за ціною сенсори $CO_2$ також для створення мережі з високою просторовою роздільною здатністю.

## Література

1. Гембара Т. В., Марич В. М. Диференціальне рівняння управління припливно-витяжною системою вентиляції за вмістом $CO_2$ у приміщенні. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. пр. IV Всеукр. наук.-практ. конф.

викладачів та фахівців-практиків, Львів, трав. 2024 р. Львів: ЛДУ БЖД, 2024. С. 34–35.

2. Гембара Т. В., Марич В. М., Трусевич О. М. Математичне моделювання роботи системи припливно-витяжної вентиляції в стаціонарному та нестаціонарному режимах. Охорона праці: освіта і практика : зб. наук. пр. V Всеукр. наук.-практ. конф. викладачів та фахівців-практиків, Львів, трав. 2025 р. Львів : ЛДУ БЖД, 2025. С. 79–81.

***С. В. Найдич***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ У ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ

Поняття похідної є одним із фундаментальних у математичному аналізі та займає центральне місце як у теоретичних дослідженнях, так і в широкому спектрі прикладних задач. Починаючи з відкриттів І. Ньютона та Г.В. Лейбніца, диференціальне числення неперервно розвивається й збагачується. Класичний підручник Г.М. Фіхтенгольца [1] закладає строгу теоретичну основу для вивчення похідної та її застосувань у курсі вищої математики.

Особливої актуальності набуває дослідження функцій за допомогою похідної в контексті STEM-освіти — підходу, що поєднує математику, природничі науки та інженерію. Похідна виступає ключовим інструментом, що дозволяє аналізувати поведінку реальних процесів: від руху тіл і теплопровідності до оптимізації виробничих та економічних систем. Метою цієї роботи є систематизація теоретичних засад дослідження функцій за допомогою похідної та демонстрація її прикладного потенціалу.

**Теоретичні основи дослідження функцій за допомогою похідної**

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a, b)$. Похідна функції у точці $x_0$ визначається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$f'(x_0) = \lim [\Delta x \to 0] [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] / \Delta x.$$

Знак похідної визначає характер монотонності: якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі, функція зростає; якщо $f'(x) < 0$ — спадає. Точки, у яких $f'(x_0) = 0$ або похідна не існує, є кандидатами на екстремум і називаються критичними точками. Для визначення характеру критичної точки використовують ознаки: якщо похідна змінює знак із «+» на «−» — це максимум; з «−» на «+» — мінімум [2].

Друга похідна $f''(x)$ описує опуклість графіка: при $f''(x) > 0$ функція опукла донизу, при $f''(x) < 0$ — донизу угнута. Точки зміни знаку другої похідної є точками перегину [1]. Повна схема дослідження функції охоплює: знаходження

області визначення, асимптот, критичних точок, інтервалів монотонності, екстремумів, інтервалів опуклості та точок перегину.

**Прикладні аспекти використання похідної**

Застосування похідної виходить далеко за межі теоретичного аналізу. У фізиці миттєва швидкість тіла є похідною координати за часом: $v(t) = x'(t)$, а прискорення — похідною швидкості: $a(t) = v'(t)$. Ці поняття складають основу класичної механіки та дозволяють математично описувати закони руху [3].

В економіці похідна застосовується для знаходження граничних величин: граничні витрати ($MC = C'(q)$) і граничний дохід ($MR = R'(q)$) дозволяють визначити оптимальний обсяг виробництва, при якому прибуток є максимальним. Умова рівності $MC = MR$ має пряме практичне значення для планування господарської діяльності.

У задачах оптимізації похідна дозволяє знаходити найвигідніші розміри ємностей, мінімізувати витрати матеріалів або визначати параметри безпечного руху. У пожежній та рятувальній справі методи диференціального числення застосовуються для розрахунку оптимальних траєкторій під час евакуації та визначення безпечних зон. Лінеаризація функцій за формулою $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ дозволяє отримувати наближені розв'язки та є основою чисельних методів і комп'ютерного моделювання [2].

Похідна є потужним і універсальним інструментом математичного аналізу, який поєднує теоретичну строгість із широкими можливостями практичного застосування. Її систематичне використання у дослідженні функцій дозволяє не лише розкривати аналітичні та геометричні властивості функцій, а й ефективно розв'язувати задачі оптимізації у фізиці, економіці, техніці та безпеці. Поглиблення знань із диференціального числення сприяє формуванню математичної культури й аналітичного мислення, необхідних фахівцю будь-якого профілю в сучасній науково-технічній діяльності.

**Література**

1. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. Т. 1. — Київ: Наукова думка, 2018. — 608 с.
2. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. 9th ed. — Boston: Cengage Learning, 2021. — 1100 p.
3. Adams R., Essex C. Calculus: A Complete Course. 9th ed. — Toronto: Pearson Canada, 2018. — 1176 p.

***К. М. Ткачук***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **І. В. Андрусяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## ТЕОРЕМА ПІФАГОРА: МІЖДИСЦИПЛІНАРНІ АСПЕКТИ АНАЛІЗУ ТА МЕХАНІКИ

Теорема Піфагора залишається одним із найбільш досліджуваних об'єктів евклідової геометрії. Класична праця Е. Лоомса "The Pythagorean Proposition" заклала фундамент систематизації доведень, проте сучасний науковий дискурс, представлений роботами Е. Маора [2] (2019) та Р. Найн [3] (2010), переносить акцент на культурні та обчислювальні аспекти теореми.

Стаття І. Лебедєвої та А. Чубикіної [1] (2025) пропонує синтез класики та сучасності, де теорема розглядається крізь призму математичного аналізу та теоретичної механіки. Це відповідає актуальному тренду STEM-освіти — "міжпредметній конвергенції", що дозволяє верифікувати математичні істини за допомогою фізичних моделей.

Метою доповіді є аналіз двох неординарних методів: диференціального числення та законів класичної механіки.

**Доведення через диференціальні рівняння**

Метод базується на аналізі динамічного приросту сторін трикутника. Розглянемо прямокутний трикутник з катетами $a, b$ та гіпотенузою $c$.

Надамо катету $a$ нескінченно малий приріст $da$. При незмінному $b$ це спричинить зміну гіпотенузи на $dc$.

На основі подібності трикутників встановлюємо співвідношення:

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot da = c \cdot dc.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння:

$$\int a\, da = \int a\, dc \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2} + C.$$

Виходячи з граничної умови ($a = 0 \;\Rightarrow\; c = b$), маємо $C = -\frac{b^2}{2}$, що приводить нас до класичного виду: $a^2 + b^2 = c^2$.

Дане доведення демонструє, що геометрична статика може бути виведена через динамічні процеси зростання.

**Механіко-гідравлічна інтерпретація та енергетичний баланс**

Фізичний підхід базується на принципах рівноваги, ізотропності тиску та збереження енергії. Це доведення дозволяє побачити геометричну рівність як наслідок фізичного стану системи.

**Гідравлічна модель (Принцип сполучених посудин):** Розглядається конструкція, де на кожній стороні прямокутного трикутника побудовано квадратний резервуар малої товщини $h$. Всі три резервуари з'єднані каналами

біля вершин трикутника. Якщо заповнити систему рідиною, то за умов рівноваги тиск у системі буде рівномірним. Об'єм рідини, що витісняється з катетних резервуарів при їх стисканні, має точно заповнювати гіпотенузний резервуар. Оскільки товщина $h$ однакова, відношення об'ємів зводиться до відношення площ основ: $S_a + S_b = S_c$, що еквівалентно $a^2 + b^2 = c^2$.

**Статична модель (Центр мас та моменти сил):** Розглянемо систему матеріальних точок. Якщо розмістити маси на вершинах трикутника, положення центра мас системи буде залежати від метричних характеристик сторін. Використовуючи теорему про паралельне перенесення осей (теорема Гюйгенса-Штайнера) або закон важеля для моментів інерції, встановлюється, що мінімізація потенціальної енергії системи (стан рівноваги) досягається лише тоді, коли виконується квадратичне співвідношення між плечима прикладання сил (сторонами трикутника).

**Кінематичний аспект:** Якщо трактувати сторони трикутника як вектори швидкостей або сил, то за законом додавання векторів у прямокутній системі координат квадрат результуючого вектора (гіпотенузи) завжди дорівнює сумі квадратів його проєкцій на осі (катетів), що фізично обґрунтовує теорему через скалярний добуток.

Поєднання методів математичного аналізу та класичної механіки з геометрією дає змогу подолати розмежування між навчальними дисциплінами й розглядати теорему Піфагора як універсальний закон. Такий міждисциплінарний підхід показує, як фізичні принципи пояснюються мовою математики, і допомагає глибше зрозуміти, що геометрична рівновага випливає з динамічних процесів і законів збереження енергії. Використання фізичних моделей для підтвердження геометричних тверджень сприяє формуванню цілісного наукового світогляду, що є важливим завданням сучасної STEM-освіти.

## Література

1. Лебедєва І. В., Чубикіна А. О. 25 способів підкорити теорему Піфагора: від класики до сучасності. *Математичний гурток*. КНУ імені Тараса Шевченка, 2025.

2. Maor E. *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*. Princeton University
Press, 2019.

3. Nain R. *Pythagorean Theorem: The History, proofs and various types of derivations*. International Journal of Mathematics and Applications, 2010.

***О. Ю. Кондера***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***О. Я. Бродяк,*** *фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## АНАЛІЗ ВІДКРИТИХ ПРОБЛЕМ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ: МАГІЧНІ КВАДРАТИ ТА ГІПОТЕЗА КОЛЛАТЦА

Математика — це не лише набір готових формул, а й постійний пошук відповідей на питання, які залишаються відкритими сотні років. Актуальність цієї роботи полягає у вивченні задач, які мають надзвичайно просте формулювання, але потребують для свого розв'язання нових підходів. Робота присвячена аналізу двох таких проблем: створенню магічного квадрата з квадратів чисел та поведінці чисел у відомій гіпотезі Коллатца. Вивчення цих тем допомагає зрозуміти, як влаштовані числа та де проходять межі наших сучасних обчислювальних можливостей.

**Проблема існування магічного квадрата з квадратів.** Традиційний магічний квадрат розміром $3 \times 3$ — це числова матриця, де суми чисел у кожному рядку, стовпці та по обох діагоналях є однаковими. Проблема «магічного квадрата з квадратів» виводить це завдання на новий рівень складності.

***Суть задачі:*** Необхідно побудувати квадрат $3 \times 3$, усі дев'ять елементів якого є різними повними квадратами цілих чисел (тобто числами виду $n^2$).

***Математична структура:*** Завдання полягає у знаходженні розв'язків для системи рівнянь, де сума квадратів у кожній лінії дорівнює «магічній константі» $S$. Наприклад, якщо квадрат має вигляд:

$$(x_1^2\ x_2^2\ x_3^2\ x_4^2\ x_5^2\ x_6^2\ x_7^2\ x_8^2\ x_9^2\ )$$

то $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S$, $x_1^2 + x_4^2 + x_7^2 = S$ і так далі.

***Поточний стан досліджень:*** На сьогодні науці відомі лише «майже магічні» квадрати, де 8 із 9 чисел є квадратами, або де магічна сума зберігається не для всіх ліній.

Найвідоміший приклад — квадрат *Крістіана Бойєра.* Відсутність повного розв'язку вказує на те, що квадрати цілих чисел не можуть випадковим чином утворювати симетричні структури. Це має фундаментальне значення для алгебраїчної геометрії, оскільки допомагає зрозуміти, як раціональні точки розташовуються на складних геометричних поверхнях

**Гіпотеза Коллатца: аналіз ітераційної стійкості.** Гіпотеза Коллатца (задача $3n + 1$) є однією з найпопулярніших нерозв'язаних проблем сучасності, що описує поведінку чисел при багаторазовому застосуванні простих операцій.

***Механізм перетворень:*** Для будь-якого натурального числа n задається наступний ітераційний алгоритм:

$$f(n) = \{\frac{n}{2}, \qquad \text{якщо } n - \text{парне } 3n + 1, \ \text{якщо } n - \text{непарне}$$

***Динаміка чисел.*** Основне твердження гіпотези полягає в тому, що для будь-якого стартового числа послідовність завжди завершується циклом $4 \to 2 \to 1$. Наприклад, візьмемо число $7$:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Основна перешкода для математиків — це непередбачуваність зростання значень. Найвидатніші вчені сучасності, такі як *Теренс Тао*, лише нещодавно змогли довести, що «майже всі» числа поводяться згідно з правилом, але одне-єдине число-виняток може зруйнувати всю теорію.

Дослідження магічних квадратів та гіпотези Коллатца демонструє, що в основі математики лежать структури, які ми ще не до кінця розуміємо. У першому випадку ми стикаємося з жорсткими вимогами до сум квадратів, у другому — з непередбачуваною динамікою простих операцій. Вирішення цих задач вимагає якісно нових ідей, що виходять за межі простого перебору варіантів на комп'ютері. Ці проблеми залишаються важливими стимулами для розвитку сучасної теорії чисел та логіки.

**Література**

1. Освітній портал math.in.ua — Стаття «Магічні квадрати та їх властивості».

2. Guy, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*. — Springer, 2025.

3. Науковий ресурс «Моя наука» (my.science.ua) — Аналітичні статті про гіпотезу Коллатца (2025).

***А. В. Данило***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **О. Я. Бродяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ ТА СУЧАСНИХ ІТ-ТЕХНОЛОГІЯХ

Сучасний етап розвитку інформаційних технологій характеризується стрімким прогресом у сферах візуалізації даних, ігрової індустрії та систем штучного інтелекту. В основі всіх цих процесів лежить апарат лінійної алгебри. Якщо раніше матричне числення вважалося виключно теоретичним розділом математики, то сьогодні воно є базовою мовою, якою апаратне забезпечення комп'ютера взаємодіє з програмним. Актуальність теми полягає у дослідженні фундаментальної ролі векторних просторів та матричних перетворень у створенні цифрового контенту, а також у вивченні того, як абстрактні операції стають основою віртуальних світів.

**Векторні простори як математична модель сцени.** У комп'ютерній графіці будь-який об'єкт, від простого куба до деталізованого персонажа, складається з набору точок, які називають вершинами. Кожна така вершина у тривимірному просторі представляється вектором координат, що визначають її положення по трьох осях: ширині, висоті та глибині. Сукупність цих векторів формує геометричну модель об'єкта. Проте для коректної обробки складних перетворень, таких як зсув у просторі разом із поворотом, у професійних графічних рушіях використовують так звані однорідні координати. Ця концепція передбачає додавання четвертого виміру до стандартних трьох, що дозволяє математично об'єднати операції перенесення та обертання. Це робить обчислення універсальними та значно пришвидшує роботу графічного процесора, який може обробляти масиви таких даних паралельно.

**Матриці трансформацій та композиція операцій.** Будь-яка зміна стану об'єкта на екрані — це математична операція множення вектора його координат на відповідну матрицю трансформації. Масштабування здійснюється через спеціальні діагональні матриці, які пропорційно змінюють значення координат. Поворот об'єкта є більш складною операцією, що базується на тригонометричних функціях, які дозволяють розрахувати нові позиції кожної точки відносно обраної осі. Найважливішою перевагою матричного підходу є можливість створення композиції перетворень. Це означає, що програма може обчислити одну фінальну матрицю, яка включає в себе сотні послідовних дій (наприклад, рух автомобіля, обертання коліс та коливання підвіски), і застосувати її до об'єкта за один крок. Це критично важливо для відеоігор, де сцена має оновлюватися щонайменше 60 разів на секунду.

**Проектування, рендеринг та моделювання освітлення.** Перехід від об'ємної математичної моделі до плаского двовимірного зображення на моніторі — це задача проектування. Матриці перспективи імітують особливості

людського зору, де об’єкти зменшуються при віддаленні. Окрім геометрії, лінійна алгебра керує світлом. Розрахунок освітленості кожної точки на поверхні об’єкта базується на обчисленні кута між променем світла та нормаллю (перпендикуляром) до поверхні. Використовуючи операції над векторами, відеокарта визначає, яка частина об’єкта буде яскравою, а яка залишиться в тіні. Це дозволяє створювати фотореалістичні зображення в кінематографі та архітектурній візуалізації.

**Машинне навчання та обробка великих даних.** Поза межами графіки лінійна алгебра є фундаментом для роботи нейронних мереж та штучного інтелекту. Будь-яка нейромережа — це фактично гігантська структура матриць ваг, які множаться на вхідні дані. Наприклад, коли алгоритм розпізнає об’єкт на фотографії, він розглядає зображення як величезну матрицю пікселів і проводить над ними тисячі лінійних трансформацій для пошуку закономірностей. Сучасні суперкомп’ютери та мобільні процесори мають спеціальні блоки, призначені виключно для виконання матричних операцій, що підкреслює незамінність цього розділу математики в цифрову епоху.

Лінійна алгебра пройшла шлях від класичного університетського курсу до головного інструменту глобального технічного прогресу. Розуміння матричних операцій та векторних просторів є необхідною базою для будь-якого розробника програмного забезпечення, інженера чи дослідника даних. Вона дозволяє перетворити абстрактні числа на складні інтерактивні системи, що оточують нас у повсякденному житті.

## Література

1. Антонюк Р. А. Вища математика для ІТ-спеціальностей. — Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019. — 320 с.

2. Дубовий В. М., Ковалюк О. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 182 с.

***А. А. Серафин***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ ЩІЛЬНИХ ЛАНЦЮГІВ ДІЛЬНИКІВ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Аналіз структури дільників числа $n$ є важливою задачею теорії чисел. Традиційно в літературі детально висвітлено властивості канонічного розкладу та методи підрахунку загальної кількості дільників, проте питання внутрішньої впорядкованості цих дільників у вигляді ланцюгів часто залишається поза увагою [2], [3]. У даній роботі, спираючись на дослідження В. Вишенського та О. Печериці [1], пропонується перейти від статичного переліку дільників до аналізу динамічних траєкторій — ланцюгів. Такий підхід дозволяє застосувати апарат комбінаторики мультимножин для опису мультиплікативної структури числа.

Множина дільників, упорядкована за подільністю, утворює ґратку, де шлях від одиниці до цільового числа визначається як ланцюг дільників.

**Означення 1.** *Ланцюгом дільників натурального числа* $n > 1$ називається строго зростаюча послідовність $(d_0, d_1, \dots, d_k)$, у якій кожен наступний елемент є кратним попередньому:

$$1 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n, \quad d_{i-1} | d_i.$$

Величина $k$ позначає кількість елементарних переходів і визначає довжину ланцюга.

**Означення 2.** Переходи між ланками називаються *факторами* ланцюга $q_i$:

$$q_i = \frac{d_i}{d_{i-1}}, \qquad i = 1,2, \dots, k.$$

Добуток усіх факторів ланцюга тотожно дорівнює вихідному числу $n$: $\prod_{i=1}^{k} \quad q_i = n$. Таким чином, будь-який ланцюг можна інтерпретувати як спосіб представлення числа у вигляді впорядкованого розкладу.

**Теоретична концепція та атрибути щільного ланцюга**

Науковий інтерес становлять ланцюги, які неможливо доповнити новими елементами. Якщо якийсь фактор $q_i$ є складеним числом, такий ланцюг можна «ущільнити», вставивши додатковий дільник між $d_{i-1}$ та $d_i$. Ланцюг стає максимально щільним лише тоді, коли всі його фактори є простими числами

**Означення 3.** Ланцюг дільників називається щільним, якщо кожен його фактор $q_i$ є простим числом.

**Ключові властивості:**

*Інваріантність довжини:* Для числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ довжина будь-якого щільного ланцюга є сталою і дорівнює сумі показників степенів

$$\Omega(n) = \sum_{j=1}^{m} \quad \alpha_j.$$

*Геометрична інтерпретація:* У графі дільників щільний ланцюг відповідає найкоротшому шляху вздовж ребер від вузла 1 до $n$.

**Методологія кількісного аналізу щільних ланцюгів**

Визначення загальної кількості диференційованих щільних ланцюгів $N(n)$ дозволяє встановити ступінь комбінаторної ентропії конкретного числа.

*Метод А:* Комбінаторний аналіз мультимножин

Оскільки кожен щільний ланцюг є унікальною перестановкою простих множників числа $n$, їх кількість визначається через мультиноміальний коефіцієнт:

$$N(n) = \frac{\big(\Omega(n)\big)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\dots\,\alpha_n!}.$$

Дана математична модель демонструє факторіальну залежність кількості ланцюгів від кількісного складу простих множників, що вказує на високу структурну варіативність навіть для помірних значень $n$.

*Метод Б:* Рекурентне моделювання

Альтернативний підхід базується на сумі значень для дільників першого порядку, що відрізняються від $n$ на один простий множник:

$$N(n) = \sum_{i=1}^{m} N\left(\frac{n}{p_i}\right).$$

Зазначений підхід підкреслює ієрархічний характер побудови: комбінаторна складність числа визначається як сума складностей його безпосередніх попередників у ґратці подільності.

Застосування методів комбінаторного аналізу до ланцюгів дільників дозволяє формалізувати опис мультиплікативних структур. Отримані результати мають прикладне значення для алгоритмічного моделювання числових систем та поглиблення вивчення теорії чисел.

**Література**

1. Вишенський В., Печериця О. Ланцюги дільників: комбінаторний аспект. *У світі математики*. 2024. Вип. 1. С. 40–50. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.6

2. Андрійчук В. І., Парасюк І. О. *Основи теорії чисел: Навчальний посібник*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 224 с.

3. Charalambides C. A. *Enumerative Combinatorics*. CRC Press, 2018. 640 p.

***Х. Ю. Кучма***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **М. І. Кучма**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## РЕЗУЛЬТАНТ ТА ДИСКРИМІНАНТ ПОЛІНОМІВ

Результант та дискримінант є фундаментальними інструментами в алгебрі, зокрема, в теорії поліномів. Вони дозволяють ефективно досліджувати структуру коренів поліномів: дискримінант виявляє кратність і виродження коренів, а результант – наявність спільних коренів у двох поліномів. Крім того, покажемо зв'язок між результантом і дискримінантом поліномів, сформулюємо їх властивості. Поняття результанта і дискримінанта використовують в теорії виключення змінних, в алгебричній геометрії та в чисельних методах [1–2].

Нехай $\mathbf{C}[x]$ – кільце поліномів від однієї змінної. Розглянемо два поліноми $p(x),\ q(x)\in\mathbf{C}[x]$ степенів $n$ і $m$ відповідно

$$p(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_0,\qquad q(x)=q_mx^m+q_{m-1}x^{m-1}+\ldots+q_0, \tag{1}$$

де $p_n,q_m\neq 0$.

Якщо $x_0\in\mathbf{C}$ – спільний корінь $p(x)$ і $q(x)$, тобто $p(x_0)=q(x_0)=0$, то можна записати систему $(n+m)\times(n+m)$ лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} & \ldots & p_1 & p_0 & & & & \\ & p_n & & \ldots & p_1 & p_0 & & & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & & & p_1 & p_0 & & \\ & & & & & p_2 & p_1 & p_0 & \\ q_m & q_{m-1} & \ldots & q_0 & & & & & \\ & q_m & & \ldots & q_0 & & & & \\ & & \ldots & & & & & & \\ & & & & & q_1 & q_0 & & \\ & & & & & q_2 & q_1 & q_0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{n+m-1} \\ x_0^{n+m-2} \\ \ldots \\ x_0^{n} \\ x_0^{n-1} \\ \ldots \\ \\ x_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_0)x_0^{m-1} \\ p(x_0)x_0^{m-2} \\ \ldots \\ p(x_0)x_0 \\ p(x_0) \\ q(x_0)x_0^{n-1} \\ q(x_0)x_0^{n-2} \\ \ldots \\ q(x_0)x_0 \\ q(x_0) \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Матрицю системи (2) називають *матрицею Сильвестра* $\mathrm{Syl}_x(p,q)$ поліномів $p(x)$ і $q(x)$. Ця матриця є виродженою, тобто $\det \mathrm{Syl}_x(p,q)=0$. Нескладно показати обернене твердження: якщо $\det \mathrm{Syl}_x(p,q)=0$, то в ядрі $\mathrm{Syl}_x(p,q)$ існує вектор, зазначеного вигляду в матричному рівнянні (2), а тому поліноми $p(x)$ і $q(x)$ мають спільний корінь $x_0$.

Визначник матриці Сильвестра $\mathrm{Syl}_x(p,q)$ називають *результантом* $\mathrm{Res}_x(p,q)$ поліномів $p(x)$ і $q(x)$.

**Теорема 1**. Поліноми $p(x),\ q(x)\in\mathbf{C}[x]$ вигляду (1) мають спільний корінь тоді і лише тоді, коли $\mathrm{Res}_x(p,q)=0$.

**Теорема 2**. Нехай $\alpha_i$ – корені полінома $p(x)$ ($i=\overline{1,n}$), $\beta_k$ – корені полінома $q(x)$ ($k=\overline{1,m}$). Тоді

$$\mathrm{Res}_x(p,q)=p_n^m q_m^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\alpha_i-\beta_k) \quad . \tag{3}$$

Зазначимо, що $\mathrm{Res}_x(p,q)=(-1)^{mn}\,\mathrm{Res}_x(q,p)$. Звичайно, це не має значення при перевірці, чи результант дорівнює нулю.

Із рівності (3) можна довести, що всі наступні конструкції еквівалентні:

$$\mathrm{Res}_x(p,q)=\det\mathrm{Syl}_x(p,q)=p_n^m\det q(C_p)=(-1)^{mn}q_m^n\det p(C_q)=$$

$$=p_n^m q_m^n\det(C_p\otimes I_m-I_n\otimes C_q).$$

де символ $\otimes$ –добуток Кронекера, $C_p$, $C_q$ – супутні матриці поліномів $p(x)$ і $q(x)$ відповідно [3].

*Дискримінантом* полінома $p(x)\in\mathbf{C}[x]$ вигляду (1) називають число, що визначають за формулою

$$\mathrm{Dis}_x(p)=(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{p_n}\mathrm{Res}_x(p(x),p'(x)) \quad . \tag{4}$$

**Теорема 3**. Нехай $\alpha_i$ – корені полінома $p(x)$ ($i=\overline{1,n}$). Тоді

$$\mathrm{Res}_x(p,q)=p_n^{2n-2}q_m^n\prod_{i<k}(\alpha_i-\alpha_k)^2 \quad .$$

Наприклад, на підставі формули (4) для квадратного полінома $p(x)=ax^2+bx+c$ дискримінант дорівнює

$$\mathrm{Dis}_x(p)=-\frac{1}{a}\mathrm{Res}_x(ax^2+bx+c,2ax+b)=b^2-4ac \quad ,$$

а для кубічного полінома $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ маємо

$$\mathrm{Dis}_x(p)=-27a^2d^2+18adcb+b^2c^2-4b^3d-4ac^3 \quad .$$

Отож, досліджувані поняття результанта і дискримінанта поліномів застосовують в алгебраїчній геометрії, чисельних методах, теорії диференціальних рівнянь і комп’ютерній алгебрі.

**Література**

1. B. Sturmfels. Introduction to resultants. In Applications of computational algebraic geometry, volume 53. Appl. Math., pages 25–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

2. D. A. Cox, J. B. Little, and D. O'Shea. Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer, 1997.

3. Lay, David C. Linear algebra and its applications / David C. Lay. – 4th ed. update. 2012, Pearson Education, Inc.

***А. Безус***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАГАДКА ТЕОРЕМИ КОШІ

Теореми Огюстена Луі Коші стали фундаментальними у розвитку сучасної математики. Його роботи заклали основу багатьох розділів аналізу, теорії функцій комплексної змінної та алгебри. Розглянемо одну з найвідоміших і водночас загадкових теорем Коші, її історію, застосування та значення в математичній науці.

1. *Біографічна довідка про Коші*

Огюстен Луі Коші (1789–1857) - це французький математик, який зробив величезний внесок у розвиток математичного аналізу. Він систематизував математичні поняття, які сьогодні вважаються стандартами: межі, збіжність, неперервність. Коші прагнув зробити математику строгою та логічно вивіреною наукою.

2. *Сутність теореми Коші*

Одна з найвідоміших теорем Коші в математичному аналізі стосується поведінки неперервних функцій на відрізку $[a, b]$. Вона стверджує:

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та диференційовні на відрізку $[a, b]$, і якщо $g'(x)\neq 0$ на цьому ж відрізку, то тоді існує точка $C\in( a, b)$, така що

$$f'(c)/g'(c) = (f(b)-f(a)) / (g(b)-g(a)).$$

Це узагальнення теореми Ролля, і вона є важливим інструментом у доведенні інших фундаментальних результатів математичного аналізу.

3. *Чому теорема вважається загадковою?*

Теорема Коші здається простою, але в ній закладено глибоку ідею про зв'язок між двома функціями. Вона демонструє, що зміна однієї функції пропорційна зміні іншої за умови певної регулярності. Це породжує цікаві питання:

• Чому саме існує така точка $C$?

• Як змінюється співвідношення між похідними?

• Чому теорема універсальна для найрізноманітніших задач?

4. *Геометрична інтерпретація.*

Геометрично теорему Коші можна уявити як пошук точки, де дотичні до графіків двох функцій стають "співмірними". Це нагадує принцип балансування. Якщо уявити дві криві, що рухаються одна відносно одної, то теорема стверджує, що в певний момент їхні швидкості зміняться у відповідній пропорції.

5. *Застосування теореми*

• У фізиці — для аналізу залежності величин, що змінюються одночасно.

• В економіці — для дослідження функціональних відношень між параметрами.

• У математиці — для доведення формул Тейлора, інтегральних нерівностей та властивостей наближень.

6. *Приклад практичного застосування*

Припустимо, що $f(x)$ — це шлях, пройдений деяким матеріальним тілом, а $g(x)$ — затрачений час. Теорема Коші допомагає визначити момент часу, коли швидкість зміни відстані відносно зміни іншої величини досягає середнього значення на інтервалі.

7. *Історичний контекст*

У XIX столітті Коші прагнув надати математиці строгість. Теорема, яку ми розглядаємо, допомогла сформувати нові стандарти логічних доведень. Сам Коші застосовував її в десятках робіт, формуючи нові математичні поняття.

8. *Значення теореми Коші сьогодні*

Сучасні підручники аналізу починають побудову багатьох розділів саме з цієї теореми. Вона стала класичним інструментом для подальших математичних відкриттів та формул.

*Висновок*

Теорема Коші — це більше ніж проста формула. Це інструмент, який пояснює взаємозв’язки між функціями, допомагає побачити приховану гармонію змін і є основою для складніших математичних понять. Її «загадковість» полягає у простоті формулювання та глибині змісту.

## Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***А. В. Гецко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук****, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНА СТРОГІСТЬ ТА ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ: ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПОТЕЗИ РІМАНА

У сучасному світі математика відіграє ключову роль у розвитку науки, техніки та інформаційних технологій. Особливої актуальності набувають фундаментальні проблеми, що залишаються нерозв'язаними протягом тривалого часу. Однією з таких є гіпотеза Рімана, сформульована ще у 1859 році. Вона має визначальне значення для теорії чисел, зокрема для розуміння розподілу простих чисел, які є фундаментом сучасної криптографії та систем захисту інформації. Останні досягнення у сфері квантових обчислень, Big Data та штучного інтелекту (ШІ) відкривають нові горизонти для дослідження надскладних математичних задач, постаючи перед питанням: чи здатні технології забезпечити остаточне доведення цієї гіпотези?

Гіпотеза Рімана стосується властивостей комплексної дзета-функції $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Вона стверджує, що всі її нетривіальні нулі розташовані на «критичній прямій» у комплексній площині, де дійсна частина дорівнює 1/2. Основна складність полягає в тому, що попри колосальну кількість перевірених випадків, загальне аналітичне доведення або спростування (знаходження контрприкладу) досі відсутнє.

На сьогодні вчені досягли значного прогресу у верифікації гіпотези. За допомогою потужних обчислювальних систем було перевірено понад 10 трильйонів нулів дзета-функції, і кожен із них підтвердив припущення Рімана. Хоча це свідчить про високу ймовірність її правильності, чисельне підтвердження не є строгим математичним доказом. Останніми роками активно розглядається можливість використання штучного інтелекту для пошуку нових закономірностей та автоматизованих систем формальної перевірки доведень. Водночас більшість науковців дотримується думки, що комп'ютерні перевірки не можуть замінити інтелектуальний аналіз, оскільки вони охоплюють лише скінченну множину значень.

На мою думку, сучасні технології відіграють надзвичайно важливу роль у розвитку математичної науки, зокрема у дослідженні складних проблем, таких як гіпотеза Рімана. Вони дозволяють значно прискорити обчислення, аналізувати великі обсяги даних і знаходити нові закономірності, які раніше були недоступними. Проте слід враховувати, що математика як наука базується на строгих логічних доведеннях. Жодна кількість перевірених прикладів не може замінити універсального доказу, який підтверджує істинність твердження для всіх можливих випадків. Я вважаю, що штучний інтелект і комп'ютерні технології можуть стати потужним інструментом для відкриття нових ідей і

напрямів дослідження, але остаточне доведення, ймовірно, буде результатом поєднання людського мислення та технологічних можливостей.

Отже, гіпотеза Рімана залишається однією з найважливіших і найскладніших проблем сучасної математики. Попри значні досягнення у сфері комп'ютерних технологій, її повне доведення досі не знайдено.

**Література**

1. Дербішир Дж. Проста одержимість: Бернгард Ріман і найбільша невирішена проблема в математиці. Київ : К.І.С., 2021. 432 с.
2. Інститут математики НАН України. Актуальні проблеми теорії чисел : зб. наук. праць. Київ, 2020–2024. URL: https://www.imath.kiev.ua
3. Clay Mathematics Institute. The Riemann Hypothesis : official description of the Millennium Prize Problems. URL: https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis
4. Encyclopedia of Mathematics. Riemann Hypothesis : reference materials. URL: https://encyclopediaofmath.org

***В. А. Дубенков***
*Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гродзь****, доктор філософії, доцент кафедри фундаментальних наук*

## УЯВНІ ЧИСЛА ЯК МАТЕМАТИЧНА ІЛЮЗІЯ У РЕАЛЬНОМУ СВІТІ

Довгий час математики вважали, що існують речі, які просто неможливо виконати, наприклад, не можна здійснити дію ділення на нуль, не можна знайти корінь квадратний з від'ємного числа. У XVI столітті італійські вчені почали називали такі дивні результати «софістичними», «дикими» і, нарешті, дали їм назву «уявних». У сьогоднішній час без цього «безглуздя» звичайний сучасний смартфон, котрий є у доступі майже усьому людству не зміг би під'єднатися до мережі Wi-Fi, а фізики не змогли б пояснити і довести, з чого ж складається атом. Історія народження «неможливих» результатів, при здійсненні відповідних математичних дій почалася не з містики, а з сухої алгебри.

Історія італійських вчених-науковців Джироламо Кардано та Рафаеля Бомбеллі показує те, що намагаючись розв'язати кубічні рівняння вони помітили дивну річ: іноді для отримання реального, правильного розв'язку потрібно було пройти через проміжний етап, де з'являвся корінь з від'ємного числа, а цього допускати не можна було, оскільки сам процес визначення результату на цьому і зупинявся. Це було схоже на використання таємного тунелю: ви заходите в «реальні» двері, проходите через «неможливу» кімнату і виходите знову в реальність. Рене Декарт пізніше ввів термін «уявні числа» як насмішку, вважаючи їх непотрібними. Але Леонард Ейлер поставив крапку, запровадивши

символ “i”, котрий від латинського означає imaginarius — уявний, або ж уявна одиниця. Він також визначив, що $i^2 = -1$. Новим виміром, котрого, власне стосувалася уявна одиниця вважалася комплексна площина.

Справжній прорив у використанні комплексної арифметики стався тоді, коли такі математики, зокрема, як Гаусс зрозуміли, що уявні числа — це не помилка, а новий вимір. Якщо уявити звичайну лінію чисел, наприклад ліворуч — від’ємні, праворуч — додатні, то можемо вважати, що — це одновимірний світ. Але, якщо ми додамо вертикальну вісь для уявних чисел, ми отримаємо так звану комплексну площину. Отож, тепер число — це не просто точка на лінії, це вектор, який має довжину та відповідний кут. Таке відкриття змінило все. Множення на “i” у математиці виявилося еквівалентним відповідному повороту кута на 90 градусів. Саме ця здатність описувати обертання та цикли зробила комплексні числа незамінними.

Широкого застосування комплексні числа отримали при електричних процесах та хвилях, а найбільш практичне застосування уявні числа знайшли власне в електротехніці. Змінний струм, наприклад, який живить наші будинки, постійно змінює свій напрямок і амплітуду за законом синусоїди, а синусоїда у свою чергу — це і є хвиля. Описувати такі процеси звичайними числами — досить складно користуючись громіздкими тригонометричними формулами. Але за допомогою комплексних чисел, наприклад, інженери об’єднують фізичні величини такі як: напругу, опір та фазу в одну формулу, і без проектування енергомереж, двигунів та трансформаторів було б на порядок складнішим і менш ефективним.

Комплексна арифметика впливає і на цифрову революцію у наш час: Wi-Fi та звук. Кожен файл, котрий завантажує користувач чи кожне відео у TikTok — це результат роботи алгоритмів, що базуються на перетворенні Фур’є. Це математичний інструмент, який розкладає будь-який складний сигнал (звук, радіохвилю) на прості складники. Основою цього перетворення є формула Ейлера, яка пов’язує комплексні числа з гармонічними коливаннями. Коли ваш телефон ловить сигнал Wi-Fi, він використовує комплексну математику, щоб відділити корисну інформацію від шуму. Без уявних чисел цифрова обробка сигналів просто не існувала б у тому вигляді, який ми маємо сьогодні. Квантова механіка також включає комплексну арифметику. Якщо в інженерії уявні числа — це зручний інструмент, то в квантовій фізиці — це базова необхідність.

Рівняння Шредінгера, яке описує стан елементарних частинок, містить у собі букву “i”. Виявляється, що на найглибшому рівні Всесвіт розмовляє мовою комплексних чисел. Природа не просто «використовує» їх для зручності вони закладені в саму структуру реальності. Без них ми не змогли б побудувати напівпровідники, лазери чи апарати МРТ.

Уявні числа — це ідеальний приклад того, як абстрактна ідея, що здавалася суто теоретичною розвагою, стає опорою цивілізації. Вони навчили нас, що розширення меж нашого мислення відкриває двері до розуміння того, як насправді працює світ.

Уявні числа продемонстрували, що математика — це не просто дзеркало фізичного світу, яке ми бачимо очима. Уявні числа — це потужна мова, котра,

власне здатна передбачати відповідні структури, які ми не можемо відчути на дотик, але які фундаментально керують реальністю. Вихід за межі одновимірної числової прямої у двовимірну комплексну площину став інтелектуальним «великим вибухом», що дозволив описувати обертання, коливання та хвилі з можливостями, котрі є недоступними звичайній класичній алгебрі.

**Література**

1. Стюарт Я. Неймовірні числа / пер. з англ. О. Березуцької. Харків : Клуб Сімейного Дозвілля, 2017. 448 с.
2. Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford : Clarendon Press, 1997. 592 p.
3. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. 2nd ed. Oxford : Oxford University Press, 1996. 564 p.

***М. А. Корчук***
*Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гродзь****, доктор філософії, доцент кафедри фундаментальних наук*

## ВПЛИВ НЕВИРІШЕНИХ ПИТАНЬ МАТЕМАТИКИ НА МАЙБУТНЄ ЦИВІЛІЗАЦІЇ

Математика часто постає перед стороннім спостерігачем як завершена і непохитна архітектура, де кожна цеглина стоїть на своєму місці вже тисячі років. Проте для професійної спільноти ця наука є динамічним океаном, де досліджено лише поверхневі води. Глибоко на дні лежать питання, відповіді на які людство шукає століттями. Ці задачі — не просто інтелектуальні ребуси, а водночас вони є критичними точками, у яких сходяться фундаментальна теорія та практичне виживання нашої технологічної цивілізації.

Першим незавершеним питанням з точки математичного буття є гіпотеза Рімана про порядок у хаосі «атомів» арифметики. Її можна пояснювати через прості числа як фундамент, на якому стоїть уся теорія чисел. Вони з’являються в числовому ряду з оманливою хаотичністю: 2, 3, 5, 7, 11... чим далі ми просуваємося, тим рідше вони зустрічаються, але жодної чіткої формули їхньої появи не знайдено. У 1859 році Бернгард Ріман запропонував гіпотезу, що розподіл цих чисел тісно пов’язаний із нулями комплексної функції, відомої як дзета-функція. Чому це критично важливо? Сучасний світ тримається на цифровому захисті. Алгоритми шифрування RSA, які забезпечують безпеку банківських транзакцій, державних таємниць та особистих листувань, базуються на надзвичайній складності розкладання великих чисел на прості множники. Якщо гіпотеза Рімана буде доведена, ми нарешті зрозуміємо «музику» простих чисел. Це може призвести або до створення невразливих кодів нового покоління, або до миттєвого краху всієї

наявної системи кібербезпеки. Це задача про те, чи має наш світ математичний порядок у своїй основі, чи він побудований на чистій випадковості.

Проблема P проти NP, або ж межі обчислювальної могутності — найважливіше питання сучасної інформатики та логіки. Уявіть, що ви шукаєте голку в снопі сіна. Якщо хтось знайде її та покаже вам — ви миттєво переконаєтеся, що це дійсно голка, котру можемо вважати класом задач P. Але чи зможете ви самі знайти її так само швидко, як перевірити готову відповідь, котру віднесемо до класу задач NP ? Глобальні наслідки вказують на те, що більшість науковців схиляються до того, що $P \neq NP$, тобто знайти складніше, ніж перевірити. Однак, якщо виявиться, що $P = NP$, це спричинить найбільшу революцію в історії людства. Це означатиме, що будь-яку інтелектуальну задачу, відповідь до якої можна швидко перевірити, комп'ютер зможе так само швидко розв'язати. Це автоматизація творчості через використання ШІ, котре зможе писати досконалі симфонії, доводити найскладніші теореми, миттєво проектувати ліки від невиліковних хвороб та оптимізувати світову економіку до ідеального стану.

Наступним спірним та невирішеним питанням є рівняння Нав’є-Стокса, як спроба описати плинний хаос. Рух рідин і газів оточує нас усюди — від кровотоку в наших венах до повітряних потоків, що піднімають у небо літаки. Рівняння Нав’є-Стокса, сформульовані ще у XIX столітті, описують ці процеси. Проте ми досі не маємо математичного доведення того, що в тривимірному просторі розв’язки цих рівнянь завжди існують і залишаються «гладкими», тобто передбачуваними. Практичне значення даного рівняння пояснює систему, де ми живемо у світі приблизних обчислень, ми не можемо точно передбачити погоду на тиждень наперед, не можемо ідеально розрахувати турбулентність при проектуванні авіаційних двигунів саме через математичну непевність цих рівнянь. Розв’язування цієї проблеми дозволить людству «приборкати хаос», створюючи надзвичайно ефективні транспортні засоби та розуміючи динаміку океанів та атмосфери на рівні, недосяжному сьогодні.

Гіпотеза Коллатца або ж магія простих правил через використання та застосування натуральних чисел. Гіпотеза полягає у тому щоб виконати певні дії: якщо число — парне, його потрібно поділити на 2, якщо непарне — помножити на 3 і додати 1. Гіпотеза стверджує, що яке б число ви не взяли, рано чи пізно ви потрапите в цикл 4–2–1 і зупинитеся на одиниці. Спробуйте це з числом 7: $7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Ця задача виглядає як науковий виклик, котрим користуватися настільки просто, що її може зрозуміти, навіть, школяр. Але найкращі математики світу вже 80 років не можуть знайти загальне доведення. Вона демонструє нашу безпорадність перед динамічними системами. Математик Джеффрі Лагаріас зазначав, що це «абсолютно безнадійна задача для сучасної математики». Вона вчить нас смиренню перед нескінченністю чисел.

Кожна невдала спроба розгадати ці таємниці породжує нові теорії, методи та технології. Математика — це не збірка рецептів, а нескінченна інтелектуальна пригода. Поки існують ці загадки, людський розум матиме стимул

еволюціонувати, намагаючись осягнути логіку, за якою функціонує цей складний, небезпечний і прекрасний світ.

**Література**

1. Анікушин А. В. Теоретичні аспекти аналізу рівнянь Нав'є-Стокса. Прикладна математика та комп'ютерні науки. 2021. № 4. С. 45–52.
2. Дербішир Д. Проста одержимість. Бернгард Ріман і найбільша невирішена проблема в математиці / пер. з англ. С. Комарова. Харків : Клуб Сімейного Дозвілля, 2023. 448 с
3. Дютуа С. Музика простих чисел: пошук розгадки найвеличнішої математичної таємниці. Київ : Наш Формат, 2021. 420 с.
4. Завало С. Т. Курс алгебри і теорії чисел. Київ : Вища школа, 1985. 503 с.
5. Іванов О. С. Складність алгоритмів та проблема P vs NP. Кібернетика та системний аналіз. 2022. Т. 58. № 2. С. 110–118.

***Ю. С. Бурдейна***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА АЗАРТУ: ЧОМУ КАЗИНО ЗАВЖДИ ВИГРАЄ І ЧИ МОЖНА ОБІГРАТИ СИСТЕМУ

Азартні ігри є популярною формою розваги, яка історично приваблює індивідів можливістю швидкого та легкого фінансового виграшу. Проте з наукового погляду будь-яка азартна гра є замкненою стохастичною системою. Всі процеси в казино жорстко базуються на фундаментальних математичних принципах, що детермінують їх кінцевий результат. Актуальність теми полягає у необхідності систематичного розвінчання психологічних ілюзій гравців щодо можливості системного подолання випадковості, використовуючи для цього строге обґрунтування того, чому фінансова архітектура казино майже завжди залишається у виграші.

Основою побудови будь-якої азартної гри є класична теорія ймовірностей. Кожна елементарна подія (випадіння певного сектора на колесі рулетки, комбінація карт у блекджеку або генерація послідовності символів у слоті) має строго фіксовану ймовірність $P(A)$, що визначається відношенням кількості сприятливих випадків $m$ до загальної кількості рівноможливих паритетних випадків $n$:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Гральний бізнес проектує правила ігор у такий спосіб, щоб математична ймовірність настання виграшної для гравця події була апріорі нижчою за

ймовірність перемоги казино, або ж сума виплати за виграшну подію не відповідала її реальній математичній складності.

Ключовим критерієм оцінки ефективності стратегії в азартній грі виступає математичне сподівання випадкової величини ($M[X]$ або $E[X]$), яке демонструє теоретичний середній результат гри при її нескінченному повторенні. Якщо випадкова величина $X$ — це чистий фінансовий результат гравця за одну ставку, то математичне сподівання розраховується як:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$$

де $x_i$ — фінансовий результат $i$-го сценарію (виграш або програш), а $p_i$ — відповідна ймовірність цього сценарію.

Для будь-якої комерційної гри в казино математичне сподівання для гравця є строго від'ємним ($M[X] < 0$). Це означає, що в середньому з кожної умовної грошової одиниці гравець втрачає фіксований відсоток. Тобто, попри наявність локальних випадкових виграшів окремих суб'єктів, інтегральний фінансовий результат усієї сукупності гравців з часом неминуче прямує до негативного значення.

**Механізм формування «переваги закладу» (House Edge).** Казино отримує комерційну перевагу завдяки невеликій, але математично непереборній різниці у ймовірностях та пропорціях виплат. Ця дельта дефінується як «перевага закладу» (*House Edge*).

Розглянемо класичний приклад європейської рулетки. На колесі розташовано 37 секторів (числа від 1 до 36 та зелений сектор «0» — зеро). Ймовірність вгадати конкретне число дорівнює $1/37$. Проте у разі перемоги казино виплачує виграш у пропорції 35:1 (плюс повертається сама ставка). Таким чином, математичне сподівання для ставки розміром в 1 умовну одиницю (у.о.) на конкретне число становить:

$$M[X] = \left(35 \cdot \frac{1}{37}\right) + \left(-1 \cdot \frac{36}{37}\right) = \frac{35 - 36}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0{,}0270 \text{ або } -2{,}7\%$$

Ці $2{,}7\%$ і є перевагою закладу. Навіть якщо цей відсоток відносно невеликий, за умов генерації великої кількості ігор (ітерацій) та дії Закону великих чисел Чебишова, випадкові флуктуації взаємно компенсуються, забезпечуючи казино абсолютно стабільний і прогнозований прибуток.

**Математичний аналіз ігрових стратегій.** У математичній та навколонауковій літературі описано безліч стратегій (наприклад, система подвоєння ставок Мартингейл, система Д'Аламбера, Фібоначчі тощо), які позиціонуються як методи підвищення шансів гравця. Однак строгий математичний аналіз доводить, що жодна прогресивна чи регресивна система ставок не здатна змінити базове математичне сподівання гри, закладене її правилами. Система Мартингейла, що передбачає подвоєння ставки після кожного програшу, теоретично працює лише за умови наявності у гравця нескінченного грошового капіталу та відсутності лімітів на максимальну ставку з боку казино.

Оскільки в реальному світі діють обмеження ($Max\ Bet$) і капітал гравця є обмеженим, у довгостроковій перспективі серія невдач неминуче призводить до повної втрати банку. У короткий проміжок часу можливі позитивні відхилення (виграші), але при тривалій сесії система залишається абсолютно виграшною для казино.

**Психологічні аспекти та ризики гемблінгу.** З погляду соціології та фінансової безпеки важливо враховувати, що азартні ігри є тригером високих фінансових та когнітивних втрат. Дефіцит розуміння базових математичних принципів і закономірностей теорії ймовірностей часто створює у гравців ілюзію контролю над стохастичним результатом («помилка гравця» або *Gambler's Fallacy*, коли людина вважає, що після серії червоних секторів обов'язково випаде чорний). Це призводить до виникнення лудоманії. Математична освіченість є базовим елементом профілактики грального залежності.

1. Математичний апарат теорії ймовірностей та математичного сподівання повністю описує і пояснює механіку переваги грального закладів над користувачами.

2. Завдяки дії закону великих чисел, обіграти математично збалансовану систему казино у довгостроковій перспективі є теоретично та практично неможливим процесом.

3. Азартні ігри в жодному разі не можуть розглядатися як інструмент інвестування чи надійний спосіб заробітку, а мають позиціонуватися виключно як високоризикована платна форма розваги.

4. Розуміння математичних основ допомагає суспільству уникнути помилкових очікувань, нівелює деструктивні ілюзії та дозволяє приймати раціональні й обґрунтовані фінансові рішення.

## Література

1. Griffin P. The Theory of Blackjack. — 2019.
2. MIT Technology Review. Ймовірність і ризики в азартних іграх — 2023.
3. Ross S. Introduction to Probability Models — 2020.
4. Khan Academy. Теорія ймовірностей.

***Х. В. Гула***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ:МАТЕМАТИКА НА СЛУЖБІ ПОРЯТУНКУ

Оптимізаційні задачі в математиці — це пошук найкращого (екстремального) розв'язку при заданих обмеженнях. У реальному житті це перетворюється на мистецтво ефективного управління ресурсами, часом та логістикою. Для структур ДСНС математичне моделювання є не просто теорією, а інструментом, що дозволяє вигравати секунди, які вартують життів.

Перший ключовий аспект — транспортна логістика та побудова маршрутів. Використовуючи теорію графів та алгоритми пошуку найкоротшого шляху (наприклад, алгоритм Дейкстри), диспетчерські служби розраховують траєкторію руху спецтехніки. Математична модель враховує не лише відстань, а й змінні обмеження: затори, пропускну здатність доріг та габарити пожежних машин. Мета — мінімізувати функцію часу $T(x) \rightarrow min$, де кожна відхилена хвилина підвищує ризики.

Другий напрям — лінійне програмування для розподілу ресурсів. У надзвичайних ситуаціях завжди виникає дефіцит — техніки, пального, часу чи людських сил. Математика дозволяє перетворити цей хаос на чітку модель. Лінійне програмування стає інструментом, який допомагає знайти баланс між потребами та можливостями. Наприклад, симплекс-метод дозволяє визначити, скільки пожежних машин варто направити на кожну ділянку, щоб загальний час ліквідації був мінімальним, а витрати ресурсів — раціональними. Це не просто формули, а практичний механізм прийняття рішень, який у критичний момент може означати різницю між вчасним порятунком і непоправними втратами.

Третій важливий блок — теорія масового обслуговування. Вона допомагає моделювати роботу лінії "101". Розраховуючи ймовірність надходження викликів та середній час їх обробки, математика підказує, яка кількість операторів та чергових екіпажів у депо є оптимальною, щоб система не була перевантажена і жоден виклик не залишився без миттєвої реакції.

Нарешті, геометрична оптимізація використовується для стратегічного планування. Задача про покриття площини допомагає визначити точки дислокації нових пожежних частин так, щоб радіус їхнього виїзду охоплював максимально можливу територію населеного пункту з дотриманням нормативів прибуття.

Використовуючи методи, описані в сучасних дослідженнях, математичне моделювання дозволяє перейти від простого реагування до прогностичного управління ризиками. Це включає створення автоматизованих систем, які в реальному часі розраховують імовірнісні сценарії розвитку ситуації, базуючись на стохастичних моделях пожежної небезпеки

**Література**

1. Васянін В. О., Трофимчук О. М., Ушакова Л. П. Задача маршрутизації транспортних засобів із заданими тарифами і обмеженнями на час доставки. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 98–112.
2. Коряшкіна Л. С. Математичні моделі та методи зонування і розміщення об'єктів в системах екстреної логістики : дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.06 / Український державний університет науки і технологій. Дніпро, 2024. 382 с.
3. Ляшенко О. М., Прачик В. В. Моделювання та розроблення програмного забезпечення для оперативно-рятувальної служби цивільного захисту ДСНС України. *Вісник ХНТУ*. 2024. № 1 (88). С. 154–162.
4. Комяк В. М., Комяк В. В. Математичне моделювання процесів в пожежній безпеці : навч. посіб. Харків : НУЦЗУ, 2015. 180 с.

***М. В. Литвин***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОГО МИСЛЕННЯ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ТА ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ

Математичне мислення — це не лише вміння рахувати, а передусім здатність до логічного структурування інформації. Для фахівця з безпеки це фундамент професійної придатності: від точності розрахунку ризиків залежить ефективність прийняття рішень у критичних ситуаціях. Математична логіка дозволяє перетворити хаотичний набір даних на чіткий алгоритм дій.

Попри очевидну практичну цінність, математика досі часто сприймається як абстрактна дисципліна, відірвана від реальних потреб суспільства. Такий стереотип знижує мотивацію студентів і молодих дослідників застосовувати математичні методи у власних наукових пошуках. У результаті аналітичні висновки залишаються поверхневими, а прийняття рішень у критичних умовах ґрунтується більше на інтуїції, ніж на точних розрахунках. Сучасна наукова проблема полягає у необхідності переосмислення ролі математичного мислення: від «сухих цифр» до інтегрованого інструментарію, який забезпечує якісний аналіз, прогнозування та оптимізацію процесів як у науці, так і в повсякденному житті.

Дослідники (наприклад, Є. Лодатко, 2011) розглядають математичне мислення як специфічний вид інтелектуальної діяльності, що базується на моделюванні реальних процесів. У роботах С. Скворцової (2019) наголошується, що логічні прийоми (аналіз, синтез, абстрагування) є невід’ємною частиною математичної компетентності сучасної людини. Питання прикладного застосування математики в безпекових структурах активно досліджуються

науковцями ЛДУБЖД, які доводять, що математичні моделі є основою прогнозування небезпечних чинників.

Математичне мислення в побуті — це «внутрішній фільтр», який допомагає відсікати нелогічну інформацію та оптимізувати ресурси (час, кошти, зусилля). Для студентів рятувальних служб математика має стати інструментом автоматизму: в умовах стресу виживає той, хто діє за чітким, математично обґрунтованим алгоритмом. Інтеграція реальних кейсів (наприклад, розрахунок ймовірності відмови техніки) у навчання зробить математику «живою» дисципліною.

Математичне мислення сьогодні виступає не лише як академічна компетенція, а як універсальний інструмент управління інформацією та прийняття рішень. Його значення виходить далеко за межі аудиторії: від планування фінансів і логістики пересувань до прогнозування ризиків у сфері цивільного захисту. Для майбутніх фахівців рятувальних служб воно стає основою професійної готовності — адже саме здатність швидко структурувати дані та діяти за алгоритмом визначає ефективність у критичних умовах. Подальший розвиток освітніх програм має бути спрямований на інтеграцію прикладного математичного моделювання, що дозволить перетворити математику з «теорії» на практичний інструмент безпеки та життєвої стійкості суспільства.

## Література

1. Лодатко Є. О. Математичне мислення: термінологічний вимір. *Вища освіта України*. 2011. № 3. С. 48–54.

2. Скворцова С. О. Формування логічних прийомів мислення як складова математичної компетентності. *Наукові записки [КДПУ]. Серія: Педагогічні науки*. 2019. Вип. 182. С. 132–136.

3. МОДЕЛІ, ЗАСОБИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ УПРАВЛІННЯ БЕЗПЕКОЮ В ПРОЕКТАХ СТВОРЕННЯ ОБ'ЄКТІВ З МАСОВИМ ПЕРЕБУВАННЯМ ЛЮДЕЙ. Монографія. Львів : Вид-во ЛДУ БЖД, 2019.

***В. Г. Швець***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук****, викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ: ФУНДАМЕНТ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

Математика в криптографії є основою створення методів захисту інформації від несанкційонованого доступу, підробки чи знищення. У сучасному цифровому світі вона перетворюється на потужний інструмент безпеки, який забезпечує конфіденційність листування, захист банківських операцій, державних реєстрів та персональних даних. Саме математичні алгоритми лежать в основі роботи інтернет-банкінгу, електронного підпису та захищених мереж.

Перший ключовий аспект - теорія чисел і асиметричне шифрування. Одним із найважливіших відкриттів у криптографії стало використання властивостей простих чисел для створення систем захисту. Алгоритм RSA ґрунтується на тому, що обчислити добуток двох великих простих чисел дуже просто, але виконати зворотну операцію - розкласти отримане число на множники - надзвичайно складно. Ця математична «асиметрія» створює бар’єр для зловмисника: він може бачити зашифроване повідомлення, але без знання секретного ключа його розшифрування перетворюється на задачу, яка потребує колосальних обчислювальних ресурсів. Саме тому довжина ключа та швидкість факторизації визначають рівень безпеки системи. У сучасних умовах це означає, що криптографія фактично спирається на межі можливостей математики та комп’ютерної техніки.

Другий напрям - модульна арифметика та симетричне шифрування. Більшість алгоритмів кодування працюють із залишками від ділення та перетвореннями у скінченних полях. Це дозволяє багаторазово змінювати структуру повідомлення так, щоб без ключа воно виглядало випадковим набором символів. Саме такі математичні операції використовуються в алгоритмах AES, які захищають Wi-Fi мережі, банківські картки та корпоративні бази даних. Мета таких методів - максимізувати стійкість шифру при мінімальному часі обробки даних.

Третій важливий блок - теорія ймовірностей і генерація випадкових чисел. Надійність криптографії напряму залежить від якості випадкових ключів. Якщо ключ можна передбачити, захист втрачає сенс. Тому математичні методи випадкових процесів застосовуються для створення генераторів псевдовипадкових чисел, аналізу ентропії та оцінки ймовірності підбору пароля. Це особливо важливо для військових систем зв’язку та захисту державних інформаційних ресурсів.

Наступний напрям - еліптичні криві та сучасні цифрові підписи. Криптографія на еліптичних кривих (ECC) дозволяє отримати високий рівень безпеки при значно коротших ключах у порівнянні з RSA. Це зменшує

навантаження на пристрої та пришвидшує обмін даними. Такі алгоритми активно застосовуються у смартфонах, месенджерах, блокчейн-технологіях та електронному документообігу.

Нарешті, теорія хеш-функцій і контроль цілісності даних. Хешування - це математичне перетворення інформації у короткий код фіксованої довжини. Воно використовується для перевірки, чи не було змінено файл, пароль або документ. Навіть незначна зміна одного символу призводить до повної зміни значення хешу, що гарантує достовірність даних.

Математика в криптографії є фундаментом інформаційної безпеки. Вона забезпечує захист даних у банківській сфері, оборонних системах, державному управлінні та повсякденному житті. У сучасному інформаційному суспільстві, де стійкість систем зв’язку та захист державних ресурсів є запорукою національної безпеки, математика перестає бути лише теоретичною дисципліною. Вона стає фундаментом для створення криптографічних бар'єрів, здатних протистояти сучасним кіберзагрозам.

## Література

1. Бабенко В. Г., Лахно В. А. Основи криптографічного захисту інформації: навч. посіб. Київ: НАУ, 2018. 312 с.

2. Конахович Г. Ф., Пузиренко О. Ю. Захист інформації в комп’ютерних системах: підручник. Київ: МК-Прес, 2005. 288 с.

3. Горбенко І. Д., Долгов В. І. Прикладна криптографія: навч. посіб. Харків: ХНУРЕ, 2010. 256 с.

4. Копитін А. В., Хорошко В. О. Математичні основи криптології: навч. посіб. Київ: ДУТ, 2016. 240 с.

5. Юдін О. К., Бучик С. С. Інформаційна безпека державних інформаційних ресурсів: монографія. Київ: НАУ, 2015. 320 с.

6. Шаньгін В. Ф. Захист комп’ютерної інформації. Ефективні методи та засоби. Київ: Діалектика, 2011. 544 с.

***Р. В. Романик***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **М. І. Маланчук**, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## РОЗРАХУНОК ЧАСУ ЕВАКУАЦІЇ: МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ

У сучасних умовах зростання урбанізації, ускладнення архітектурних рішень будівель та підвищення щільності перебування людей у громадських просторах проблема забезпечення ефективної та своєчасної евакуації набуває особливої актуальності. Останні роки засвідчують, що навіть за наявності сучасних систем пожежогасіння значна частина загроз для життя людей виникає саме через несвоєчасну або неправильно організовану евакуацію. У цьому контексті розрахунок часу евакуації перестає бути лише інженерною задачею – вона трансформується у складну міждисциплінарну проблему, що поєднує математичне моделювання, теорію ймовірностей, динаміку потоків та елементи поведінкових наук. Особливої ваги набуває застосування сучасних математичних підходів, які дозволяють враховувати як фізичні параметри середовища, так і стохастичну природу поведінки людей [2].

Традиційно в пожежній безпеці використовується підхід, заснований на співставленні двох часових характеристик: доступного безпечного часу (ASET – Available Safe Egress Time) та необхідного часу евакуації (RSET – Required Safe Egress Time). Безпека вважається забезпеченою за умови, що ASET перевищує RSET. Однак сучасні дослідження показують, що така модель є надто спрощеною, оскільки не враховує динамічних змін середовища, взаємодію потоків людей та психологічні фактори впливу.

Відповідно до цього, в умовах сьогодення активно розвиваються математичні моделі, які дозволяють деталізувати процес евакуації, зокрема через використання диференціальних рівнянь, клітинних автоматів та агентно-орієнтованих систем [3].

Одним із ключових напрямів є застосування теорії масового обслуговування та моделей потоків. Людський потік під час евакуації часто розглядається як потік частинок, для якого можна визначити щільність, швидкість руху та пропускну здатність евакуаційних шляхів. У найпростішому вигляді час евакуації можна оцінити як відношення кількості людей до пропускної здатності виходу, однак на практиці ця залежність значно складніша. Вона включає вплив вузьких місць, зміну швидкості руху залежно від щільності натовпу та ефект «хвиль» у русі людей. У зв’язку з цим математичні моделі дозволяють врахувати не лінійність процесу та уникнути грубих спрощень.

Досліджено, що особливу увагу в сучасних дослідженнях приділяють агентно-орієнтованому моделюванню, яке дає змогу описати поведінку кожної людини як окремого агента з власними характеристиками та реакціями. Такий підхід дозволяє врахувати індивідуальні особливості: швидкість руху, рівень стресу, здатність орієнтуватися у просторі.

Як показано в сучасних роботах, використання агентних моделей значно підвищує точність прогнозування часу евакуації та дозволяє моделювати складні

сценарії, включаючи часткове блокування виходів або зміну умов середовища під час пожежі [3]. Не менш важливим є врахування невизначеності, яка є невід'ємною складовою реальних евакуаційних процесів. Фактори, такі як швидкість поширення диму, температура, рівень освітлення, а також психологічний стан людей, не можуть бути точно передбачені.

У зв'язку з цим сучасні підходи передбачають використання ймовірнісних моделей та методів Монте-Карло, які дозволяють оцінити діапазон можливих сценаріїв розвитку подій. Дослідження показують, що врахування невизначеності дозволяє отримати більш реалістичні результати та підвищити надійність систем пожежної безпеки [2].

Окремого значення набуває інтеграція математичних моделей із сучасними цифровими технологіями, зокрема BIM та VR. Завдяки цьому стає можливим створення детальних тривимірних моделей будівель та проведення віртуальних симуляцій евакуації. Такі моделі дозволяють не лише розрахувати час евакуації, а й візуалізувати процес, виявити потенційні проблемні зони та оптимізувати розташування евакуаційних виходів. [4].

Сучасні математичні моделі дозволяють інтегрувати параметри розвитку пожежі у розрахунок часу евакуації, що забезпечує більш комплексний підхід до оцінки безпеки. Зокрема, врахування впливу пожежі на поведінку людей дозволяє точніше визначити момент, коли евакуація стає неможливою або небезпечною [1].

Отже, сучасні математичні підходи до розрахунку часу евакуації суттєво розширюють можливості традиційних методів. Вони дозволяють враховувати складність реальних умов, невизначеність параметрів та індивідуальні особливості поведінки людей. Використання агентних моделей, ймовірнісних методів та цифрових технологій відкриває нові перспективи для підвищення рівня пожежної безпеки. Саме поєднання математичної точності та практичної орієнтації дозволить забезпечити ефективний захист життя людей у надзвичайних ситуаціях.

## Література

1. Голшані Ф., Фанг Л. Оцінювання безпеки будівель та евакуації людей з урахуванням впливу пожежі // *International Journal of Disaster Risk Reduction*. 2025. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212420925000834 .

2. Гопкін К., Кінсі М. Робота з невизначеністю в моделюванні пожеж та евакуації. 2025. URL: .researchgate.net/publication/389055847_Working_with_uncertainty_in_fireevacuation_modelling .

3. Іслас-

4. Тоскі М., Куевас Е., Перес-Сіснерос М., Ескобар Г. Агентне моделювання евакуації: підвищення безпеки будівель у надзвичайних ситуаціях // *Smart Cities*. 2024. Т. 7, № 6. URL: https://doi.org/10.3390/smartcities7060123 .

5. Панья Д. С., Кім Т., Хео М., Чу С. Віртуальне моделювання евакуації на основі BIM і VR для управління пожежною безпекою. 2024. URL: https://papers.cumincad.org/data/works/att/ecaade2024_217.pdf .

***О. П. Микитка, Я. Ю. Шифер***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ У КОНТЕКСТІ СУЧАСНОЇ ВІЙНИ В УКРАЇНІ

Сучасна війна в Україні демонструє, що математика є не лише теоретичною наукою, а й важливим практичним інструментом у військовій сфері. Вона безпосередньо впливає на ефективність бойових дій, планування операцій, координацію сил та збереження життя військовослужбовців. Застосування математичних методів дозволяє аналізувати обстановку, прогнозувати розвиток подій і приймати обґрунтовані рішення навіть в умовах нестабільності та обмеженої інформації.

Теорія ймовірностей і статистика використовуються для оцінки ризиків і прогнозування дій противника. На основі цих методів військові можуть моделювати потенційні сценарії розвитку бою, оцінювати ймовірність успіху певних маневрів і визначати найбільш безпечні та ефективні способи виконання завдань. Оптимізаційні методи допомагають раціонально розподіляти ресурси, планувати маршрути постачання та розгортання техніки, зменшуючи витрати часу та матеріальних засобів. Теорія ігор застосовується для аналізу стратегічних рішень у складних умовах, де враховуються дії противника та можливі наслідки власних маневрів.

Математичний аналіз і диференціальні рівняння дозволяють описувати рух техніки, фізичні процеси та динаміку бойових систем. За їх допомогою моделюють траєкторії польоту снарядів, оцінюють швидкість і прискорення рухомих об’єктів, прогнозують поведінку техніки в умовах зміни ландшафту чи погодних умов. Криптографія гарантує безпеку зв’язку та захист інформації від перехоплення, що критично для планування операцій та координації дій. Булева алгебра і логіка лежать в основі роботи комп’ютерів, а матрична алгебра використовується в алгоритмах штучного інтелекту для автоматичної обробки даних та прийняття рішень.

Особливе значення в сучасній війні набувають технології штучного інтелекту та безпілотні системи. Вони дозволяють збирати, обробляти та аналізувати великі обсяги інформації, що значно підвищує ефективність військових дій. Наприклад, безпілотні літальні апарати (БПЛА) збирають дані в реальному часі, здійснюють розвідку та навігацію, а завдяки алгоритмам штучного інтелекту вони здатні частково автономно орієнтуватися, оцінювати ситуацію та приймати рішення. Теорія графів застосовується для аналізу транспортних мереж, вибору оптимальних маршрутів постачання та евакуації, а Фур’є-аналіз використовується для обробки сигналів у системах зв’язку, дозволяючи підвищити якість переданих даних та зменшити вплив шумів.

Геометрія та навігація забезпечують точне визначення координат і ефективне виконання бойових завдань. Це особливо важливо в артилерії, де ефективність стрільби залежить від точності розрахунків координат цілі, дальності та кутів наведення, а також від врахування метеорологічних умов і балістичних параметрів снарядів. Математичні алгоритми забезпечують роботу систем позиціонування, синхронізацію часу між різними платформами та точне визначення місцезнаходження об'єктів.

Методи оптимізації дозволяють планувати логістику, визначати оптимальні маршрути перевезення ресурсів та скорочувати час доставки необхідного обладнання. Моделювання бойових дій на основі диференціальних рівнянь та стохастичних процесів дає змогу прогнозувати результати операцій, тестувати тактичні рішення та мінімізувати втрати. Теорія інформації підвищує ефективність передачі даних та радіозв'язку, а методи машинного навчання і аналізу великих даних допомагають виділяти закономірності в поведінці противника, автоматично оцінювати ситуацію та підвищувати точність розпізнавання об'єктів на зображеннях і відео.

Таким чином, математичні відкриття і методи сьогодні є основою сучасних військових технологій та рішень. Вони забезпечують точність, ефективність, захищеність інформації та здатність адаптуватися до складних умов сучасної війни, дозволяючи військам діяти швидко, безпечно та максимально результативно. Математика є фундаментом, що поєднує науку, технології та практику на полі бою.

**Література**

1. Настанова «З вогневої підтримки артилерійськими підрозділами». — К.: ДПСУ/ЗСУ.

2. Кулініч О. І. Теорія статистики / О. І. Кулініч, Р. О. Кулініч. – Київ : Знання, 2010. – 239 с.

3. Романич І. Б., Тимчишин С. О., Логойда-Копик М. Р. Математичні методи в логістиці: аналіз, класифікація, прикладові моделі. *Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія «Економічні науки»*. 2024. № 53. С. 53–62. DOI: https://doi.org/10.32999/ksu2307-8030/2024-53-8

4. Фурсенко О., Черновол Н. Математичне моделювання бойових операцій з можливістю перерозподілу бойових ресурсів між зонами зустрічу та розподілу резервів. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2025. № 1. С. 63–74. DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2025-1-6

***А. В. Горностай***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ПОХІДНА: ВІД ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ ДО ЗАСТОСУВАНЬ У ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ

**Актуальність теми** зумовлена стрімким розвитком штучного інтелекту, де похідна є ключовим інструментом оптимізації моделей машинного навчання.

У роботі розглянуто поняття похідної як фундаментального інструменту математичного аналізу. Проаналізовано її геометричний і фізичний зміст, а також роль у задачах оптимізації. Особливу увагу приділено застосуванню похідних у сучасних методах машинного навчання, зокрема в алгоритмах градієнтного спуску та зворотного поширення помилки.

Похідна є одним із фундаментальних понять математичного аналізу, що використовується для дослідження змін величин і поведінки функцій. Вона має широке застосування не лише в математиці, але й у фізиці, економіці, інженерії та інформатиці. Актуальність теми зумовлена стрімким розвитком штучного інтелекту, де похідна виступає основним інструментом оптимізації моделей.

Геометрично похідна функції в точці визначає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції та характеризує швидкість її зміни. Використання похідної дозволяє досліджувати монотонність функцій, знаходити точки екстремуму та аналізувати поведінку функції на заданих проміжках.

У фізиці похідна набуває конкретного змісту, описуючи реальні процеси. Зокрема, швидкість є похідною координати за часом, а прискорення — похідною швидкості. Це дає змогу аналізувати рух тіл і зміни фізичних величин.

Одним із найважливіших застосувань похідної є розв’язання задач оптимізації. Вона дозволяє знаходити мінімальні та максимальні значення функцій, що є необхідним у багатьох практичних задачах, таких як мінімізація витрат або максимізація ефективності.

У сучасному машинному навчанні похідна відіграє ключову роль. Навчання моделей базується на мінімізації функції втрат, яка оцінює похибку прогнозу. Для цього широко застосовується метод градієнтного спуску, який використовує градієнт функції для визначення напряму найшвидшого зменшення значення функції.

У багатовимірному випадку використовується градієнт — вектор часткових похідних. Ітераційне оновлення параметрів моделі дозволяє поступово досягти мінімуму функції втрат. Для ефективного обчислення похідних у складних моделях використовується алгоритм зворотного поширення помилки, який забезпечує швидке обчислення градієнтів у нейронних мережах.

Отже, похідна є універсальним інструментом, що поєднує теоретичну математику з практичними застосуваннями. Вона відіграє важливу роль у розвитку сучасних технологій, зокрема систем штучного інтелекту, що підтверджує її фундаментальне значення.

Таким чином, дослідження похідної демонструє глибокий зв’язок між фундаментальною наукою та сучасними технологіями.

**Література**

1. Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І. Вища математика. Математичний аналіз. Частина 1 : навч. посіб. Дніпро : Український державний університет науки і технологій, 2023. 287 с.

2. Каленюк П. І., Костробій П. П., Мохонько А. З. та ін. Математичний аналіз : підручник. Ч. 1. Львів : Растр-7, 2021. 326 с.

3. Сачанюк-Кавецька Н. В., Гетманюк О. І., Гуда О. В. Використання штучного інтелекту у вивченні вищої математики студентами технічних спеціальностей: освітній ефект // Системні технології. 2026. № 5(162). С. 241–250.

4. Гудфеллоу І., Бенжіо Й., Курвіль А. Глибинне навчання. – Київ: Наукова думка, 2018. 704 с.

***М. Я. Реган***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## СТРАТЕГІЯ ТА ТЕОРІЯ ІГОР В МАТЕМАТИЦІ

У сучасному спорті дедалі більшого значення набуває використання математичних методів аналізу, теорії ймовірностей, статистики та теорії ігор.

Розвиток цифрових технологій і систем збору даних дозволяє детально аналізувати спортивні події та прогнозувати поведінку гравців і команд. Математичне моделювання допомагає оптимізувати тактичні рішення, підвищити ефективність підготовки спортсменів і мінімізувати вплив випадкових факторів. Саме тому дослідження застосування математичних моделей у спортивній діяльності є актуальним як з наукової, так і з практичної точки зору.

Теорія ігор є одним із важливих напрямів прикладної математики, що досліджує прийняття рішень у ситуаціях взаємодії кількох сторін із різними інтересами. Її принципи активно використовуються у спорті, де кожен учасник прагне обрати оптимальну стратегію для досягнення переваги над суперником.

Одним із показових прикладів застосування теорії ігор є аналіз виконання пенальті у футболі. Через високу швидкість польоту м'яча та незначну відстань до воріт воротар не має достатнього часу для реакції після удару, тому змушений приймати рішення одночасно з гравцем. У таких умовах оптимальною математичною моделлю є використання змішаних стратегій. Змішана стратегія передбачає випадковий вибір напряму удару з певними ймовірностями. Такий

підхід робить дії нападника менш передбачуваними та знижує можливість адаптації суперника до його поведінки.

Іншим важливим прикладом використання математичних методів у спорті є система Sabermetrics. Даний підхід ґрунтується на використанні статистичних показників і великих масивів даних для оцінювання ефективності спортсменів. На відміну від традиційних методів, що часто базуються на суб'єктивній оцінці тренерів і скаутів, Sabermetrics дозволяє отримати об'єктивну характеристику результативності гравців. Використання статистичних моделей дає можливість виявляти спортсменів із високим потенціалом, які можуть бути недооціненими через вік, фізичні параметри чи особливості техніки гри. У результаті спортивні події розглядаються як система ймовірнісних процесів, кожен з яких має певну математичну цінність.

У волейболі математичний підхід також відіграє важливу роль. Під час побудови атакувальних стратегій використовується геометричний аналіз ігрового простору. Зокрема, гравці спрямовують удари у так звані «зони конфлікту» — ділянки між позиціями захисту суперника, де виникає невизначеність у розподілі відповідальності між гравцями. Крім того, важливим є аналіз ризику під час виконання подачі. Силова подача характеризується підвищеною ймовірністю помилки, проте значно збільшує шанси отримання прямого очка. Натомість більш передбачувані дії можуть зменшити кількість помилок, але водночас знижують ймовірність отримання стратегічної переваги над сильнішим суперником. Таким чином, команди часто свідомо обирають контрольований ризик як елемент ігрової стратегії.

Сучасні статистичні системи також дозволяють аналізувати тисячі ігрових епізодів, визначати закономірності поведінки суперників та прогнозувати їхні дії у вирішальних моментах матчу. Це суттєво підвищує ефективність тактичної підготовки спортсменів.

Особливий інтерес становить використання математичних моделей для пояснення фізичних явищ у спорті. Одним із таких явищ є ефект Магнуса, який описує зміну траєкторії польоту м'яча внаслідок його обертання. Через різницю тиску повітря з різних сторін м'яча виникає сила, що змінює напрямок його руху. Іншим прикладом є волейбольна подача типу «флоат», для якої характерна відсутність обертання. Унаслідок виникнення турбулентних потоків повітря траєкторія такого м'яча стає нестабільною та важко прогнозованою.

Дослідження також показують, що через обмежений час реакції (близько 0,4 секунди) людський мозок не здатний повністю відстежити траєкторію швидкого м'яча. Тому спортсмени фактично прогнозують його подальший рух, використовуючи інформацію, отриману протягом перших мілісекунд після удару.

Отже, використання математичних моделей, теорії ігор та статистичних методів у спорті демонструє, що високі результати дедалі більше залежать не лише від фізичної підготовки спортсменів, але й від точності аналізу, правильного розрахунку ймовірностей та прийняття стратегічно обґрунтованих рішень.

**Література**

1. Вітлінський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. - Київ : КНЕУ, 2015. - 456 с.

2. Файнзільберг Л.С., Жуковська О.А., Якимчук В.С. Теорія прийняття рішень : навч. посіб. - Київ : Освіта України, 2018. 246 с.

3. Лопатєв, А. О. (2016). Математичне моделювання у фізичному вихованні та спорті. Львів: ЛДУФК. (Опис розрахунку траєкторій польоту м'яча).

***А. В. Гринюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У ВІДКРИТТІ НОВИХ АЛГОРИТМІВ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ: ПРИКЛАД ALPHATENSOR

У сучасному світі стрімко зростає роль інформаційних технологій, штучного інтелекту та обчислювальних систем. Однією з базових математичних операцій, яка широко використовується у машинному навчанні, комп'ютерній графіці, аналізі даних та моделюванні складних процесів, є множення матриць . Від швидкості виконання цієї операції залежить ефективність роботи багатьох сучасних програм і технологій.

Множення матриць є однією з найбільш ресурсомістких операцій. Класичний алгоритм для матриць розміром $n \times n$ має обчислювальну складність $O(n^3)$. Протягом десятиліть науковці працювали над оптимізацією цього показника. Першим значним проривом став алгоритм Штрассена (1969 р.), який знизив кількість операцій для матриць $2 \times 2$ з 8 до 7, що дало загальну складність $O(n^{2.81})$. Основна проблема полягає у знаходженні ще більш ефективних розкладів для матриць більшого розміру, що є надзвичайно складною комбінаторною задачею.

У 2022 році компанія DeepMind представила систему AlphaTensor, яка використовує навчання із підкріпленням (Reinforcement Learning) для автоматичного пошуку математичних алгоритмів.

- Система розглядає пошук алгоритму як гру, де метою є розкладання тензора множення матриць на мінімальну кількість доданків.
- AlphaTensor вдалося знайти алгоритм для множення матриць розміром $4 \times 4$ у скінченних полях, який потребує лише 47 операцій замість 49 (метод Штрассена).
- Було відкрито десятки нових алгоритмів для різних розмірностей, які забезпечують швидше виконання обчислень на специфічному обладнанні (GPU, TPU).

Отримані результати підтвердили можливість застосування штучного інтелекту для відкриття нових математичних алгоритмів і закономірностей, що відкриває перспективи для подальшого розвитку прикладної математики .

Використання штучного інтелекту в математиці є одним із найперспективніших напрямів сучасних досліджень. Системи, подібні до AlphaTensor, дозволяють значно прискорити процес пошуку нових алгоритмів і підвищити ефективність обчислювальних процесів. Вважаю, що у майбутньому такі технології можуть бути застосовані для розв'язання складних математичних задач, які раніше потребували багаторічних досліджень. Це сприятиме розвитку нових технологій у сфері штучного інтелекту, інженерії та науки загалом.

Створення системи AlphaTensor стало важливим досягненням сучасної науки, яке демонструє можливість використання штучного інтелекту для відкриття нових математичних алгоритмів. Використання таких алгоритмів дозволяє підвищити швидкість обчислень і зменшити витрати ресурсів у різних галузях науки і техніки.

Подальші дослідження у цьому напрямі можуть сприяти створенню більш ефективних методів обробки інформації та відкриттю нових можливостей застосування математичних знань у сучасному світі.

**Література**

1. Fawzi, A., et al. Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning. Nature. 2022. Vol. 610. P. 47–53.

2. Куттлер К. Множення матриць. LibreTexts: Математика.URL: https://techtoday.in.ua/news/komp-yutery-navchylysya-mnozhyty-po-novomu-i-mozhut-staty-do-20-shvydshymy-156138.html (дата звернення: 30.03.2026).

3. Оптимізація множення квантованих матриць для великих мовних моделей. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2024. № 1 (75). URL: https://journals.nupp.edu.ua/sunz/article/view/4019 (дата звернення: 30.03.2026).

4. Kordunova, Y., Feltynowski, M., Prydatko, O., & Smotr, O. (2023). МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗРОБКИ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ БЕЗПЕКО-ОРІЄНТОВАНОГО СПРЯМУВАННЯ. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*, *27*, 23-31. URL: https://journal.ldubgd.edu.ua/index.php/Visnuk/article/view/2530 .27.2023.03 (дата звернення: 30.03.2026).

5. Комп'ютери навчилися множити по-новому і можуть стати швидшими**.** *TechToday*. 2022.URL:https://ukrayinska.libretexts.org/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B0_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D1%88%D0%B8%D0%B9_%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81_%D0%B7_%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D1%97_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B8_(Kuttler)/02%3A_%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%96/2.02%3A_%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8C

***М. А. Крачковський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук*** *викладач кафедри прикладної математики та механіки*

## МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РОБОТИ РЯТУВАЛЬНИХ ДРОНІВ У СИСТЕМІ ДСНС

Зростання кількості надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру вимагає впровадження сучасних технологій у діяльність ДСНС. Одним із таких інструментів є безпілотні літальні апарати (БПЛА). Однак ефективність їх використання визначається не лише технічними характеристиками, а й математичними алгоритмами, що забезпечують стабільність польоту, точність позиціонування та швидкість прийняття рішень.
Математичне описання руху дрона. Рух безпілотного апарата описується рівняннями кінематики. Положення дрона у просторі визначається радіус-вектором:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Швидкість і прискорення визначаються як перша та друга похідні за часом відповідно:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}, \qquad a(t) = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Для повної стабілізації в системах автопілоту також враховуються кути Ейлера, що дозволяє здійснювати корекцію траєкторії в умовах вітрових навантажень.
Оптимізація маршрутів польоту. Однією з ключових задач є мінімізація часу прибуття дрона до зони надзвичайної ситуації. Задача може бути представлена у вигляді графа, де вершини — це точки маршруту, а ребра — можливі шляхи між ними. Мінімальний шлях визначається як:

$$L = min \sum_{i=1}^{n} d_i$$

де $d_i$ — метрична відстань або часовий еквівалент проходження ділянки.

Для розв'язання застосовуються алгоритми теорії графів (зокрема, алгоритм Дейкстри та A*), які дозволяють будувати безпечні маршрути з урахуванням перешкод (будівель, ліній електропередач) та зон небезпечного теплового впливу.

Обробка даних та ймовірнісні методи. Дрони здійснюють збір великої кількості даних (відео, тепловізійні зображення). Для їх аналізу використовуються методи теорії ймовірностей. Ймовірність виявлення об'єкта можна описати як:

$$P = m/n$$

де $m$ — кількість успішних виявлень, $n$— загальна кількість спостережень. Застосування фільтрації сигналів та Баєсівського оцінювання дозволяє підвищити точність виявлення осередків пожежі та постраждалих під завалами.

Моделювання надзвичайних ситуацій. На основі даних з дронів здійснюється математичне моделювання розвитку пожежі. Однією з базових моделей є рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

де T— температура, α — коефіцієнт температуропровідності, який визначає швидкість вирівнювання температури, $\nabla^2$ – оператор Лапласа. Це дозволяє прогнозувати напрямок поширення пожежі та ефективно розподіляти ресурси.

Висновки: Математичні методи є фундаментальною основою роботи рятувальних дронів у системі ДСНС. Вони забезпечують точність навігації, оптимізацію маршрутів та ефективну обробку інформації. Використання математичного моделювання дозволяє прогнозувати розвиток надзвичайних ситуацій, що суттєво підвищує ефективність рятувальних операцій та сприяє збереженню людських життів.

## Література

1. Биков В. Ю. Основи безпілотних літальних апаратів : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2020. 224 с.
2. Коваленко О. В. Математичне моделювання систем і процесів : підручник. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2019. 312 с.
3. Державна служба України з надзвичайних ситуацій. Офіційний вебсайт. URL: https://dsns.gov.ua (дата звернення: 25.03.2026).
4. Russell S., Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. 4th ed. Pearson, 2021. 1152 p.

***М. В. Бобик***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики та механіки*

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КРИПТОГРАФІЇ ТА ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ

У сучасному інформаційному суспільстві захист даних є однією з ключових умов безпечного функціонування інформаційних систем. Швидкий розвиток комп'ютерних мереж, електронної комерції та цифрових сервісів зумовлює необхідність використання ефективних методів захисту інформації. Одним із найважливіших інструментів забезпечення конфіденційності даних є криптографія, яка базується на математичних моделях та алгоритмах. Метою роботи є дослідження математичних основ сучасних криптографічних алгоритмів та аналіз ролі теорії чисел і алгебраїчних структур у забезпеченні захисту інформації.

Основу більшості криптографічних систем становлять такі розділи математики, як теорія чисел, дискретна математика, алгебра та теорія ймовірностей. Саме математичні властивості чисел та функцій визначають криптографічну стійкість алгоритмів до несанкціонованого розшифрування. Одним із ключових математичних інструментів криптографії є модульна арифметика. Багато алгоритмів шифрування використовують операції піднесення до ступеня за модулем великого числа. Такі операції легко виконуються на комп'ютері, проте їх обернення без знання спеціального ключа є складним обчислювальним завданням.

Прикладом використання математичних методів є алгоритм **RSA**. Процес шифрування повідомлення описується формулою:

$$c = m^e (mod\ n)$$

де $m$ – вихідне повідомлення, $e$ - відкритий ключ, $n$ - модуль, який утворюється як добуток двох великих простих чисел $p$ і $q$, $c$ — зашифроване повідомлення. Процес дешифрування виконується за формулою:

$$m = c^d (mod\ n)$$

де $d$ - секретний ключ. Без знання простих множників числа $n$ (тобто $p$ і $q$) знайти ключ $d$ є надзвичайно складним завданням. Саме складність факторизації великих чисел забезпечує криптографічну стійкість RSA.

Крім RSA, важливе місце займає криптографія на основі еліптичних кривих (ECC). Математична модель найчастіше описується рівнянням у формі Вейєрштрасса:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

Еліптичні криві дозволяють створювати криптографічні системи з високим рівнем безпеки при використанні коротших ключів, що є критично важливим для мобільних пристроїв та вбудованих систем (IoT).

Значну роль у захисті інформації відіграють криптографічні хеш-функції, зокрема алгоритм **SHA-256**. Хеш-функції перетворюють повідомлення довільної тривалості у фіксоване бітове значення. Навіть незначна зміна вхідних даних призводить до суттєвої зміни результату (ефект лавини), що дозволяє ефективно перевіряти цілісність інформації.

Математичні методи є фундаментом сучасної криптографії. Використання теорії чисел, алгебраїчних структур та складних обчислювальних завдань дозволяє створювати надійні системи захисту інформації. Подальший розвиток галузі пов'язаний із дослідженням постквантових алгоритмів, які повинні забезпечити безпеку в умовах розвитку квантових обчислень.

**Література**

1. Miao Z. Elliptic curve cryptography: Theory, security, and applications in modern network security. *Theoretical and Natural Science*. 2024. Vol. 35. P. 112–118.
2. Mayfly optimistic hyperelliptic curve cryptosystem / R. N. T. Reddy, M. Kavitha, G. S. Reddy et al. *Frontiers in Computer Science*. 2024. Vol. 6. Art. 1381850. DOI: https://doi.org/10.3389/fcomp.2024.1381850
3. A systematic review on elliptic curve cryptography algorithm for Internet of Things. *Computers & Electrical Engineering*. 2024. Vol. 115. Art. 109123.

***І. А. Тітієвський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА У ВИНАХОДІ ДВИГУНА ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ: ОБ'ЄМ, ТИСК ТА ТЕРМІЧНИЙ ККД

Сучасний двигун внутрішнього згоряння є одним із найвизначніших технічних винаходів людства. Його створення стало можливим не лише завдяки розвитку механіки та матеріалознавства, а насамперед завдяки використанню математичних методів і законів термодинаміки. Кожен етап розвитку двигунобудування супроводжувався математичними розрахунками, що дозволяли прогнозувати поведінку газів, визначати оптимальні параметри конструкції та оцінювати ефективність перетворення теплової енергії в механічну роботу.

Основою теоретичного аналізу теплових машин стали дослідження французького інженера Саді Карно. У праці «Роздуми про рушійну силу вогню» він довів, що жоден тепловий двигун не може працювати ефективніше за ідеальний цикл Карно. Максимальний теоретичний коефіцієнт корисної дії (ККД) визначається співвідношенням:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$T_1$ — абсолютна температура нагрівача (К);$T_2$ — абсолютна температура холодильника (К).

Це рівняння демонструє фундаментальне обмеження, встановлене законами термодинаміки. Для підвищення ефективності двигуна необхідно або збільшувати температуру продуктів згоряння, або зменшувати температуру охолодження. Саме математичний аналіз показав, що абсолютне значення ККД ніколи не може досягти $100\%$, оскільки частина енергії неминуче відводиться до навколишнього середовища.

Наступним важливим кроком стало створення чотиритактного двигуна Ніколаусом Отто. Його дослідження ґрунтувалися на математичному аналізі процесу стиснення паливно-повітряної суміші.

Основним параметром конструкції є ступінь стиснення ($\varepsilon$):

$$\varepsilon = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{V_h + V_c}{V_c}$$

$V_h$ — робочий об'єм циліндра; $V_c$ — об'єм камери згоряння.

Саме ступінь стиснення визначає величину тиску та температури суміші перед займанням. Для ідеального циклу Отто коефіцієнт корисної дії обчислюється за формулою:

$$\eta_{\text{Отто}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$$

$k$ — показник адіабати ($k \approx 1{,}4$ для повітря).

Із цього співвідношення видно, що збільшення ступеня стиснення приводить до підвищення ККД. Наприклад, якщо ступінь стиснення збільшити з $8$ до $12$, теоретичний ККД зростає приблизно з $56\%$ до $63\%$. Однак подальше збільшення обмежується явищем детонації, яке також прогнозується математичними моделями процесу згоряння.

Подальший розвиток двигунобудування пов'язаний із роботами Рудольфа Дизеля. На відміну від бензинових двигунів, у дизельному двигуні займання палива відбувається без використання електричної свічки. Математично цей процес описується рівнянням стану ідеального газу (Клапейрона — Менделєєва):

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{P \cdot V}{n \cdot R}$$

$P$-тиск газу; $V$- об'єм; $n$- кількість речовини (в молях);$R$ — універсальна газова стала; $T$ - абсолютна температура. Під час сильного стискання об'єм повітря $V$ різко зменшується, а температура $T$ істотно зростає. Коли вона перевищує температуру самозаймання дизельного палива (приблизно $220$--$250°\text{C}$), відбувається автоматичне займання. Саме математичні розрахунки підтвердили можливість реалізації такого принципу роботи ще до побудови першого працездатного двигуна.

Не менш важливу роль у проєктуванні двигуна відіграє геометрія. Робочий об'єм одного циліндра ($V$) визначається формулою циліндра:

$$V = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot S$$

$D$ — діаметр циліндра; $S$ — хід поршня.

Співвідношення між діаметром і ходом поршня ($S/D$) істотно впливає на експлуатаційні характеристики двигуна:

Якщо $S/D > 1$, двигун називають довгохідним. Він характеризується високим крутним моментом на малих обертах (важливо для вантажівок і тракторів).

Якщо $S/D < 1$, отримують короткохідний двигун, здатний працювати на значно більших обертах (характерно для спортивних авто та мотоциклів).

Таким чином, навіть вибір геометричних параметрів конструкції здійснюється на основі математичного аналізу. Під час роботи двигуна важливим є також енергетичний баланс, який описується рівнянням:

$$Q_{\text{заг}} = Q_{\text{роб}} + Q_{\text{охол}} + Q_{\text{вихл}} + Q_{\text{тертя}}$$

$Q_{\text{заг}}$ — загальна теплота від згоряння палива;
$Q_{\text{роб}}$ — енергія, що перетворюється на корисну механічну роботу;
$Q_{\text{охол}}$ — теплота, відведена системою охолодження;
$Q_{\text{вихл}}$ — втрати теплоти з вихлопними газами;
$Q_{\text{тертя}}$ — механічні втрати на тертя деталей.

Практичні дослідження показують, що лише близько 30%-40% теплоти сучасних дизельних двигунів і 25%-35% бензинових двигунів перетворюється на корисну механічну роботу. Решта енергії втрачається. Математичний аналіз теплового балансу допомагає конструкторам визначати напрямки підвищення ефективності: удосконалення систем охолодження, зменшення тертя, використання турбонаддуву, безпосереднього впорскування палива та рекуперації теплової енергії.

Отже, історія створення двигуна внутрішнього згоряння переконливо демонструє визначальну роль математики в розвитку техніки. Формули термодинаміки, геометричні розрахунки, рівняння стану газів та методи математичного моделювання стали основою створення ефективних теплових машин.

Сучасні двигуни вже наблизилися до межі, визначеної фундаментальними законами термодинаміки, тому подальше підвищення їхньої ефективності можливе переважно завдяки використанню нових матеріалів, цифрового моделювання та інтелектуальних систем керування.

**Література**

1. Буляндра О. Ф. Технічна термодинаміка : підручник. 2-ге вид., випр. Київ : Техніка, 2006. 320 с.
2. Вассерман О. А., Слинько О. Г. Технічна термодинаміка і теплообмін : підручник. Одеса : Фенікс, 2019. 324 с.
3. Марченко А. П., Рязанцев М. К., Шеховцов А. Ф. Двигуни внутрішнього згоряння : у 6 т. Т.1. Харків : НТУ «ХПІ», 2004.
4. Митко В. В. Автомобільні двигуни. Методи побудови теоретичних діаграм теплового, динамічного розрахунків та характеристики автотракторних двигунів : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2022. 172 с.

***В. О. Загура***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЦИФРА, ЩО ЗМІНИЛА ВСЕ: ЕВОЛЮЦІЯ ПОРОЖНЕЧІ

Нуль у математиці — це число, яке при додаванні до будь-якого іншого числа не змінює його значення, виступаючи адитивним нейтральним елементом. Формула a + 0 = a демонструє цю властивість для будь-якого числа a. На числовій прямій він є критичною межею, що розділяє світ додатних чисел від світу від'ємних, будучи точкою відліку.

З філософської точки зору нуль є унікальним, оскільки одночасно означає «ніщо» як відсутність кількості та «все» як початок координат, точку вибуху або нескінченність. Це математичне втілення «ніщо», яке робить можливим існування «всього».

Історія виникнення нуля показує, що стародавні греки та римляни не мали такого поняття, оскільки вважали, що «ніщо» не може бути числом, а сприймали його як хаос та заперечення всесвіту. Водночас давня цивілізація Мая вже мала власне уявлення про нього та використовувала нуль у своїх точних календарях.

Як повноцінне число нуль почав існувати в VII столітті завдяки індійському математику Брахмагупті, який назвав його «шунья» (пустота) та описав правила арифметики, хоча й помилково вважав, що при діленні на нуль буде нуль.

Парадокс ділення на нуль полягає в тому, що при діленні одиниці на нескінченно малі дільники ми отримуємо нескінченність.

Подальшу популяризацію нуля та індійської позиційної системи здійснив перський математик Аль-Хорезмі, завдяки якому ми сьогодні маємо систему числення з десяти цифр від нуля до дев'яти.

Перехід від римської системи (наприклад, CLXXXVIII) до арабської (188) революціонізував математику, адже простота позиційної системи дозволила досягти сучасного рівня науки.

У середньовічній Європі нуль був під забороною, оскільки робив математику занадто доступною, що заважало чиновникам проводити махінації.

Лише в епоху раннього нового часу Ньютон та Лейбніц ввели поняття границі для чисел, що прямують до нуля, поклавши початок математичному аналізу та сучасній інженерії.

У сучасному світі нуль є фундаментом цифрової реальності, де комп'ютерний процесор працює на комбінації нулів («струму немає») та одиниць («струм є»). Без нього ми б досі користувалися механічними калькуляторами, а сучасний штучний інтелект не мав би свого фундаменту — бінарного коду та орієнтира навчання, де ідеальна точність означає нуль помилок.

У фізиці поняття нуля є ключовим для вивчення мікро- та макросвітів. Температура абсолютного нуля (-273,15) є межею, де зупиняється будь-який рух атомів і починається квантова магія. Чорні діри також представляють «нуль» у

просторі-часі, де величезна маса цілої зірки стискається в точку з нульовим об'ємом (сингулярність), що призводить до «поломки» математики через нескінченну щільність. Таким чином, нуль — це найпотужніший інструмент людства, який дозволяє вимірювати нескінченність, програмувати реальність і розуміти походження всесвіту. Це те саме «ніщо», без якого «все» було б неможливим.

**Література**

1. Сейфе Ч. Нуль: Біографія небезпечної ідеї. 2001.58ст.
2. Каплан Р. Ніщо, що є: Природна історія нуля. 1999.-43ст.
3. аль-Хорезм М. Книга про індійський рахунок. 820.-43ст.
4. Везеролл Д.О. Порожнеча: Дивна фізика нічого. 2017.-85ст.

***М. А. Сеньків***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **О. Л. Чопик**, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У СУЧАСНІЙ МЕДИЦИНІ

Математичне моделювання епідемій та фізіологічних процесів є фундаментальною основою сучасної біомедицини, що дозволяє перетворювати складні біологічні явища у чіткі кількісні закономірності.

В основі епідеміологічного аналізу лежить класична SIR-модель, яка розглядає популяцію як систему взаємодіючих груп: сприйнятливих до хвороби, інфікованих та тих, хто одужав або набув імунітету. За допомогою нелінійних диференціальних рівнянь ця модель описує динаміку переходів між станами, дозволяючи дослідникам розрахувати ключовий показник — базове число відтворення. Цей параметр визначає, чи перетвориться поодинокий випадок захворювання на масштабну епідемію, чи інфекція поступово згасне. Завдяки таким розрахункам стає можливим не лише прогнозувати пік захворюваності та загальну кількість хворих, а й математично обґрунтувати стратегії вакцинації та ефективність карантинних заходів, розраховуючи необхідний відсоток імунізованого населення для досягнення колективного захисту.

Паралельно з моделюванням на рівні популяцій, математика глибоко проникає у вивчення роботи окремих органів, зокрема серця та нервової системи. Серце розглядається як складна самозбуджувальна електрохімічна система, де ритмічні скорочення забезпечуються генерацією потенціалів дії. Використання рівнянь реакції-дифузії дає змогу моделювати поширення електричного збудження через серцеву тканину як через збудливе середовище. Це має критичне значення для розуміння природи аритмій, таких як механізм повторного входу хвилі, що призводить до небезпечних станів. Аналогічно, у

нейробіології математичні моделі описують динаміку мембранного потенціалу нейронів, враховуючи кінетику іонних каналів та порогові ефекти. На рівні нейронних мереж такі моделі пояснюють колективні явища, зокрема синхронізацію ритмів мозку та складні процеси обробки інформації, що є основою сучасної когнітивної науки.

Важливим аспектом біологічного моделювання є опис процесів росту та конкуренції. Логістична модель росту ілюструє, як чисельність популяції клітин або організмів стабілізується при досягненні межі місткості середовища, що широко застосовується в мікробіології та онкології для аналізу розвитку пухлин. Розширення цих моделей на взаємодію кількох видів дозволяє передбачити результати екологічної конкуренції — від стабільного співіснування до повного витіснення одного виду іншим.

У вірусології аналогічні принципи застосовуються для опису внутрішньоорганізмової динаміки: взаємодії між вірусними частинками, здоровими та інфікованими клітинами, що допомагає оцінювати ефективність противірусної терапії та умови переходу інфекції у хронічну форму.

Нарешті, математичні методи складають технічний фундамент медичної візуалізації. Сучасна діагностика за допомогою комп’ютерної томографії, МРТ та ультразвуку базується на розв’язанні складних обернених задач. Радонове перетворення та центральна теорема перерізів дозволяють реконструювати внутрішню структуру тіла на основі виміряних сигналів ослаблення рентгенівських променів або магнітного резонансу. Використання перетворення Фур’є дає змогу швидко обробляти дані у частотній області, забезпечуючи високу якість та деталізацію зображень. Ультразвукова діагностика, у свою чергу, спирається на аналіз хвильових рівнянь та відбитих сигналів, що дозволяє в реальному часі візуалізувати рух крові та роботу внутрішніх органів.

Таким чином, математична біологія виступає незамінним містком між теоретичними абстракціями та практичними потребами медицини, забезпечуючи точність діагностики та ефективність лікування.

## Література

1. Кіндрат В. В., Романовська О. П. Математичне моделювання в медицині : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2018. 152 с
2. Штучний інтелект у медицині : аналітичний огляд та математичні основи / за ред. проф. О. М. Коваленка. Київ : Наукова думка, 2022. 210 с
3. Баєр В. Біофізика: Математичні методи в біології та медицині. Київ : Вища школа, 2001. 432 с

***М. В. Мартинюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик*** *старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА «ЦИФРОВОГО БЕЗСМЕРТЯ»: ЯК ПРАЦЮЮТЬ НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ

У сучасному світі стрімкий розвиток штучного інтелекту відкриває нові перспективи створення систем, здатних відтворювати поведінку людини, її мовлення, стиль мислення та спосіб комунікації. Однією з таких концепцій є «цифрове безсмертя», яке передбачає збереження цифрового образу особистості після завершення її фізичного життя. Основою функціонування подібних систем виступають нейронні мережі, що базуються на математичних методах обробки інформації.

Штучний інтелект використовує інструменти лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей та методів оптимізації. Дані реального світу подаються у вигляді числових структур: текст — у вигляді багатовимірних векторів, а зображення — як матриці значень пікселів. Векторне представлення дає можливість визначати семантичну близькість між словами шляхом аналізу відстаней у багатовимірному просторі.

Нейронна мережа складається з послідовності шарів, які виконують математичні перетворення над вхідними даними. Кожний шар здійснює лінійне перетворення:

$$z = W \cdot x + b$$

де $W$— матриця вагових коефіцієнтів, $x$— вхідний вектор, $b$— вектор зміщення.

Для введення нелінійності застосовуються функції активації, зокрема ReLU, яка пропускає додатні значення та відсікає від'ємні. Під час проходження через кілька шарів мережа поступово формує дедалі складніше та абстрактніше представлення інформації.

Навчання нейронної мережі полягає у мінімізації функції втрат. Для цього використовується метод градієнтного спуску, який змінює вагові коефіцієнти за правилом:

$$W := W - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial W}$$

де $\alpha$— швидкість навчання, а $L$— функція втрат.

Сучасні мовні моделі використовують механізм уваги (Attention), який дозволяє враховувати взаємозв'язки між словами та їхній контекст. Це забезпечує точніше розуміння змісту тексту та покращує якість генерації відповідей.

Таким чином, математичний фундамент сучасного штучного інтелекту ґрунтується на трьох основних складових: векторному представленні інформації, матричних операціях та методах оптимізації. Саме ці математичні інструменти забезпечують функціонування систем, які можуть стати основою технологій «цифрового безсмертя».

**Література**

1. Азаров О. Д., Мартинюк Т. Б., Кожем'яко А. В. Теоретичні та реалізаційні моделі комп'ютерних інтелектуальних систем : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2024. 130 с.
2. Колесницький О. К., Месюра В. І. Нейромережеві моделі та технології обчислювального інтелекту. Нейрокомп'ютери. Частина І : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2021. 66 с.
3. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. Cambridge : MIT Press, 2016. 775p.

***М. А.Котов***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ІНТЕГРАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПІДХОДІВ У ПРОГРАМУВАННІ

**Мета роботи** - проаналізувати роль математичних підходів у сучасному програмуванні та дослідити механізми їх інтеграції під час побудови алгоритмів, математичного моделювання, оптимізації обчислень і розроблення інтелектуальних програмних систем.

Сучасне програмування є міждисциплінарною галуззю, що ґрунтується на фундаментальних математичних принципах. Незважаючи на різноманіття мов програмування та технологічних платформ, основою створення програмного забезпечення виступає математична формалізація задачі. Саме математична модель визначає структуру даних, логіку алгоритму, критерії оптимізації та способи оцінювання правильності отриманих результатів. Таким чином, інтеграція математичних підходів не є допоміжним компонентом програмування, а становить його теоретичний фундамент.

Процес програмування починається з математичного опису предметної області. Реальні процеси подаються у вигляді множин, відношень, функцій, графів, матриць, векторів або ймовірнісних моделей. Формалізація дозволяє перейти від неструктурованої задачі до її математичної моделі, яка надалі реалізується алгоритмічно. Коректність програмного забезпечення безпосередньо залежить від адекватності побудованої математичної моделі.

Одним із ключових напрямів інтеграції є використання дискретної математики. Теорія множин формує основу сучасних структур даних, математична логіка використовується при побудові умовних конструкцій, логічних висловлювань і систем автоматичного доведення, комбінаторика забезпечує генерацію варіантів розв'язання оптимізаційних задач, а теорія графів використовується при моделюванні комп'ютерних мереж, транспортних систем, соціальних мереж, геоінформаційних технологій та навігаційних сервісів. Значна кількість класичних алгоритмів — пошук найкоротшого шляху, мінімального остовного дерева, топологічне сортування, потокові алгоритми — безпосередньо базуються на математичних властивостях графів.

Важливим компонентом сучасного програмування є лінійна алгебра. Матричні операції становлять основу комп'ютерної графіки, цифрової обробки зображень, комп'ютерного зору та технологій штучного інтелекту. Навчання нейронних мереж фактично є виконанням великої кількості операцій над матрицями та векторами, а ефективність обчислень значною мірою визначається оптимізацією цих математичних операцій.

Інтеграція математичного аналізу реалізується через чисельні методи та методи оптимізації. У програмуванні часто відсутня можливість отримати точний аналітичний розв'язок, тому застосовуються алгоритми чисельного інтегрування, інтерполяції, апроксимації, розв'язування систем рівнянь, мінімізації функцій багатьох змінних. Такі методи використовуються при моделюванні фізичних процесів, прогнозуванні, аналізі великих даних та створенні цифрових двійників складних технічних систем.

Особливу роль відіграє теорія ймовірностей і математична статистика. Стохастичні моделі застосовуються при побудові рекомендаційних систем, байєсівських класифікаторів, алгоритмів машинного навчання, аналізі ризиків та моделюванні випадкових процесів. У багатьох сучасних програмних продуктах рішення приймаються не детерміновано, а на основі оцінювання ймовірностей та статистичних закономірностей.

Важливою складовою інтеграції математичних підходів є теорія складності алгоритмів. Аналіз часової та просторової складності дозволяє оцінити ефективність програм незалежно від мови програмування. Використання асимптотичних оцінок забезпечує вибір оптимальних алгоритмів при роботі з великими обсягами даних і високонавантаженими інформаційними системами.

У сучасних інформаційних технологіях математичні підходи дедалі частіше інтегруються з методами штучного інтелекту. Генеративні моделі, великі мовні моделі, алгоритми глибокого навчання, комп'ютерний зір та системи підтримки прийняття рішень використовують складний математичний апарат, що поєднує лінійну алгебру, математичний аналіз, теорію оптимізації, теорію інформації та математичну статистику. Саме математичні моделі визначають точність, стійкість та ефективність функціонування таких систем.

Отже, інтеграція математичних підходів у програмуванні полягає не лише у використанні окремих математичних методів, а у формуванні єдиного математичного середовища побудови алгоритмів, моделей та програмних систем.

Математика забезпечує формалізацію задач, доведення коректності алгоритмів, оптимізацію обчислювальних процесів і створює теоретичне підґрунтя для розвитку сучасних інформаційних технологій, штучного інтелекту та високопродуктивних обчислень.

**Література**

1. Креневич А. Алгоритми і структури даних : підручник. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2021. 200 с.

2. Овсяк В. К., Овсяк О. В., Петрушка Ю. В. Впорядкування та впорядковування у дискретній математиці та інформатиці // *Комп'ютерні науки та інформаційні технології*. 2021. № 3. С. 37–43.

3. Король І. Ю., Тютюнникова Г. С. Алгоритми та методи обчислень : навч. посіб. Ужгород : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. 290 с.

***Д. А. Вненкевич***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик,*** *старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ

У сучасному світі математичне моделювання відіграє важливу роль у дослідженні природних і суспільних процесів. Однією з найпоширеніших моделей є показникова функція, яка широко використовується для опису процесів зростання, спадання та вирівнювання. Вона застосовується у фізиці, біології, економіці, медицині, техніці та демографії.

1.Розмноження бактерій

У біології показникова функція описує ріст колоній мікроорганізмів:

$$N = na^t$$

де N— початкова кількість бактерій, a — коефіцієнт росту, t — час. Саме тому бактеріальні інфекції можуть поширюватися дуже швидко. Ця модель допомагає прогнозувати поширення бактерій, вірусів та інших мікроорганізмів.

2. Радіоактивний розпад

Процес розпаду радіоактивних речовин.

$$M = M_0\left({}^1\!/_2\right)^{t}\!/_{T}$$

де $M_0$ — початкова маса речовини, T — період напіврозпаду. Ця залежність використовується в археології, геології та ядерній фізиці.

3. Складні відсотки та банківські вклади

$$A = A_0(1 + p\ /\ 100)^t$$

Де A-шукана величина $A_0$ - початковий вклад, p - річний відсоток, t - кількість років. Так можна розрахувати майбутню суму банківського вкладу, прибуток від інвестицій чи кредитне навантаження.

4. Демографічні процеси

Ріст населення описується формулою: $N = N_0 e a^t$

де $N_0$ - початкова кількість населення, a,e – постійні величини, N-кількість людей в момент часу t. Такі розрахунки допомагають прогнозувати чисельність населення держав, рівень урбанізації, потребу в ресурсах та розвиток соціальної інфраструктури.

5. Охолодження тіл

Закон охолодження описується рівнянням:.

$$T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$$

де $T_0$ — початкова температура тіла, $T_1$ — температура повітря. Ця закономірність використовується у фізиці, техніці, харчовій промисловості та медицині.

6. Рух парашутиста

Швидкість падіння визначається формулою:

$$V = mg \,/\, k\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

де m — маса парашутиста, g — прискорення вільного падіння, k — коефіцієнт опору повітря. Ця модель використовується в механіці, авіації та при розрахунку систем безпеки.

7. Коливання маятника

Згасаючі коливання описуються: $S = Ae^{-kt}\, sin(\omega t + \varphi o)$

Завдяки цій формулі можна досліджувати коливальні процеси в механіці, акустиці, електротехніці та будівництві.

8. Космічна техніка

Формула Костянтина Ціолковського дозволяє визначити масу палива, необхідну для надання ракеті певної швидкості:

$$M = m\left(e^{v/v^0} - 1\right)$$

де m — маса ракети без палива, V — необхідна швидкість, $V_0$ — швидкість виходу газів із двигуна. Важлива для створення ракет та розвитку космічних технологій.

9. Барометрична формула

Зі збільшенням висоти атмосферний тиск зменшується за показниковим законом: $P = P_0 a^h$ де $P_0$ — атмосферний тиск на рівні моря, P — тиск на певній висоті, h ,a— деяка постійна.Саме тому в горах повітря є більш розрідженим, а людині стає важче дихати. Ця закономірність використовується в метеорології, авіації та географії.

Таким чином, показникова функція є універсальним математичним інструментом, яка дозволяє досліджувати процеси, що відбуваються у природі та суспільстві, будувати прогнози та приймати практичні рішення. Її використовували у своїх дослідженнях такі вчені, як П'єр Кюрі, Марія Кюрі (радіоактивність), Ігор Тамм (теоретична фізика), Луїс Альварес (ядерні дослідження), Ганнес Альфвен (магнітогідродинаміка), Арно Пензіас і Роберт Вудро Вільсон (космічне випромінювання). Ця функція є важливою складовою

сучасної науки та практики, оскільки допомагає пояснювати явища навколишнього світу і розв'язувати реальні задачі.

**Література**

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. 6-те вид. Київ : Ігнатекс-Україна, 2018. 648 с.
2. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика [Електронний ресурс] : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с.
3. Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С. та ін. Вища математика : підручник / за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003. 480 с.

***В. В. Мищишин***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## КОМБІНАТОРИКА ЯК ОСНОВА СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА КІБЕРБЕЗПЕКИ

У сучасному цифровому середовищі математичні методи відіграють ключову роль у розробці та захисті інформаційних систем. Одним із фундаментальних напрямів прикладної математики є комбінаторика - наука, що досліджує способи вибору, впорядкування та поєднання елементів множин відповідно до визначених правил. Її методи широко використовуються в інформаційних технологіях, криптографії, проєктуванні алгоритмів і систем кібербезпеки.

Комбінаторика має глибоке історичне підґрунтя. Перші комбінаторні підходи зустрічаються ще в працях давньоіндійського лікаря Сушрути, який досліджував можливі комбінації лікарських властивостей. У Стародавній Греції комбінаторні ідеї розвивали Хрісіпп, Гіппарх та Архімед, аналізуючи логічні перестановки й геометричні конфігурації. Подальший розвиток науки відбувся в епоху Відродження завдяки дослідженням азартних ігор, які привели до формування основ теорії ймовірностей у працях Блеза Паскаля та П'єра Ферма.

Важливий внесок у становлення комбінаторики як окремої математичної дисципліни зробили Готфрід Лейбніц, Якоб Бернуллі та Леонард Ейлер. Саме вони заклали фундамент сучасного комбінаторного аналізу, пов'язавши його з теорією графів, математичною логікою та методами аналізу складних систем.

Основу комбінаторики становлять три базові типи сполук: перестановки, розміщення та комбінації. Перестановки визначають кількість способів упорядкування елементів множини, розміщення враховують вибір елементів із

урахуванням порядку, а комбінації - без урахування порядку. Ці математичні конструкції лежать в основі багатьох алгоритмів сучасних інформаційних систем.

У сфері кібербезпеки комбінаторика має особливе прикладне значення. Зокрема, вона використовується для оцінювання стійкості паролів до brute-force атак. Кількість можливих варіантів пароля залежить від розміру алфавіту та довжини пароля, а збільшення цих параметрів експоненціально розширює простір можливих комбінацій, підвищуючи рівень захисту облікових записів.

Не менш важливою є роль комбінаторики у криптографії та технології блокчейн. Криптографічні алгоритми ґрунтуються на складних математичних перетвореннях, перестановках та обчисленні простору ключів. Надійність хеш-функцій і систем цифрового підпису забезпечується величезною кількістю можливих комбінацій, що практично унеможливлює підбір або випадковий збіг ключів чи хешів.

Крім того, комбінаторні методи застосовуються під час оптимізації алгоритмів, моделювання мережевих структур та проєктування інформаційних систем. Вони дозволяють мінімізувати витрати обчислювальних ресурсів, підвищувати продуктивність систем та забезпечувати ефективний захист даних.

Таким чином, комбінаторика є не лише важливим розділом сучасної математики, а й одним із базових інструментів розвитку інформаційних технологій та кібербезпеки. Її методи забезпечують математичну основу для створення надійних цифрових систем, оптимізації алгоритмів та захисту інформації в умовах сучасних кіберзагроз.

**Література**

1. Вишенський В. А., Перестюк М. О. Комбінаторика: перші кроки. - Кам’янець-Подільський : Аксіома, 2010. - 324 с.

2. Онацький О. В., Йона Л. Г. Криптографічні системи : навчальний посібник. - Одеса : Одеський національний університет «Одеська юридична академія», 2023.

3. Goldwasser S. Mathematical Foundations of Modern Cryptography: Computational Complexity Perspective [Електронний ресурс].

***А. М. Голиш, А. А. Мацко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **Л. Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

# СТІЙКІСТЬ ФУНКЦІЙ ДО МАЛИХ ВОРУШІНЬ

Стійкість функцій до малих ворушінь (збурень) є наріжним каменем теорії катастроф. Теорія катастроф вивчає, як невеликі зміни параметрів системи можуть призвести до різких, стрибкоподібних змін її стану. Функція називається стійкою (або структурно стійкою), якщо при малому ворушінні (зміні) її вигляд не змінюється якісно, а лише незначно деформується. Це означає, що кількість та тип особливих точок (максимумів, мінімумів, сідловина) залишаються незмінними.

Один з аспектів задач дослідження функцій на максимум та мінімум тісно пов'язаний зі структурною стійкістю функцій. Якщо розглянути функції $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ та $f(x)=x^4$ (рис. 1 – рис. 3, червоні криві), то всі вони мають нульову першу похідну на початку координат, тобто $x=0$ є критичною точкою. Функції $f(x)=x^2$ (рис. 1) та $f(x)=x^4$ (рис. 3) набувають у критичній точці мінімального значення, функція $f(x)=x^3$ (рис. 2) у критичній точці має точку перегину. У традиційних задачах на екстремум ця відмінність найважливіша.

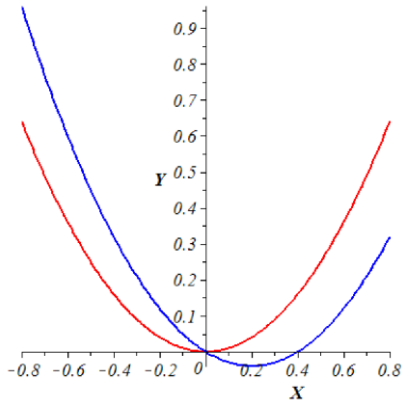



**Рисунок 1** – Збурення функцій в околі критичної точки за наявності малого параметра : червона крива – незбурена функція; синя крива – збурена функція

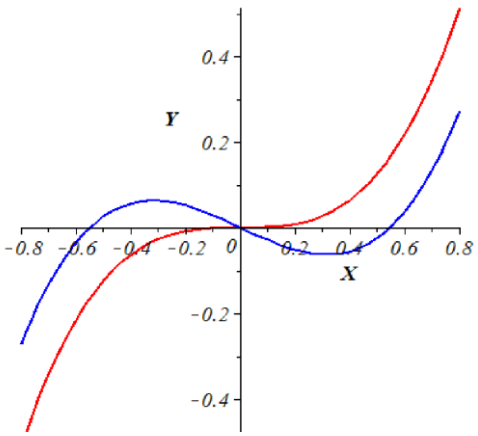



**Рисунок 2** –Збурення функції в околі критичної точки за наявності малого параметра : червона крива – незбурена функція; синя крива – збурена функція ;

Спробуємо злегка збурити ці функції. Для цього додамо до них достатньо малі гладкі функції $p(x)$, які містять малий сталий параметр $\varepsilon > 0$. До перших двох функцій додамо функцію $p(x) = -\varepsilon x$, до третьої – функцію $p(x) = -\varepsilon x^2$. Тоді вирази для збурених функцій набудуть вигляду: $f(x) = x^2 - \varepsilon x$, $f(x) = x^3 - \varepsilon x$ та $f(x) = x^4 - \varepsilon x^2$. Графіки збурених функцій показані синіми кривими на рис. 1 – рис. 3. Унаслідок такого збурення у першому випадку (рис. 1) ніякої принципової зміни не відбувається, залишається одна критична точка, яка зміщена на величину $x_0 = \frac{\varepsilon}{2}$. Значення збуреної функції у цій точці єдиного мінімуму змінюється на величину $y_0 = -\frac{\varepsilon^2}{4}$. У другому та третьому випадках ситуація принципово інша. Друга функція, для якої початок координат був точкою перегину, після збурення набула двох екстремальних значень у точках $x_0 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$, одна з яких відповідає мінімуму, інша – максимуму. Функція $f(x) = x^4$, що мала єдиний мінімум у початку координат, унаслідок малого збурення набула три критичні точки. Початок координат $x_0 = 0$ став точкою максимуму, а в двох нових критичних точках $x_0 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, як завгодно близько розташованих до початку координат, функція набула мінімальних значень.

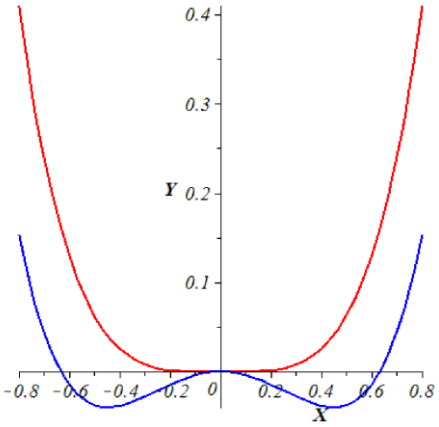



**Рисунок 3** - Збурення функції в околі критичної точки за наявності малого параметра : червона крива – незбурена функція; синя крива - збурена

Зазвичай при побудові динамічної моделі нехтують малими величинами. Як показав наведений приклад, у першому випадку це виправдано, оскільки мале відхилення для квадратичної параболи призводить лише до кількісних, а не до якісних змін. Однак у разі врахування малих відхилень для двох інших функцій відбуваються значні якісні зміни. Функції $f(x) = x^3$ та $f(x) = x^4$, незважаючи на те, що друга з них має екстремум, а перша – ні, об'єднує спільна властивість, яку називають структурною нестійкістю. *Структурна нестійкість* відображає те, що за малої зміни структури функції її поведінка в околі критичної точки різко змінюється. Функцію $f(x)$ називають *структурно стійкою*, якщо для всіх достатньо малих гладких функцій $p(x)$ критичні точки функцій $f(x)$ та $f(x) + p(x)$ є однакового типу. Чим вищий показник степеня $n$, тим гірше веде себе функція $f(x) = x^n$.

**Література**

1. Ніколов М.О. Основи теорії систем. Навчальний посібник з курсу «Загальна теорія систем»: Київ, 2015. - duikt.edu.ua/uploads/l_918_64893570.pdf

***В. А. Твердий, А. І. Шара***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник **Л. Ф. Дзюба**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики і механіки*

## МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ

Метод фазової площини застосовують для дослідження динамічних систем з одним степенем вільності. Ідею методу розглянемо на прикладі лінійної динамічної системи.

Фазовою називають площину змінних: переміщення системи $x$ та швидкість зміни стану системи $\dot{x}$. На фазовій площині миттєвому стану динамічної системи, що характеризується величинами $x$ та $\dot{x}$, відповідає одна точка, яку називають *фазовою* точкою.

Траєкторія руху фазової точки (графік залежності швидкості від переміщення) називають *фазовою траєкторією.* Вона характеризує процес руху динамічної системи. Сімейство фазових траєкторій (фазова діаграма) дозволяє побачити відразу всю сукупність рухів динамічної системи, що залежать та не залежать від початкових умов.

Для побудови фазових траєкторій потрібно знайти загальний розв'язок диференціального рівняння стану динамічної системи $x = x(t)$ та визначити $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Сукупність залежностей $x = x(t)$ і $\dot{x} = \dot{x}(t)$ визначає рівняння фазової траєкторії в параметричній формі, де параметром є час $t$. Або рівняння фазової траєкторії можна отримати безпосередньо через інтегральні криві для залежності $\dot{x} = f(x)$. Тоді диференціальне рівняння руху другого порядку для автономної динамічної системи з одним ступенем вільності заміняють двома диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x,\dot{x}) \quad ; \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = Q(x,\dot{x}) \quad . \tag{1}$$

Виключивши з рівнянь (1) час, отримаємо одне диференціальне рівняння інтегральних кривих – фазових траєкторій

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{Q(x,\dot{x})}{P(x,\dot{x})} \quad . \tag{2}$$

Якщо функції $P, Q$ диференційовані та водночас не перетворюються в нуль у точці ($x, \dot{x}$), цю точку називають *регулярною* та через неї проходить єдина фазова траєкторія.

Точку ($x_0, \dot{x}_0$) називають *особливою* точкою фазової траєкторії, якщо у ній $P, Q$ водночас дорівнюють нулю, тобто $P(x_0, \dot{x}_0) = 0$ та $Q(x_0, \dot{x}_0) = 0$. Через особливу точку не проходить жодної або проходить більше ніж одна фазові траєкторії.

Оскільки в особливих точках відповідно до (1) та (2) швидкість та прискорення дорівнюють нулю, то особливі точки фізично є точками спокою – положеннями стійкої або нестійкої рівноваги динамічної системи. За характером фазових траєкторій в околі особливої точки можна визначити вид руху динамічної системи та тип положення рівноваги.

Розглянемо прості особливі точки на прикладі лінійної автономної динамічної системи. Таку динамічну систему, показники якої періодично змінюються у часі, називають осцилятором. З латинської oscillo – гойдаюсь, тобто осцилятором є коливна динамічна система.

Загалом рух осцилятора описують диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{x} \pm 2\dot{n}x \pm k^2 x = 0. \quad (3)$$

Це рівняння еквівалентне двом диференціальним рівнянням першого порядку, які є рівняннями руху фазової точки:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -(\pm 2\dot{n}x \pm k^2 x). \quad (4)$$

Виключивши з (4) час $t$, отримаємо диференціальне рівняння фазових траєкторій (інтегральних кривих):

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\pm 2\dot{n}x \pm k^2 x}{\dot{x}}. \quad (5)$$

Рівняння руху (3), (4) та рівняння фазових траєкторій (5) легко інтегруються. Тому побудувати фазові траєкторії не складно.

## Література

1. Ніколов М.О. Основи теорії систем. Навчальний посібник з курсу «Загальна теорія систем»: Київ, 2015. - duikt.edu.ua/uploads/l_918_64893570.pdf

***М. О. Ігнатович***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О.Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ЗАПИТІВ У СИСТЕМАХ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Стрімкий розвиток систем штучного інтелекту зумовив необхідність дослідження математичних механізмів, які лежать в основі обробки природної мови (NLP). Сучасні мовні моделі базуються на складних математичних алгоритмах, що забезпечують перетворення текстових даних у числові представлення та подальшу генерацію відповідей. Тому математичне моделювання процесів інтерпретації запитів є важливим напрямом досліджень у галузі прикладної математики, системного аналізу та інформаційних технологій.

**Мета роботи:** дослідити та формалізувати математичні механізми обробки та інтерпретації природно-мовних запитів у сучасних системах штучного інтелекту, зокрема проаналізувати математичні апарати токенізації, векторного вкладення, механізму уваги (Attention) та ймовірнісної генерації тексту.

Основою роботи великих мовних моделей є перетворення вихідного тексту на послідовність токенів — мінімальних одиниць обробки інформації, якими можуть бути слова, підслова або окремі символи.

Нехай множина токенів позначається як:

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

Кожний токен відображається у $d$-вимірному просторі ознак за допомогою функції вкладення:

$$f: T \to \mathbb{R}^d$$

де $d$ — розмірність векторного простору. У результаті кожний токен отримує числовий вектор, який кодує його семантичні та синтаксичні властивості.

Для визначення контекстних зв’язків між елементами тексту використовується механізм уваги (Attention), який є основою архітектури *Transformer*. Для кожного токена на основі його вектора формуються три вектори: **запит** ($Q$), **ключ** ($K$) та **значення** ($V$).

Матриця уваги обчислюється за формулою:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V$$

• $d_k$ — розмірність векторів ключів $K$;

• $QK^T$ — скалярний добуток, що визначає ступінь релевантності між токенами;

• $\sqrt{d_k}$ — масштабуючий множник для запобігання занадто малих градієнтів функції softmax.

Цей вираз дозволяє моделі оцінити важливість кожного слова відносно інших слів у контексті, враховуючи як локальні, так і віддалені залежності в тексті.
Після проходження через послідовність шарів нейронної мережі формується вектор ймовірностей можливих наступних токенів зі словника $V$. Модель визначає умовну ймовірність появи наступного токена $t_i$:

$$P(t_i \mid t_1, t_2, \dots, t_{i-1})$$

Важливим параметром керування процесом генерації є **температура** ($T$), яка коригує розподіл ймовірностей (logit-значень $z_j$) перед застосуванням функції softmax:

$$P(t_j) = \frac{\exp(z_j/T)}{\sum_k \exp(z_k/T)}$$

При **низьких значеннях** $T \to 0$ модель обирає найбільш імовірні варіанти, що забезпечує детермінованість і стабільність відповіді.
Зі **зростанням** $T > 1$ розподіл стає більш рівномірним, що збільшує варіативність і «творчість» генерації, але підвищує ризик виникнення некоректних відповідей.

Математичне моделювання пояснює виникнення так званих «галюцинацій» штучного інтелекту. Оскільки функція втрат мовної моделі оптимізується для прогнозування **найбільш ймовірного продовження тексту** ($\max P$), а не для перевірки фактологічної достовірності, модель може генерувати хибні твердження з високою ймовірнісною впевненістю.

Для мінімізації цього ефекту застосовуються додаткові механізми: навчання з підкріпленням на основі зворотного зв'язку від людини (RLHF), фактологічна верифікація та архітектури з зовнішньою пошуковою адресацією (RAG).

Таким чином, інтерпретація запитів у системах штучного інтелекту є складним математичним процесом, що ґрунтується на методах лінійної алгебри, теорії ймовірностей, математичної статистики та чисельної оптимізації. Подальший розвиток і формалізація цих математичних моделей сприятимуть підвищенню точності, передбачуваності та надійності функціонування інтелектуальних інформаційних систем.

## Література

1. Глибовець М. М., Олецький О. В. Штучний інтелект : підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Вид. дім «КМ Академія», 2002. 366 с.
2. Бодянський Є. В., Руденко О. Г. Штучні нейронні мережі: архітектури, навчання, застосування : монографія. Харків : ТЕЛЕТЕХ, 2004. 369 с.
3. Шаховська Н. Б., Литвин В. В. Системи штучного інтелекту : навчальний посібник. Львів : Новий Світ-2000, 2018. 482 с.
4. Жежнич П. І., Тарасов Д. В. Математичні методи обробки текстової інформації в системах інтелектуального аналізу даних. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Інформаційні системи та мережі. 2020. № 924. С. 45–53.

***А. І. Кудик***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник:* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

# ЯК ВИПАДКОВІСТЬ І ЙМОВІРНІСТЬ ВПЛИВАЮТЬ НА ПОВСЯКДЕННЕ ЖИТТЯ

У роботі розглянуто роль випадковості та теорії ймовірностей у повсякденному житті людини. Проаналізовано використання ймовірнісного підходу під час прийняття рішень, прогнозування подій, оцінювання ризиків, а також у сучасних інформаційних технологіях, медицині, економіці та системах штучного інтелекту. Показано, що математичний апарат теорії ймовірностей є важливим інструментом аналізу процесів, які відбуваються в умовах невизначеності.

У сучасному світі людина постійно приймає рішення в умовах неповної інформації. Більшість процесів, що відбуваються в природі, економіці, медицині, техніці та суспільстві, мають випадковий характер, тому їх дослідження неможливе без використання методів теорії ймовірностей і математичної статистики. Саме ці розділи математики дозволяють кількісно оцінювати невизначеність, прогнозувати можливі результати та приймати обґрунтовані рішення.

Випадковість визначається як характеристика процесів, результат яких неможливо точно передбачити заздалегідь через наявність неконтрольованих факторів. *Ймовірність* $(P)$ виступає як кількісна міра очікування настання події $A$, де $0 \leq P(A) \leq 1$.

Одним із найпоширеніших прикладів використання ймовірності є прогнозування погоди. Якщо синоптики повідомляють про 70 % ймовірності опадів, це означає, що за аналогічних метеорологічних умов приблизно у семи випадках із десяти спостерігався дощ. Така інформація допомагає людині оцінити можливі наслідки та прийняти практичне рішення щодо планування своєї діяльності.

Іншим прикладом є оцінювання ризиків у повсякденному житті. Людина постійно аналізує ймовірність запізнення на транспорт, вибирає оптимальний маршрут, оцінює безпечність певних дій або прогнозує можливі результати своїх рішень. Хоча такі оцінки часто здійснюються інтуїтивно, вони фактично базуються на накопиченому статистичному досвіді.

Випадковість суттєво впливає й на соціальні процеси. Випадкові зустрічі, зміни планів, затримки транспорту чи інші непередбачувані події можуть призвести до нових знайомств, професійних можливостей або змінити подальший життєвий шлях людини. Саме тому випадковість не слід розглядати лише як прояв хаосу — вона є невід'ємною складовою складних соціальних систем.

Особливого значення теорія ймовірностей набуває у медицині. Ймовірнісні методи використовують для оцінювання ефективності лікування, визначення

факторів ризику розвитку захворювань, аналізу результатів клінічних досліджень та прогнозування перебігу хвороби. На основі статистичних моделей лікарі можуть обирати найбільш ефективні методи лікування для конкретного пацієнта.

У економіці та фінансах математичні моделі дозволяють оцінювати ризики інвестицій, прогнозувати зміни валютних курсів, аналізувати страхові випадки та визначати фінансову стійкість підприємств. Без використання теорії ймовірностей неможливе функціонування сучасних банківських і страхових систем.

Стрімкий розвиток штучного інтелекту також безпосередньо пов'язаний із теорією ймовірностей. Алгоритми машинного навчання використовують статистичні моделі для аналізу великих масивів даних, класифікації об'єктів, розпізнавання мовлення, прогнозування поведінки користувачів та автоматичного перекладу текстів. Великі мовні моделі визначають наступне слово в реченні саме на основі ймовірнісного розподілу можливих варіантів.

Подібні алгоритми застосовують і соціальні мережі. Рекомендаційні системи YouTube, Instagram, TikTok та інших цифрових платформ аналізують попередні дії користувача та за допомогою математичних моделей прогнозують контент, який з найбільшою ймовірністю викличе зацікавлення.

Теорія ймовірностей є основою і гральної індустрії. Результати лотерей, азартних ігор та інших випадкових процесів підкоряються законам математичної статистики. Аналіз математичного сподівання показує, що в більшості випадків середній виграш одного гравця є меншим за вартість участі, що забезпечує прибутковість організаторів гри. Розуміння цих закономірностей сприяє формуванню фінансової грамотності та критичного мислення.

Отже, випадковість і ймовірність є не лише фундаментальними математичними поняттями, а й універсальними інструментами аналізу процесів навколишнього світу. Вони допомагають прогнозувати події, оцінювати ризики, приймати обґрунтовані рішення та створювати сучасні інформаційні технології. Саме тому вивчення теорії ймовірностей сприяє розвитку математичної культури, логічного мислення та формуванню компетентностей, необхідних людині в умовах цифрового суспільства.

## Література

1. Барковський В.В, Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. – 3-тє вид. переробл. і доп. – К.: ЦУЛ, 2002.
2. Гончаров О. А., Князь І. О., Хоменко О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2022. 174 с.
3. Кремень В. Г., Биков В. Ю. Штучний інтелект: перспективи розвитку в Україні // Інформаційні технології і засоби навчання. 2023. Т. 95, № 3.

***О. Я. Лошній***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЧАСОВІ ЕВОЛЮЦІЙНІ ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ

Час є однією з фундаментальних фізичних величин, через яку описується розвиток будь-якої матеріальної системи. Будь-який фізичний процес можна розглядати як послідовність змін стану системи у часі під дією внутрішніх або зовнішніх чинників. Саме тому поняття часової еволюції є спільним для класичної механіки, термодинаміки, квантової фізики, космології та фізики складних систем.

Однією з найважливіших характеристик еволюційних процесів є їх необоротність. Якщо закони класичної механіки допускають симетрію щодо часу, то реальні природні процеси мають певний напрям розвитку. Причиною цього є другий закон термодинаміки, відповідно до якого в ізольованих системах ентропія не зменшується. Саме зростання ентропії визначає так звану *стрілу часу*, що характеризує напрям переходу систем від менш імовірних до більш імовірних станів.

Разом із тим більшість реальних фізичних систем є відкритими. Вони безперервно обмінюються енергією та речовиною із зовнішнім середовищем. Такі системи можуть не лише втрачати впорядкованість, а й формувати нові просторові або часові структури. Ці явища отримали назву самоорганізації, а сформовані структури - дисипативних структур, концепцію яких розвинув лауреат Нобелівської премії Ілля Пригожин.

Іншим важливим поняттям сучасної фізики є нелінійність. На відміну від лінійних моделей, у нелінійних системах навіть незначні зміни початкових умов можуть істотно впливати на подальшу еволюцію системи. Саме тому дослідження складних фізичних процесів сьогодні ґрунтується на методах нелінійної динаміки, теорії хаосу та комп'ютерного моделювання. Подібні підходи широко застосовуються при прогнозуванні атмосферних процесів, розвитку плазми, поширення хвиль, фазових переходів і функціонування складних технічних систем.

Важливу роль у дослідженні часової еволюції відіграють математичні моделі. Використання систем диференціальних рівнянь, методів математичної фізики, чисельного аналізу та комп'ютерних симуляцій дозволяє відтворювати поведінку фізичних систем із високою точністю. Результати такого моделювання використовуються у матеріалознавстві, енергетиці, космічних дослідженнях, кліматології та інших галузях науки і техніки.

Сучасне розуміння часових еволюційних фізичних процесів виходить далеко за межі класичної механіки. Воно об'єднує термодинаміку нерівноважних систем, статистичну фізику, синергетику та методи математичного моделювання, що дозволяє пояснювати закономірності розвитку складних природних явищ.

Таким чином, часова еволюція фізичних процесів є універсальною характеристикою розвитку матеріальних систем. Основними поняттями, що визначають сучасне розуміння еволюційних процесів, є необоротність, ентропія, нерівноважність, самоорганізація та нелінійна динаміка. Поєднання фундаментальних фізичних законів із сучасними методами математичного моделювання відкриває широкі можливості для дослідження складних природних і технічних систем. Саме тому розвиток теорії часових еволюційних процесів залишається одним із пріоритетних напрямів сучасної фізики.

**Література**

1. Андрєєв В. О., Пінкевич І. П. Термодинаміка і статистична фізика. Ч. 1 : навчальний посібник. Київ : Київський національний університет ім.Тараса Шевченка, 2023. 82 с.

2. Пелих В. М., Ровенчак А. А. Нерівноважні процеси в статистичних системах. Журнал фізичних досліджень. 2021. Т. 25, № 3. С. 3001–3012.

3. Булавін Л. А., Гаврюшенко Д. А., Сисоєв В. М. Нелокальне рівняння стану: критичні явища та колективні збудження // *Український фізичний журнал*. 2021.

***О. С. Лукавський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЙМОВІРНІСТЬ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ

Актуальність теми ймовірності у повсякденному житті зумовлена зростаючою роллю невизначеності в сучасному світі. Умови швидкого розвитку технологій, економічних змін та інформаційного перевантаження вимагають від людини здатності приймати обґрунтовані рішення на основі аналізу можливих ризиків і наслідків. Саме теорія ймовірностей надає ефективні інструменти для оцінювання таких ситуацій.

Особливої актуальності ця тема набуває у зв’язку з розвитком таких сфер, як медицина, фінанси, штучний інтелект та аналіз великих даних, де ймовірнісні методи є основою для прогнозування, діагностики та прийняття рішень. Крім того, в умовах глобальних викликів (пандемії, економічні кризи, кліматичні зміни) правильне розуміння ймовірності допомагає адекватно оцінювати ризики та реагувати на них.

Ймовірність є невід’ємною частиною сучасного світу та одним із ключових інструментів пізнання випадкових процесів. У повсякденному житті людина постійно стикається з невизначеністю, тому змушена оцінювати ризики та приймати рішення в умовах неповної інформації. Навіть прості дії — планування

подорожі, вибір маршруту чи прогноз погоди — базуються на інтуїтивному розумінні ймовірності.

У науковому сенсі ймовірність — це числова міра можливості настання події, яка змінюється в межах від 0 до 1. Вона дозволяє формалізувати невизначеність та зробити її об'єктом математичного аналізу. Важливим є те, що ймовірність не дає точного прогнозу окремої події, а характеризує загальну тенденцію або частоту її настання при багаторазовому повторенні експерименту.

Історично теорія ймовірностей виникла у XVII столітті внаслідок дослідження азартних ігор. Праці таких учених, як Блез Паскаль і П'єр Ферма, заклали фундамент цієї науки. Згодом вона отримала розвиток у працях Якоба Бернуллі, П'єра-Симона Лапласа та інших математиків.

Одним із базових прикладів є експерименти з рівноймовірними наслідками: підкидання монети або кидання грального кубика. Вони демонструють фундаментальний принцип випадковості: хоча всі результати мають однакову ймовірність, передбачити конкретний результат неможливо. Це підкреслює різницю між детермінованими та випадковими процесами.

Важливим аспектом є те, що людська інтуїція часто помиляється у сприйнятті ймовірності. Яскравим прикладом є парадокс Монті Голла, який показує, що зміна початкового вибору може суттєво підвищити шанси на успіх. Подібні приклади доводять необхідність використання математичних методів замість інтуїтивних оцінок.

Суттєву роль у сучасній науці відіграє формула Байєса, яка дозволяє оновлювати ймовірність подій із урахуванням нової інформації. Байєсівський підхід широко застосовується в медицині для інтерпретації результатів діагностичних тестів, у машинному навчанні, а також у фінансовому аналізі.

У сучасному світі теорія ймовірностей має міждисциплінарний характер. У фінансах вона використовується для оцінювання ризиків та прогнозування ринкових змін. У медицині — для аналізу ефективності лікування та точності діагностики. В інформаційних технологіях — для створення алгоритмів штучного інтелекту, систем рекомендацій і обробки даних.

Окремої уваги заслуговує роль ймовірності у прийнятті рішень. Використання ймовірнісних моделей дозволяє мінімізувати ризики та підвищити ефективність діяльності як окремих людей, так і організацій. Це особливо актуально в умовах швидких змін і великого обсягу інформації.

Таким чином, теорія ймовірностей є важливим інструментом сучасної науки та практики. Вона не лише допомагає пояснювати випадкові явища, сприяє розвитку критичного мислення, що є необхідним для прийняття обґрунтованих рішень у повсякденному житті.

## Література

1. Істер О. С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. Київ : "Факт", 1997. 83 с.

2. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посіб. : У 2-х ч. Київ : КНЕУ, 2001.

3. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей : підручник. Київ : Видавничо поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 464 с.
4. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с.

***О. В. Рогатинюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЧИ ІСНУЄ ВИПАДКОВІСТЬ? МАТЕМАТИЧНИЙ ПОГЛЯД НА ПОВСЯКДЕННІ ПОДІЇ

**Анотація**. У роботі проаналізовано роль теорії ймовірностей і математичної статистики у вивченні випадкових процесів, встановленні закономірностей та прогнозуванні явищ різної природи. Показано практичне значення ймовірнісних методів у сучасній науці, економіці, медицині, транспорті та інформаційних технологіях.

Поняття випадковості є одним із фундаментальних понять сучасної науки. Воно привертало увагу філософів, математиків і природознавців протягом багатьох століть, оскільки саме через дослідження випадкових явищ людина прагнула зрозуміти закономірності навколишнього світу. У повсякденному житті ми постійно стикаємося з подіями, результат яких неможливо передбачити абсолютно точно. До таких подій належать зміни погоди, результати спортивних змагань, дорожня ситуація, фінансові коливання, випадкові зустрічі або навіть результати медичних досліджень. На перший погляд такі явища здаються хаотичними, однак математичний аналіз показує, що більшість із них підпорядковується певним статистичним закономірностям.

У математиці поняття випадковості досліджується засобами теорії ймовірностей – розділу математики, який вивчає закономірності масових випадкових явищ.

Для кількох експериментів ми не отримаємо точного результату, тому велике практичне значення має саме закон великих чисел. На ньому базуються страхова справа, соціологічні опитування, демографічні дослідження, статистичний контроль якості продукції та багато інших напрямів сучасної науки і техніки. Наприклад, страхові компанії не можуть передбачити, з ким саме трапиться страховий випадок, однак на основі статистичних даних вони достатньо точно оцінюють кількість можливих страхових випадків серед великої кількості клієнтів. Аналогічний підхід використовується під час прогнозування народжуваності, смертності, рівня безробіття чи економічних ризиків.

Сучасне суспільство дедалі більше спирається на математичне моделювання випадкових процесів. У метеорології прогнози погоди будуються за допомогою

складних математичних моделей, які враховують температуру, атмосферний тиск, вологість, швидкість вітру та інші фізичні параметри. Хоча точний стан атмосфери через декілька тижнів передбачити практично неможливо, короткострокові прогнози мають досить високу точність саме завдяки використанню статистичних методів і сучасних обчислювальних технологій.

Не менш важливе значення теорія ймовірностей має в транспортній галузі. Інтенсивність руху автомобілів, виникнення заторів, робота світлофорів, функціонування громадського транспорту та систем масового обслуговування досліджуються за допомогою математичних моделей випадкових процесів. Це дозволяє оптимізувати транспортні потоки, скорочувати час очікування пасажирів, підвищувати ефективність логістичних систем та покращувати безпеку дорожнього руху.

Широке застосування ймовірнісних методів спостерігається також у медицині. Статистичний аналіз використовується для оцінювання ефективності лікарських препаратів, прогнозування перебігу захворювань, визначення факторів ризику та аналізу результатів клінічних досліджень. Саме математична статистика дозволяє відокремити випадкові коливання від об'єктивних закономірностей і зробити науково обґрунтовані висновки щодо ефективності лікування.

Особливої актуальності теорія ймовірностей набула в інформаційних технологіях. Методи машинного навчання, штучного інтелекту, розпізнавання образів, аналізу великих масивів даних і рекомендаційних систем значною мірою ґрунтуються на статистичних моделях та ймовірнісних алгоритмах. Більшість сучасних систем штучного інтелекту не працює за жорстко визначеними правилами, а навчається на основі великих обсягів даних, використовуючи статистичні закономірності та оцінки ймовірностей.

Важливим є також питання природи випадковості. У класичній механіці багато процесів здаються випадковими лише через недостатність інформації про початкові умови. За наявності повної інформації їх можна описати детермінованими законами. Натомість у квантовій фізиці випадковість має фундаментальний характер, оскільки результати вимірювань окремих мікрочастинок описуються саме ймовірнісними законами. Це свідчить про те, що випадковість може бути не лише наслідком людського незнання, а й об'єктивною властивістю природи.

Отже, випадковість є невід'ємною складовою навколишнього світу, однак вона не означає повної відсутності порядку. Математичні методи дають змогу описувати випадкові процеси, кількісно оцінювати ризики, приймати обґрунтовані рішення та прогнозувати розвиток багатьох явищ. Саме тому теорія ймовірностей залишається одним із найважливіших інструментів сучасної науки та практики.

## Література

1. Покровський Є. О., Покровський С. Є., Савчук О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 285 с.

2. Павлов О. А., Гавриленко О. В., Рибачук Л. В. Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика. Курс лекцій. Ч. 1 : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 154 с.

3. Швець В. Т. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси : навч. посіб. Одеса : Одеський національний технологічний університет, 2021. 234 с.

4. Кантемир І. В., Мураховська О. А., Українець Н. А. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. Харків : Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», 2021. 228 с.

***Б. Лук'янчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ВІЛЬНОГО ТА СТАБІЛІЗОВАНОГО ПАДІННЯ ПАРАШУТИСТА

Вивчення динаміки падіння тіла у щільних шарах атмосфери є класичною, проте актуальною задачею аеродинаміки. Розуміння переходу від вільного падіння до стабілізованого руху має критичне значення для безпеки десантування, розрахунку траєкторій та проектування систем автоматичного розкриття парашутів.

Метою роботи є аналіз зміни швидкості парашутиста на різних етапах падіння: від моменту стрибка до стабілізації швидкості після розкриття парашута.

**Математична модель.** Уявімо парашутиста, який вистрибнув з літака.

На нього діють дві сили: вниз тягне сила тяжіння→ $mg$, а вгору "гальмує"опір повітря→ $kv$. Тобто, спочатку він падає швидко, але повітря починає все сильніше гальмувати. Рух парашутиста описується другим законом Ньютона. Основне диференціальне рівняння руху має вигляд:

$m \cdot \frac{dt}{dv} = mg - kv$, де $m$ — маса, $v$ — швидкість, $k$ — коефіцієнт опору повітря.

Проаналізуємо фази падіння:

Початковий етап: у момент стрибка ($v$=0) опір повітря відсутній, тому прискорення максимально наближене до прискорення вільного падіння ($g$).

Фаза прискорення: зі зростанням швидкості пропорційно зростає і сила опору ($kv$), що призводить до поступового зменшення прискорення.

Гранична швидкість: коли сила тяжіння зрівнюється з силою опору ($mg$=$kv$), прискорення стає рівним нулю ($dv/dt$=0). Швидкість стабілізується на максимальному значенні: $v_{\text{гр.}}=\frac{mg}{k}$ – це максимальна швидкість, яку досягне парашутист.

Розглянемо приклад: нехай вага парашутиста 80 кг.

Розглянемо два сценарії:

• Вільне падіння (парашут не розкритий): за умови $k$=16, гранична швидкість становить 49 м/с (приблизно 176 км/год).

• Стабілізований спуск (парашут розкритий): розкриття парашута різко збільшує площу поверхні та, відповідно, коефіцієнт опору (наприклад, до $k$=120). Це призводить до падіння граничної швидкості до безпечних 6.5 м/с (23,4 км/год).

Динаміка зміни швидкості описується функцією: $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$ Для аналізу тривалості процесу вводиться «характерний час» $\tau = m/k$. Встановлено, що парашутист досягає 95% своєї максимальної швидкості за час $3\tau$, а майже повна стабілізація (99%) відбувається за $4-5\tau$ (що для нерозкритого парашута становить приблизно 20−25 секунд).

**Висновки.** Отже, ми бачимо, що швидкість парашутиста не зростає безмежно, оскільки зі збільшенням швидкості сила опору повітря зростає, доки не врівноважує силу тяжіння. Це призводить до встановлення граничної швидкості, за якої прискорення стає нульовим, а рух — рівномірним.

## Література

1. Кіндрачук М. В., Бондаренко О. В. Математичне моделювання складних систем : навч. посібник. Київ : НАУ, 2012. 244 с.

2. Ben-Ari M. The Physics of Skydiving. *Physics Education*. 2014. Vol. 49, No. 5. P. 555–561.

3. Mohazzabi P. High-altitude free fall. *American Journal of Physics*. 2011. Vol. 79. P. 1115–1121.

***А. Харчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

## СТОХАСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОФЕСІЙНИХ РИЗИКІВ: ВІД СТАТИСТИКИ ДО ПРОГНОЗУ

Проблема забезпечення безпеки життєдіяльності на виробництві потребує збалансованого підходу, особливо в умовах економічних обмежень. Окрім обов'язкової атестації робочих місць та інформування працівників, важливу роль відіграє математичний аналіз ризиків. Статистичне моделювання, зокрема апарат ланцюгів Маркова, дає змогу дослідити випадкові процеси виникнення захворювань. Наведемо приклад того, як цей метод допомагає оцінити ймовірність тимчасової втрати працездатності на основі аналізу статистичних даних.

Нехай імовірність захворіти на деякому підприємстві дорівнює $\alpha$. Ця величина є обернено пропорційною до середнього значення тривалості періодів між захворюваннями. Позначимо через $\beta$ імовірність виздоровлення. Величина $\beta$ є обернено пропорційною до середньої тривалості захворювання. Припустимо, що обидві імовірності належать проміжку часу $\Delta t$, рівному одній добі. Якщо сьогодні працівник здоровий з імовірністю $p_0$ або хворий з імовірністю $p_1 = 1 - p_0$, то завтра він буде здоровий з імовірністю $(1-\alpha)p_0 + \beta p_1$ або захворіє з імовірністю $\alpha p_0 + (1-\beta)p_1$. Легко розрахувати імовірності бути здоровим чи хворим і на наступні дні. Така послідовність імовірностей зображає найпростіший варіант ланцюга Маркова.

Розглянемо стан окремого працівника. Його стану «здоровий» поставимо у відповідність «0», а стану «хворий» поставимо у відповідність «1».

Припустимо, що в рівновіддалені моменти часу $t_1, t_2, ..., t_{i-1}$ система знаходиться в стані «1». Розглянемо подію А – система переходить із стану «1» в стан «0», $\overline{A}$ - система залишається в стані «1» і випадкову величину $X = i \cdot \Delta t$ - час першого переходу із стану «1» в стан «0». Імовірність такої події А:

$$P(A) = 1 - \beta$$

$$P(\overline{A}) = (1-\beta)^{i-1}.$$

Закон розподілу випадкової величини Х має вигляд:

$$f(X) = \alpha \cdot \beta \cdot (1-\beta)^{i-1}, i = 1,2,\ldots \quad [1]$$

Щоб розглянути процес переходу із одного стану в інший складемо матрицю переходів:

$$П = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Вектор імовірностей перейти з одного стану в інший : $P(t_i) = \begin{pmatrix} p_0, & t = i \\ p_1, & t = i+1 \end{pmatrix}$

визначається матричним рівнянням: $P(t_i) = \quad \cdot \quad (\ _{i-1})$.

З теорії ланцюгів Маркова мають місце такі співвідношення:

$P(i\Delta P) = \quad ^{i} \cdot \quad (\ _{0})$

$$П^{i} = \begin{pmatrix} p_0(\infty) & p_1(\infty) \\ p_0(\infty) & p_1(\infty) \end{pmatrix} + (1-\alpha-\beta)^{i} \begin{pmatrix} p_1(\infty) & -1 \\ -1 & p_0(\infty) \end{pmatrix}$$, де

$$p_0(\infty) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad p_1(\infty) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

величини $p_0(\infty)$ і $p_1(\infty)$ визначають розподіл імовірностей виявити здорового чи хворого працівника через тривалий проміжок часу після початку відліку. В теорії ланцюгів Маркова розподіл $p(\infty)$ називається фінальним. Він задовольняє рівняння:

$$p(\infty) = \pi \cdot p(\infty);$$

Це означає , що наблизившись до фінального розподілу, імовірності не змінюються від ланки до ланки ланцюга, тобто скільки людей захворіє за одиницю часу, стільки ж і стане здоровими.

## Література

1. Наконечний О. Г., Терещенко С. О. *Математичне моделювання систем*. — К.: КНЕУ, 2012. (Особливості застосування моделей у соціально-економічних системах).

2. Гігієна та екологія: підручник / за ред. В. Г. Бардова. — Вінниця: Нова Книга, 2018. (Методи аналізу захворюваності з тимчасовою втратою працездатності).

3. 3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей. — К: КНЕУ, 1999. — Ч. 1.

***П. Кусій***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ТОПОЛОГІЯ ТА ГЕОМЕТРІЯ ЗАНУРЕНЬ: МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФЕНОМЕНУ ВИВОРОТУ СФЕРИ

Питання про можливість неперервного виворіту сфери навиворіт є одним із найбільш глибоких, парадоксальних та інтуїтивно несподіваних результатів сучасної диференціальної топології та теорії сингулярностей. Побутова фізична інтуїція підказує, що будь-яке намагання вивернути замкнену двовимірну поверхню в тривимірному просторі без розривів обов'язково призведе до неминучого утворення гострих складок, защемлень або зламів матеріалу. Проте строгий математичний аналіз спростовує очевидне, демонструючи фундаментальну розбіжність між наївними механічними уявленнями про форму і суворими геометричними визначеннями неперервних відображень.

Актуальність дослідження цього топологічного феномену полягає в необхідності детального вивчення математичного апарату регулярних гомотопій, аналізу еволюції геометрії занурень та систематизації конструктивних алгоритмів візуалізації складних багатовимірних перетворень, які виходять за межі тривіального сприйняття простору, але формують підґрунтя для сучасних методів комп'ютерної геометрії та топологічного моделювання.

У строгих геометричних термінах процес виворіту сфери (англ. *sphere eversion*) формалізується як пошук неперервної деформації стандартної двовимірної гладкої сфери $S^2$ у тривимірному евклідовому просторі $R^3$, яка переводить зовнішній бік поверхні у внутрішній, а внутрішній - у зовнішній. При цьому висувається ключова і найбільш жорстка математична умова: деформація повинна бути регулярною гомотопією. Два гладких занурення (іммерсії) $f, g: S^2 \to R^3$ називаються регулярно гомотопними, якщо існує така диференційовна сім'я занурень $F: S^2 \times [0,1] \to R^3$, що для будь-якого фіксованого параметра часу $t \in [0,1]$ відображення $F(\cdot, t)$ залишається гладким зануренням. Це означає, що на кожному проміжному етапі диференціал відображення має максимальний ранг, тобто дотична площина у кожній точці поверхні змінюється неперервно, і на ній повністю відсутні защемлення, кутові точки чи ребра зламів, хоча самоперетини самої поверхні в $R^3$ повністю допускаються.

Вперше абстрактне існування такої регулярної гомотопії довів американський математик Стівен Смейл у 1957 році як частковий випадок розробленої ним загальної класифікації занурень багатовидів. Цей результат виявився настільки шокуючим, що провідні геометри того часу, включно з науковим керівником Смейла Раулем Боттом, спочатку вважали його помилковим. Доведення Смейла базувалося на методах алгебраїчної топології, було суто неконструктивним і не давало жодного уявлення про конкретну

геометричну траєкторію процесу. Це породило нову фундаментальну задачу: побудувати явний алгоритм або топологічну послідовність стадій виворіту.

Перший конструктивний опис запропонував Арнольд Шапіро у 1959 році за допомогою інверсій, проте не опублікував його. Згодом, у 1960-х роках, Бернар Морен - видатний французький математик, сліпий від народження, - самостійно розробив явну комбінаторну послідовність проміжних стадій. Те, що людина, повністю позбавлена зору, зуміла подумки осягнути й розрахувати чотиривимірну за своєю суттю деформацію, яка не піддається безпосередньому правому уявленню зрячих дослідників, залишається унікальним свідченням потужності абстрактного математичного мислення.

З точки зору геометрії занурень, проміжні стадії регулярної гомотопії проходять через просторові самоперетини, утворюючи лінії самоперетину та особливі точки. Важливу роль у розумінні симетрії цього процесу відіграє поверхня Боя - занурення дійсної проєктивної площини $RP^2$ в $R^3$, що характеризується наявністю однієї потрійної точки самоперетину та трьох петель. Математично встановлено, що поверхня Боя (або її дзеркальні варіації) може виступати центральною, найбільш симетричною точкою («серединою шляху») у процесі виворіту, де внутрішні та зовнішні властивості поверхні врівноважуються перед остаточним переходом у вивернутий стан.

Новий етап у візуалізації цієї задачі розпочався у 1990-х роках завдяки працям Вільяма Терстона, який запропонував інноваційний метод «гофрування» (англ. *corrugations method*). Математична суть підходу Терстона полягає у введенні в геометрію сфери рівномірних високочастотних коливань (дрібних хвиль) уздовж певних напрямків. Створення таких гофрованих складок додає поверхні додаткових віртуальних ступенів свободи, дозволяючи зануренню «проскакувати» критичні точки зміни топологічного типу ліній самоперетину без порушення умови гладкості та без утворення заборонених сингулярностей типу «складка». У 1994 році Геометричний центр Університету Міннесоти успішно реалізував метод Терстона у комп'ютерній графіці, випустивши науково-анімаційний фільм *«Outside In»*, де складні аналітичні рівняння деформації вперше постали у наочній геометричній формі.

З практичної та теоретичної точок зору феномен виворіту сфери наочно демонструє, що математична строгість здатна повністю руйнувати уявну очевидність фізичного світу. Хоча топологічні занурення із самоперетинами не мають прямих аналогів у класичній механіці твердих деформівних тіл, побудований математичний апарат і методи гофрування Терстона знайшли широке застосування в теорії інваріантів вузлів, обчислювальній геометрії, аналізі багатовидів, теорії еластичності тонких оболонок, а також у розробці сучасних алгоритмів тривимірного рендерингу складних пластичних поверхонь. Дослідження таких парадоксів розвиває просторову уяву, збагачує комп'ютерні методи топологічного аналізу даних та поглиблює фундаментальне розуміння неперервних відображень і гладких структур у багатовимірних просторах.

**Література**

1. Smale S. A classification of immersions of the two-sphere // Transactions of the American Mathematical Society. - 1959. - Vol. 90, No. 2. - P. 281–290.
2. Francis G. K., Morin B. Arnold Shapiro's eversion of the sphere // The Mathematical Intelligencer. - 1979. - Vol. 2, No. 4. - P. 200–203.
3. Levy S., Maxwell D., Munzner T. Outside In. - Geometric Center, University of Minnesota, 1994. - Режим доступу: https://www.geom.uiuc.edu/docs/outreach/oi/
4. Thurston W. P. On proof and progress in mathematics // Bulletin of the American Mathematical Society. - 1994. - Vol. 30, No. 2. - P. 161–177.
5. Тарасов Л. В. Топология в задачах. - М.: Мир, 1998. - 220 с.
6. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. - М.: Наука, 1989. - 528 с.

***С. Матяшовська***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА ВИПАДКОВОСТЕЙ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ

У сучасному світі людина щодня стикається з явищами, які здаються випадковими та непередбачуваними: погодні умови, економічні коливання, результати спортивних змагань, затримки транспорту або поширення інформації в соціальних мережах — усе це приклади процесів, результат яких неможливо передбачити. Але з точки зору математики такі явища не є хаотичними, оскільки підпорядковуються певним статистичним закономірностям. Теорія ймовірностей дозволяє систематизувати випадкові процеси та робити обґрунтовані прогнози навіть у ситуаціях невизначеності. Актуальність дослідження зумовлена широким використанням ймовірнісних методів у різних сферах діяльності людини — від прогнозування фінансових ринків до оптимізації транспортних систем тощо. Розуміння основ теорії ймовірностей допомагає приймати більш обґрунтовані рішення та знижувати ризики у повсякденному житті.

*Цікаві факти:*

1. Імовірність випадіння певного числа на гральній кістці завжди однакова — 1/6, але серія з десяти підкидань може дати дуже несподіваний результат.
2. Різні природні процеси, як рух молекул у газі або розподіл дерев у лісі, теж підпорядковуються законам ймовірностей.
3. Відома “парадоксальна” ситуація з днями народження: у групі з 23 людей ймовірність того, що хоча б двоє людей мають однаковий день народження, вже понад 50%.

4. Алгоритми рекомендацій у YouTube, Spotify чи Netflix базуються на ймовірностях перегляду користувачем певного контенту.

5. Казино працюють завдяки ймовірності: правила побудовані так, щоб “математичне очікування” виграшу завжди було у користь закладу.

6. Навіть повсякденне рішення “взяти парасольку чи ні” часто базується на оцінці ймовірності дощу.

7. Метод Монте-Карло, що використовує випадкові числа для обчислень, застосовувався ще у 1940-х для розрахунків ядерних реакцій.

8. Випадкові процеси пояснюють природні явища, як-от рух планет, кліматичні коливання та поширення рослин і тварин.

9. Навіть у спортивних змаганнях використовується ймовірність: наприклад, для прогнозування результатів футбольних матчів або турнірів тенісу тощо.

*Використання ймовірності у повсякденному житті*

*1. Економіка та фінанси*

a. Страхові компанії розраховують страхові внески на основі статистичних даних, прогнозуючи ризики.

b. Банки використовують ймовірнісні моделі для оцінки кредитоспроможності клієнтів.

c. Фондові ринки аналізуються через випадкові процеси; наприклад, ціни акцій підпорядковуються певним ймовірнісним закономірностям, хоча на перший погляд здаються хаотичними.

*2. Медицина та біологія*

a. Прогнозування поширення захворювань базується на ймовірнісних моделях.

b. Вчені розробляють плани вакцинації, враховуючи ймовірності зараження та ефективність вакцин.

c. Випадкові процеси також використовуються в дослідженні генетичних мутацій, моделюванні еволюційних змін та популяційної динаміки.

*3. Техніка та інформаційні технології*

a. Генерація випадкових чисел застосовується у криптографії для захисту даних.

b. Алгоритми штучного інтелекту навчаються на випадкових вибірках даних, що дозволяє підвищувати точність прогнозів.

4. *Транспортні системи і логістика* використовують ймовірнісні моделі для планування маршрутів, оцінки заторів і оптимізації часу доставки.

5. *Фінансові моделі*: використовують випадкові процеси для прогнозування ризиків і цін на ринку.

6. *Штучний інтелект*: алгоритми навчання на основі випадкових вибірок підвищують точність прогнозів.

7. *Криптографія та безпека*: генерація випадкових чисел гарантує безпечне передавання інформації.

*Висновки* Теорія ймовірностей дозволяє глибше зрозуміти явища, які здаються хаотичними та непередбачуваними. Використання ймовірнісних моделей у різних

сферах життя допомагає прогнозувати ризики, приймати обґрунтовані рішення та оптимізувати процеси. Знання ймовірності — важливий інструмент сучасної людини для ефективного аналізу та управління складними системами.

**Література**

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***П. Сидор***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА, ЩО РЯТУЄ ЖИТТЯ

Математика здавна вважається фундаментальною наукою, що лежить в основі нашого розуміння світу. Хоча вона часто здається абстрактною дисципліною, віддаленою від реальних людських потреб, насправді саме математика відіграє ключову роль у забезпеченні безпеки, розвитку технологій і збереженні здоров'я. У сучасному суспільстві важко знайти сферу, де б математичні знання не впливали на рішення, що прямо чи опосередковано рятують життя людей.

*Математика і медицина* Однією з найважливіших галузей, у яких математика набуває життєвої ваги, є медицина, адже лікарі щодня користуються математичними методами, розраховуючи точні дози ліків, інтервали лікування чи параметри фізіологічних показників. Завдяки математичним моделям стало можливим передбачати поведінку інфекцій, аналізувати швидкість поширення вірусів, планувати заходи, які здатні зменшити кількість хворих та уникнути перевантаження системи охорони здоров'я.

Сучасна діагностика, така як комп'ютерна та магнітно-резонансна томографія, тримається на складних алгоритмах обробки сигналів, які перетворюють тисячі цифрових даних у зрозумілі для лікаря зображення. Без цих обчислень виявлення багатьох хвороб на ранніх стадіях було б неможливим.

*Математика та техніка, інженерія* Також важливе місце математика посідає у сфері її застосування в техніці та інженерії. Кожна будівля, міст, машина чи літак створюються на основі обчислень, що визначають їхню міцність і безпечність. Інженери аналізують навантаження, стійкість, оптимальну форму

конструкцій — усе це неможливо без математичних обчислень, формул та моделей. Навіть незначна похибка може привести до непоправних наслідків, тому точність, якої вимагає математика, впливає на життя людей.

У транспорті математичні алгоритми керують системами навігації, прогнозують дорожні ситуації й забезпечують роботу автопілотів. Завдяки обчисленням визначаються оптимальні траєкторії польотів, гальмівні відстані, безпечні маршрути та режими руху.

*Математика та безпека життєдіяльності* У галузі рятувальних операцій роль математики також важко переоцінити. Пожежники застосовують моделі поширення вогню, що допомагає планувати роботу та уникати небезпечних ситуацій.

Геологи й сейсмологи використовують математичні методи для визначення зон можливих землетрусів чи зсувів, що дозволяє вчасно попереджати населення. Під час пошуково-рятувальних операцій алгоритми аналізують карти, погодні умови та маршрути, допомагаючи вибрати найшвидший і найефективніший шлях до потерпілих. У надзвичайних ситуаціях це часто стає вирішальним чинником, що дозволяє врятувати життя.

*Висновок* Важливим напрямом сьогодення є використання математичних методів у штучному інтелекті та обробці великих масивів даних. Алгоритми машинного навчання вже сьогодні здатні розпізнавати пухлини точніше за людину, аналізувати стан пацієнтів у режимі реального часу, прогнозувати медичні ризики та допомагати лікарям приймати складні рішення.

Крім того, математичні моделі застосовуються для прогнозування природних катаклізмів, таких як бурі, повені чи цунамі. Завдяки таким прогнозам уряди та рятувальні служби можуть завчасно евакуювати людей і мінімізувати наслідки стихійних лих.

## Література

1. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

2. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

3. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с. ЛБелл Е. Т. Творці математики . - М .: Просвітництво , 1979. - 256 с.

4. Тюліна І. А. Жозеф Луї Лагранж. 1736-1813. - М .: Книжковий будинок «Ліброком», 2010. - 224 с. - (Фізико-математична спадщина). - ISBN 978-5-397-01356-7 .

5. Колчинський І. Р., Корсунь А. А., Родрігес М. Р. . Астрономи: Біографічний довідник 2-ге вид. - Київ: Наукова думка , 1986. - 512 с.

6. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.). Математика XIX століття. Геометрія. Теорія аналітичних функций. - М .: Наука, 1981. - Т. II.

***М. Бовда***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник:* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

# МАТЕМАТИКА В КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ: ФУНДАМЕНТ ЦИФРОВОГО СВІТУ

У статті розглянуто роль математики як фундаментальної основи сучасних комп'ютерних технологій. Проаналізовано значення дискретної математики, криптографії, математичної статистики, лінійної алгебри та теорії графів у програмуванні, інформаційній безпеці, штучному інтелекті та комп'ютерній графіці. Показано, що математичне моделювання забезпечує ефективність алгоритмів, надійність цифрових систем та розвиток інформаційних технологій.

Сучасне інформаційне суспільство неможливо уявити без комп'ютерних технологій, які стали невід'ємною складовою науки, освіти, промисловості, медицини та фінансової сфери. Проте основою їх функціонування є не лише електронні пристрої чи програмне забезпечення, а насамперед математичні методи та моделі. Саме математика є універсальною мовою, що описує процеси обробки інформації, забезпечує побудову алгоритмів і дозволяє створювати надійні цифрові системи.

Однією з найважливіших математичних дисциплін, що лежить в основі інформатики, є дискретна математика. На відміну від класичної математики, вона працює з дискретними об'єктами, що повністю відповідає принципам роботи цифрових комп'ютерів. Булева алгебра, запропонована Джорджем Булем, стала математичною основою цифрової логіки. Логічні операції AND (І), OR (АБО), NOT (НЕ) реалізуються в електронних схемах процесорів, пам'яті та контролерів і є базою виконання будь-якої комп'ютерної програми.

Важливе місце посідає теорія графів, яка використовується під час моделювання комп'ютерних мереж, транспортних систем, соціальних мереж та Інтернету. Алгоритми пошуку найкоротших шляхів, зокрема алгоритм Дейкстри та алгоритм Флойда–Воршелла, дозволяють оптимізувати маршрути передачі інформації, роботу навігаційних систем та телекомунікаційних мереж. Теорія графів також широко застосовується при побудові нейронних мереж і аналізі взаємозв'язків між великими масивами даних.

Однією з найактуальніших сфер застосування математики є **криптографія**, яка забезпечує конфіденційність та цілісність інформації. Сучасні криптографічні алгоритми ґрунтуються на методах теорії чисел, модульної арифметики та алгебри. Зокрема, алгоритм RSA використовує складність факторизації великих натуральних чисел, що робить практично неможливим підбір секретного ключа сучасними обчислювальними засобами. Криптографія на еліптичних кривих забезпечує аналогічний рівень захисту при значно менших розмірах ключів, тому широко застосовується у мобільних пристроях, банківських системах та криптовалютах.

Не менш важливу роль відіграють хеш-функції, які забезпечують перевірку цілісності інформації та безпечне зберігання паролів. Математичні властивості криптографічних хеш-функцій дозволяють отримувати унікальні цифрові відбитки файлів і повідомлень, що практично унеможливлює їх підробку.

Особливого значення математичні методи набувають у банківській сфері та системах електронних платежів. Протокол Діффі–Геллмана дає можливість двом користувачам створити спільний секретний ключ навіть через незахищений канал зв'язку. Для підтвердження особи широко використовуються алгоритми генерації одноразових паролів (TOTP), які математично формують новий код кожні 30 секунд на основі секретного ключа та поточного часу. Саме завдяки цим математичним алгоритмам забезпечується безпечне виконання фінансових операцій та електронної комерції.

Важливим напрямом застосування математики є комп'ютерна графіка. Побудова двовимірних і тривимірних моделей здійснюється за допомогою лінійної алгебри. Вектори, матриці та операції над ними використовуються для масштабування, повороту, перенесення та перспективного відображення об'єктів. Без математичних методів неможливе створення сучасних комп'ютерних ігор, систем автоматизованого проєктування, віртуальної реальності та цифрової анімації.

Останніми роками стрімко розвиваються технології штучного інтелекту, які також базуються на математичних моделях. Машинне навчання використовує математичну статистику, теорію ймовірностей, методи оптимізації та чисельного аналізу. Нейронні мережі являють собою складні математичні моделі, навчання яких здійснюється шляхом мінімізації функції втрат за допомогою градієнтних методів. Лінійна алгебра забезпечує ефективне опрацювання великих матриць даних, а математична статистика дозволяє оцінювати точність моделей та прогнозувати результати.

Сучасні великі мовні моделі, системи розпізнавання мовлення, автоматичного перекладу, аналізу медичних зображень та автономного керування транспортом також функціонують завдяки математичним алгоритмам. Це підтверджує, що подальший розвиток цифрових технологій безпосередньо залежить від розвитку математичної науки.

Отже, математика є фундаментом сучасного цифрового світу. Вона забезпечує побудову алгоритмів, створення інформаційних систем, захист даних, розвиток комп'ютерної графіки та штучного інтелекту. Саме математичні методи визначають ефективність програмного забезпечення, швидкість обробки інформації та рівень кібербезпеки. Подальший розвиток інформаційних технологій неможливий без удосконалення математичних моделей, алгоритмів і методів аналізу даних, що робить математику одним із ключових чинників науково-технічного прогресу.

## Література

1. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії алгоритмів : навч. посіб. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. 272 с.

2. Краковська А. Г., Бондаренко М. Ф. Дискретна математика : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

3. Ковальчук Л. О., Ковальчук В. М. Основи криптографічного захисту інформації : навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2022.

4. Морзе Н. В., Вембер В. П. Основи штучного інтелекту : навчальний посібник. Київ : Київський університет імені Бориса Грінченка, 2024.

***Д. Ятчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ГЕОМЕТРІЯ, ЩО СТВОРЮЄ ГАРМОНІЮ ВСЕСВІТУ

Світ, у якому ми живемо, побудований за законами гармонії й точності. І серед усіх наук, що розкривають цю гармонію, особливе місце займає геометрія — мова, якою говорить сам Всесвіт. Вона проявляється у формах планет, орбітах небесних тіл, у побудові архітектурних споруд, у хвилях світла й навіть у витворах мистецтва тощо.

Одними із найзагадковіших фігур у геометрії є криві другого порядку — еліпс, парабола та гіпербола. На перший погляд, це лише рівняння на площині. Але якщо глибше вдуматися, за ними стоїть цілий світ закономірностей, краси й гармонії.

Ще в античні часи їх досліджували великі вчені — Менехм, Аполлоній Перзький, Архімед. Пізніше саме на їхніх властивостях базували свої відкриття такі науковці, як Йоганн Кеплер і Ісаак Ньютон. Завдяки кривим другого порядку люди змогли пояснити рух планет, створити телескопи, проєктувати архітектурні шедеври та навіть системи навігації. Саме ці криві описують рух планет, напрям поширення світла, форми сучасних споруд і навіть способи передавання сигналів у космосі. Вони поєднують у собі точність математики й витонченість мистецтва.

*Криві другого порядку* — це особливі геометричні лінії, які виникають при перетині конуса з площиною. Саме тому їх ще називають конічними перерізами. До них належать три основні види кривих: еліпс, парабола та гіпербола. Усі вони описуються рівняннями другого степеня, тобто рівняннями, у яких змінні $x$ та $y$ мають квадрати. Через складність назв, криві другого порядку — це не щось далеке від нашого життя. Вони зустрічаються майже всюди: у природі, техніці, архітектурі, астрономії та навіть у мистецтві.

*Еліпс* — це крива, для якої сума відстаней до двох фокусів не змінюється. Саме так рухаються планети навколо Сонця, а форму еліпса використовують у стадіонах і будівлях, де звук лунає чітко та гармонійно.

*Парабола* — це сукупність точок, рівновіддалених від фіксованої точки (фокуса) і фіксованої лінії (директриси). Вона ідеально підходить для збору

світла або звуку в одній точці, що робить її незамінною в прожекторах, телескопах та антенах супутникового зв'язку.

*Гіпербола* — це крива, де абсолютна різниця відстаней від будь-якої точки на кривій до двох фіксованих точок (фокусів) є постійною. Це траєкторії деяких комет, а також використовується в навігаційних системах та архітектурних конструкціях.

Кожна крива другого порядку має своє унікальне алгебраїчне рівняння, яке описує її форму на координатній площині. Ці рівняння є мовою, якою Всесвіт говорить про симетрію та порядок. Вони дозволяють нам не тільки візуалізувати ці форми, а й маніпулювати ними для інженерних та дизайнерських рішень.

- Еліпс — символ рівноваги.
- Парабола — відображення зосередженої енергії.
- Гіпербола — шлях без кінця.

Йоганн Кеплер довів, що планети рухаються по еліптичних орбітах навколо Сонця, що знаходиться в одному з фокусів еліпса. Це фундаментальне відкриття стало основою небесної механіки.

Еліптичні арки та куполи, параболічні мости та гіперболічні вежі — криві другого порядку надають спорудам не лише естетичної привабливості, а й структурної міцності та ефективності.

Параболічні дзеркала в телескопах і фарах, гіперболічні лінзи в оптичних системах дозволяють фокусувати світлові та радіохвилі, роблячи можливими дистанційний зв'язок і спостереження за космосом. Криві другого порядку — це не просто математичні фігури. Вони поєднують у собі науку, красу й гармонію природи. Еліпси описують рух планет навколо Сонця, параболи допомагають зосереджувати енергію світла в телескопах і антенах, а гіперболи прокладають шлях у навігації та зв’язку.

Та навіть сьогодні ці лінії залишаються джерелом нових відкриттів. Їхні властивості використовують у космічних дослідженнях, архітектурі, дизайні та сучасних технологіях. Криві другого порядку показують, що математика — це не лише формули, а й спосіб зрозуміти гармонію світу. Вони нагадують: у кожній лінії, у кожній формі прихована краса і порядок Всесвіту, який ми ще продовжуємо відкривати.

## Література

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

# СЕКЦІЯ 3. ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

***А. В. Сікачовська***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **Л. В. Дзюбик**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та інженерної графіки*

## ЗНАМЕНИТІ КОНСТАНТИ ТА ЇХНЯ ІСТОРІЯ І РОЛЬ В МАТЕМАТИЦІ

Звідки взялося число **e** і **π** в математиці? Чому математики вважають їх фундаментальними константами природи?

Число **e** виникло у XVII столітті, коли математики досліджували складні відсотки і має приблизне значення e≈2.71828. Відомий математик Леонард Ейлер дав числу позначення **e**.

Як воно виникає у задачах з відсотками? Уявімо, що ти поклав 1 гривню під 100% річних. Тоді:

• якщо відсотки нараховують 1 раз на рік → буде 2
• 2 рази → $(1+1/2)^2=2.25$
• 4 рази → $(1+1/4)^4\approx2.44$
• 12 разів → ≈ 2.61

Якщо нараховувати безкінечно багато разів (безперервно), значення наближається до числа e.

Чому число e таке особливе?

Функція $e^x$ має унікальну властивість: її похідна дорівнює їй самій. Це робить число **e** дуже важливим у: експоненційному рості, фізиці, статистиці, фінансах, біології.

Число **e** виникає у багатьох місцях: формула складних відсотків, розпад радіоактивних елементів, ріст популяцій, нормальний розподіл у статистиці, формула тотожності Ейлера

$$e^{i\pi}+1=0.$$

Її часто називають найкрасивішою формулою математики. Чому вона така особлива. В одній короткій формулі зустрічаються:

1. **0** — нуль
2. **1** — одиниця
3. **e** — основа натурального логарифма
4. **π** — число кола
5. **i** — уявна одиниця.

Тобто формула поєднує: алгебру, геометрію, комплексні числа , наліз.

Як висновок можна стверджувати, що число **e** з'явилося з задач про безперервне зростання і стало фундаментальною константою в математиці.

Можна навести ще один факт, який **ламає інтуїцію**: чому ймовірність того, що два випадкові числа взаємно прості, дорівнює $6/\pi^2$ — і тут виникає питання – що таке число **π** в математиці.

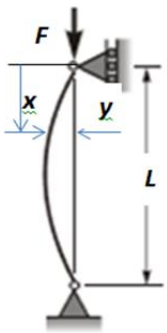
Найбільш відомо що число π (пі) — це математична константа, яка показує відношення довжини кола до його діаметра. Якщо взяти будь-яке коло і поділити його довжину на діаметр, завжди вийде одне й те саме число — **π≈3.14159**.

Число π з'являється в усіх формулах, пов'язаних із колами. Наприклад: довжина кола $2\pi r$, площа круга $\pi r^2$.

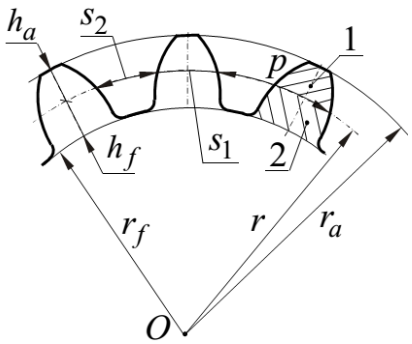
Число π було відоме ще тисячі років тому. Архімед одним із перших обчислив наближення π , а Леонард Ейлер запровадив сучасне позначення π. Цікаво що є навіть свято День Пі , який відзначають 14 березня (3/14), бо це нагадує число 3.14.

**Найдивніше те що,** число π можна знайти навіть без геометричних вимірювань. Є дуже відомий експеримент, у якому число π можна отримати просто кидаючи голку на підлогу (експеримент Буффало). Уявім підлогу з (наприклад, дошки): відстань між лініями d , довжина голки L. Кидаємо голку випадково багато разів і питаємо: як часто голка перетинає лінію**?** Одержуємо несподіваний результат Ймовірність того, що голка перетне лінію P=πd2L. Звідки π≈dK2LN. Тобто можна **обчислити π** просто через експеримент. Це один із перших прикладів того, що геометрія, ймовірність, випадковість можуть разом давати фундаментальні числа. Такі ідеї пізніше стали основою методу **Монте Карло**, який використовують у фізиці, економіці та комп'ютерному моделюванні.

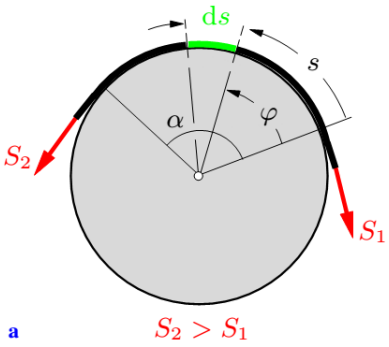
Знамениті константи відіграють також важливу роль у відомих формулах технічної механіки: розрахунок стержня на стійкість (формула Ейлера), визначення основного стандартизованого параметра зубчастого зачеплення – модуля, тертя нитки по циліндричній поверхні




$F_{кр}= \pi^2 EI /L^2$




$m = p/\pi$




$S_2 = S_1 e^{f\alpha}$

## Література

1. Істер О. С. *Алгебра і початки аналізу*. — Київ : Генеза, 2019. — 352 с.

2. Вікіпедія. Число π — Режим доступу: https://uk.wikipedia.org (дата звернення: 26.03.2026).

3. Вікіпедія. Число e — Режим доступу: https://uk.wikipedia.org (дата звернення: 26.03.2026).

4. Encyclopedia Britannica. Pi // Encyclopedia Britannica : вебсайт. — Режим доступу: https://www.britannica.com (дата звернення: 26.03.2026).

***Ю. Ю. Сарахман***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# ЛОГІЧНЕ ТА ГЕОМЕТРИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ ЧИСЛА $\sqrt{2}$

Питання про природу числа $\sqrt{2}$ належить до найдавніших проблем математики. У піфагорійській школі (V ст. до н. е.) домінувало уявлення про те, що всі величини можуть бути виражені через цілі числа та їхні відношення (раціональні числа). Відкриття несумірності діагоналі квадрата з його стороною стало стало принциповим викликом тогочасним уявленням, оскільки воно довело існування відрізків, довжину яких неможливо виразити через дискретні одиниці. Це відкриття призвело до появи поняття ірраціональності та заклало фундамент для переходу від арифметики до безперервної геометрії.

**Класичне арифметичне доведення від супротивного**

Класичним методом обґрунтування ірраціональності $\sqrt{2}$ є метод *reductio ad absurdum*. Припустимо, що $\sqrt{2} \in Q$. Тоді існують такі взаємно прості числа $m, n \in Z(n \neq 0)$, що виконується рівність:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Піднісши обидві частини до квадрату, отримаємо $2n^2 = m^2$. Згідно з теорією чисел, якщо квадрат числа $m^2$ ділиться на 2, то і саме число m є парним (оскільки квадрат непарного числа завжди є непарним). Нехай m = 2k, тоді:

$$(2k)^2 = n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$$

Отже, $n^2$ також є парним, що означає парність n. Ми прийшли до висновку, що m та n мають спільний дільник 2, що прямо суперечить умові їхньої взаємної простоти. Таким чином, припущення про раціональність $\sqrt{2}$ є хибним.

**Геометрична інтерпретація**

Альтернативний підхід базується на методі антиферезису (алгоритмі Евкліда). Розглянемо квадрат зі стороною $s_1$ та діагоналлю $d_1$. Якщо вони сумірні, то існує спільна міра, яка вкладається в них цілу кількість разів. Проте геометрична побудова показує, що при відкладанні сторони на діагоналі утворюється новий, менший квадрат зі стороною $s_2$ та діагоналлю $d_2$, пропорції яких ідентичні початковим.

Цей процес нескінченного спуску (*descente infinie*) доводить, що ми ніколи не знайдемо найменшої спільної міри, що є геометричним доказом ірраціональності.

**Значення для теорії множин та континууму**

Ірраціональність $\sqrt{2}$ стала одним із перших свідчень того, що множина раціональних чисел $Q$ не є повною. Це зумовило необхідність розширення числової системи та побудови множини дійсних чисел $R$. Формалізація цієї ідеї

була здійснена, зокрема, через теорію дедекіндових перерізів та підходи, розроблені Кантором. У сучасному математичному аналізі число $\sqrt{2}$ розглядається як алгебраїчне ірраціональне число, оскільки воно є коренем многочлена $x^2 - 2 = 0$ з цілими коефіцієнтами..

**Прикладне значення у сучасному дизайні та техніці**

Попри свою природу, $\sqrt{2}$ має колосальне прикладне значення. Стандарт паперу ISO 216 (формат A4) базується саме на цьому числі. Співвідношення сторін аркуша дорівнює $1:\sqrt{2}$. Це забезпечує унікальну властивість: якщо розрізати аркуш навпіл, отримані частини (A5) зберігають ті самі пропорції. Таким чином, ірраціональність забезпечує математичну самоподібність об'єктів.

**Висновок**

Доведення ірраціональності $\sqrt{2}$ — це фундаментальний результат, що змінив парадигму мислення від дискретного до неперервного. Розуміння природи ірраціональних чисел є необхідним для подальшого вивчення граничних переходів, теорії функцій та сучасних методів обчислювальної математики.

**Література**

1. Hardy, G. H., Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. — 6th ed. — Oxford: Oxford University Press, 2008.

2. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. — 3rd ed. — New York: McGraw-Hill, 1976.

3. Boyer, C. B., Merzbach, U. C. *A History of Mathematics*. — 3rd ed. — New York: John Wiley & Sons, 2011.

***Б. І. Чепак***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **І. В. Андрусяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# МЕЖІ МОЖЛИВОГО: АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ АНОМАЛІЙ ТА ПРИРОДИ НЕСКІНЧЕННОСТІ

Сучасна математика є фундаментом для більшості природничих та технічних наук. Її сила полягає у суворій логічній послідовності та внутрішній несуперечності. Проте історія науки показує, що найважливіші відкриття часто відбувалися на межі, де звичні правила арифметики та логіки перестають діяти. Вивчення математичних «аномалій» — від операцій з нулем до парадоксів нескінченних множин — дозволяє не лише краще зрозуміти структуру самої математики, а й знайти нові інструменти для опису складних фізичних процесів.

**Від 00 $0^0$ до нескінченних степеневих веж**

Одним із найбільш дискусійних питань класичного аналізу є поведінка функцій у точках невизначеності. Розглянемо випадок 0 у степені 0. В елементарній математиці діють два суперечливих правила: будь-яке число в нульовому степені дорівнює 1, та нуль у будь-якому степені дорівнює 0. Формально цей вираз є невизначеністю, але в теорії функцій та комбінаторики значення $0^0=1$ є найбільш обґрунтованим. Якщо ми розглянемо функцію однієї змінної $x^x$, то за допомогою логарифмування та правила Лопіталя легко довести, що $\lim(x\to 0+)x^x=1$.

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

Звідси $e^0=1$. Цей результат є базовим для комбінаторики та теорії степеневих рядів, де $0^0=1$ дозволяє уникнути громіздких виняткiв у формулах.

Цей приклад демонструє, як математика долає «розриви» через перехід до граничних значень.

Більш складним об’єктом є нескінченні степеневі вежі (тетрація). Вираз $x^{x^{x^{\cdots}}}$ має скінченне значення лише для певного інтервалу основи x. Аналіз показує, що якщо x перебуває в межах від $e^{-e}$ до $e^{1/e}$, то така послідовність збігається. Це доводить, що нескінченні операції вимагають суворого контролю області визначення, адже найменше відхилення може призвести до хаотичного результату або виходу за межі реальних чисел.

**Феноменологія нескінченності: від Гільберта до Кантора.** Найбільш наочним поясненням того, наскільки дивною є нескінченність, є метафора Давида Гільберта про готель. Уявіть готель, де є нескінченно багато номерів, і всі вони зайняті. У скінченному світі ми б почули звичайно відмову, але в математичному — можливо все:

Якщо приїжджає один новий гість, адміністратор просить кожного переїхати в наступний номер ($n\to n+1$). Перша кімната звільняється.

Якщо приїжджає автобус із нескінченною кількістю людей, адміністратор просить усіх переїхати в номери з подвоєним індексом (n→2n). Усі непарні номери стають вільними.

Цей парадокс доводить фундаментальну тезу: у світі нескінченності частина може бути рівною цілому. Дослідження Георга Кантора пішли ще далі, довівши, що існують різні «потужності» нескінченності. Наприклад, точок на крихітному відрізку більше, ніж усіх натуральних чисел. Це відкриття назавжди змінило теорію множин та логічну структуру сучасної науки. Розуміння того, що нескінченності можуть мати різний «розмір», стало революційним кроком, який змінив розвиток сучасної теорії інформації та криптографії.

Найбільш парадоксальна частина математики пов'язана з сумуванням чисел, які не мають природної межі. Розглянемо ряд натуральних чисел: 1+2+3+4+… Здавалося б, сума має бути нескінченною. Проте у вищій математиці, використовуючи методи аналітичного продовження дзета-функції Рімана, цьому ряду присвоюється значення:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

Цей результат виглядає як «зламана логіка», проте фізика підтверджує його реальність. Без цього числа ми б не змогли пояснити ефект Казимира — виникнення сили притягання між металевими пластинами у повному вакуумі. Математичні аномалії виявляються не помилками, а саме глибокою правдою про будову Всесвіту, яку людство тільки вчиться усвідомлювати.

Дослідження математичних парадоксів доводить, що те, що ми називаємо «неможливим» або «суперечливим», часто є лише межею нашого поточного розуміння. Перехід від скінченного до нескінченного, від визначеного до імовірного вимагає нових системних понять. Математичні аномалії виступають не як помилки, а як точки росту, що мотивують для розвитоку нових галузей знань, дозволяючи людству будувати все більш точні моделі навколишнього світу. Те, що вчора здавалося помилкою, сьогодні стає фундаментом для квантових комп'ютерів, космічної навігації та нових моделей реальності. Точки, де логіка «розривається», насправді є дверима до нових наукових горизонтів, які дозволяють нам бачити далі, ніж дозволяє проста інтуїція.

## Література

1. Юсипів Т. В., Зеленська І. О. Парадокси та нескінченність у математиці: між суперечністю й новими моделями реальності. *У світі математики*. 2025. Вип. 1. С. 60–73.

2. Стюарт І. *Неймовірні числа професора Стюарта*. К.: Альпіна, 2020. 340 с.

3. Гільберт Д. *Основи теорії нескінченності*. Львів: Видавництво ЛНУ, 2021. 210 с.

4. Кантор Г. *Основи загальної теорії множин*. К.: Наука, 2019. 256 с.

***Л. Р. Джуджук***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **І. В. Андрусяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЦІЛОЮ ТА ДРОБОВОЮ ЧАСТИНАМИ ЧИСЛА

Рівняння, що містять функції цілої частини числа $[x]$ (антьє від $x$) та дробової частини $\{x\}$, традиційно вважаються одними з найскладніших у курсі елементарної математики. Питання побудови графіків таких функцій та їх властивостей широко досліджувалися у класичній методичній літературі. Зокрема, у працях А. А. Андреєва та І. А. Кушніра [1] ґрунтовно описано геометричні перетворення та побудову розривних графіків, що є базою для розуміння поведінки антьє. Олімпіадний аспект та теоретичні властивості цих функцій детально висвітлені у роботах О. А. Сарани [2], де акцент зроблено на логічних викладках та теорії чисел.

Сучасні методичні дослідження (наприклад, праці М. П. Мазура та В. В. Заболотного [3]) вказують на необхідність впровадження динамічних моделей та розширених графічних методів для візуалізації складних функціональних залежностей. Однак у більшості існуючих підходів графічний метод розглядається лише як допоміжний засіб для візуалізації кількості коренів або оцінки їх приблизного положення.

**Новизна запропонованого підходу**

У цій роботі пропонується розширений графічний метод, який дозволяє отримувати точні аналітичні розв'язки через поєднання графічної візуалізації з логічними фільтрами:

1. **Етап візуального аналізу:** Використання чотирьох базових алгоритмів перетворення $(y = f([x]),\ y = [f(x)],\ y = f(\{x\}),\ y = \{f(x)\})$ для локалізації потенційних розв'язків.

2. **Етап аналітичної корекції:** Перехід від графічного перетину до розв'язання спрощених рівнянь на конкретних інтервалах, де $[x]$ набуває константних значень. Новизна полягає у використанні графічного образу для виокремлення критичних зон перетину, що дозволяє замінити розгляд нескінченної кількості проміжків аналізом лише тих одиничних інтервалів, де графіки фактично перетинаються.

3. **Етап фільтрації:** Використання властивості $0 \le \{x\} < 1$ для автоматичного відсікання сторонніх коренів ще на етапі побудови. Графічне обмеження значень функції смугою одиничної ширини виступає потужним інструментом перевірки отриманих аналітичних результатів.

**Базові алгоритми побудови**

Ефективність методу базується на володінні чотирма фундаментальними алгоритмами перетворення графіків $y = f(x)$:

1. $y = f([x])$: «сходинкова» функція (аргумент фіксується на інтервалі $[n;\ n+1)$). Графік складається з горизонтальних відрізків, що відображають дискретну зміну аргументу.
2. $y = [f(x)]$: проєкція значень на цілі числа по осі $Oy$. Це перетворення перетворює неперервну криву на набір дискретних точок або відрізків, ординати яких є цілими числами.
3. $y = f(\{x\})$: періодичне повторення фрагмента з інтервалу $[0;\ 1)$. Дозволяє перенести властивості функції на нескінченну кількість періодів, що є критично важливим для дослідження тригонометричних рівнянь з дробовою частиною.
4. $y = \{f(x)\}$: обмеження значень у смузі $[0;\ 1)$. Основний алгоритм для розв'язування рівнянь, де результат функції має бути дробовим, що наочно демонструє циклічність та розривність процесу.

**Практичне значення**

Методика перетворює графік з ілюстрації на повноцінний інструмент доведення. Такий підхід мінімізує обчислювальні помилки, характерні для чисто алгебраїчних методів розв'язання рівнянь з ант’є, і дозволяє учням швидше опановувати олімпіадні теми.

**Висновки**

Запропонований підхід не лише покращує графічну культуру учнів, а й розвиває алгоритмічне мислення. Він доводить, що графічний метод може бути самодостатнім для отримання точних розв’язків складних алгебраїчних задач, що підвищує інтерес до вивчення математики.

**Література**

1. Андреєв А. А., Горєлов В. А., Кушнір І. А. Графіки функцій: навчальний посібник. Київ: Факт, 2006. 256 с.

2. Сарана О. А. Математичні олімпіади: теорія та методи розв’язування задач: навчальний посібник. Київ: Видавництво А.С.К., 2005. 384 с.

3. Мазур М. П., Заболотний В. В. Методика використання графічного методу при розв’язуванні нестандартних рівнянь. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання*. 2018. № 20 (27). С. 45–52.

***М. С. Оратівський***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# МЕТОДИКА ТА АЛГОРИТМИ РУЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ СКЛАДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Сучасна математична освіта стикається з проблемою надмірної залежності здобувачів освіти від електронних пристроїв. При обчисленні коренів, логарифмів та тригонометричних функцій найчастіше використовуються калькулятори. Через це комп'ютерні обчислення сприймаються учнями як незрозуміла «чорна скринька», куди вводяться дані і магічним чином з'являється результат. Проте для повноцінного розуміння точних наук та подальшого розвитку у технічних сферах критично важливо вміти виконувати базові розрахунки самостійно. Метою цієї роботи є систематизація практичних методів ручного обчислення складних математичних функцій без використання обчислювальної техніки.

**Основні алгоритми обчислень**

Для виконання розрахунків без електронних засобів доцільно використовувати такі математичні підходи:

**Квадратні та вищі корені:** Класичний алгоритм знаходження результату «цифра за цифрою» (подібний до ділення у стовпчик) дозволяє отримувати абсолютно точні цифри кореня без накопичення похибок. Альтернативним і більш швидким є використання ітераційної формули Ньютона: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$. З кожною новою ітерацією кількість правильних значущих цифр у відповіді збільшується приблизно вдвічі. Завдяки правильному підбору коефіцієнтів цей метод легко адаптується і для коренів довільного n-го степеня.

**Показникові функції**: Знаходження значень із дробовими аргументами базується на перетворенні дробового показника степеня у двійкову систему числення (подаючи його як суми дробів вигляду $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$). Це дозволяє звести складну математичну дію до серії послідовних добувань квадратних коренів та перемноження отриманих проміжних результатів.

**Логарифмічні функції:** Використовуючи базові властивості логарифмів та маючи набір попередньо обчислених значень квадратних коренів, можна розкласти потрібне число на множники-корені. Це зводить задачу до простих арифметичних операцій і дозволяє оцінити значення логарифма вручну.

**Практичне значення**

Запропонована методика дозволяє здобувачам освіти відійти від механічного використання калькуляторів. Навички ручного обчислення, навіть із невеликою точністю (до 2–3 значущих цифр), розвивають аналітичне мислення та поглиблюють розуміння природи математичних функцій і взаємозв'язків між

ними. Оволодіння алгоритмами ручного обчислення (методом Ньютона, алгоритмом «цифра за цифрою», розкладанням степенів) демістифікує роботу комп'ютерних систем у свідомості учнів. Впровадження цих підходів у навчальний процес тренує обчислювальні навички та доводить, що базові математичні інструменти є самодостатніми для отримання точних або наближених розв’язків складних задач.

**Література**

1. Романенко В. І., Лебедєва І. В. Елементарна математика: обчислення вручну // Про математику та математиків. — 2025.

***А. А. Лазурак***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник **І. В. Андрусяк**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## ГІПОТЕЗА РІМАНА: НАЙДОРОЖЧА ЗАГАДКА ПРО ПРОСТІ ЧИСЛА

**Прості числа** — це числа, що діляться лише на одиницю та самі на себе (2, 3, 5, 7, 11,...). Попри свою простоту, вони поводяться вкрай хаотично. Проте математики століттями намагалися знайти закономірність у їхньому розподілі.

У 1859 році німецький математик Бернгард Ріман опублікував восьмисторінкову роботу, яка назавжди змінила теорію чисел. Він припустив, що ключ до розуміння простоти чисел лежить у площині комплексної функції, яку тепер називають дзета-функцією Рімана. Сьогодні ця задача входить до списку «Проблем тисячоліття», а за її розв’язання Математичний інститут Клея пропонує нагороду в 1 мільйон доларів.

**Математичний апарат:** Дзета-функція та прості числа

2.1. Основні означення

Для початку визначимо ключові поняття.

**Означення 1.**

**Ейлерове добуток** — це представлення дзета-функції у вигляді нескінченного добутку по всіх простих числах p:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ просте}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdot \dots$$

**Рисунок 1**

Рис 1: Ця формула є аналітичним формулюванням основної теореми арифметики.

Ріман зробив крок далі. Він розглянув s не як дійсне число, а як комплексне число $s = \sigma + it$, де $\sigma$ — дійсна частина, а $it$ — уявна частина (де $i = \sqrt{-1}$ є уявною одиницею).

Він показав, що ряд, який визначає (s), сходиться лише тоді, коли дійсна частина $\sigma > 1$. Щоб дослідити функцію в інших точках, Ріман використав метод, відомий як аналітичне продовження. Він отримав нову формулу, яка визначає функцію для всієї комплексної площини (за винятком точки s=1, де функція прямує до нескінченності). Ріман виявив, що розподіл простих чисел тісно пов'язаний із точками, де функція дорівнює нулю ($\zeta(s) = 0$). Ці нулі бувають двох типів:

Тривіальні нулі: розташовані у точках s = -2, -4, -6,.... на від'ємній дійсній осі. Вони добре вивчені та не становлять загадки.

Нетривіальні нулі: розташовані у так званій «критичній смузі», де дійсна частина числа знаходиться між 0 та 1 ($0 \leq \sigma \leq 1$).

• Формулювання Гіпотези Рімана: Всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину, що дорівнює точно ½.

Тобто, згідно з гіпотезою, всі ці загадкові нулі лежать на одній єдиній прямій, яку називають «критичною прямою».

### 3. «Музика» простих чисел та розподіл

Якщо гіпотеза Рімана вірна, це означає, що прості числа розподілені максимально «гармонійно» і передбачувано. Кожен нетривіальний нуль дзета-функції додає певну «хвилю» або «коливання» до графіка, що описує кількість простих чисел.

Математик Нік Дуїті назвав нулі дзета-функції «музикою» простих чисел. Якби нулі не лежали на лінії 1/2, це означало б, що в «музиці» є фальшиві ноти, і розподіл простих чисел був би набагато хаотичнішим.

### 4. Криптографія та RSA

Більшість сучасних алгоритмів шифрування (наприклад, RSA, який використовується для захисту банківських транзакцій, електронної пошти та веб-сайтів) базуються на складності розкладання великих чисел на прості множники (задачі факторизації).

### Висновки

Гіпотеза Рімана — це більше ніж просто полювання за мільйоном доларів. Це спроба знайти порядок у хаосі. На сьогодні за допомогою суперкомп'ютерів перевірено понад 10 трильйонів нулів, і всі вони лежать на критичній прямій. Однак у математиці перевірка навіть величезної кількості випадків не є доведенням. Наприклад, ми не можемо бути впевнені, що 10 { трильйонів перший} нуль не виявиться десь збоку. Доведення цієї гіпотези стане «великим вибухом» для теорії чисел, миттєво зробивши істинними сотні інших математичних теорем, які починаються зі слів: «Припускаючи, що гіпотеза Рімана вірна...». Це залишається найвищою вершиною, яку людський розум поки що не зміг підкорити.

**Література**

1. Про кількість простих чисел, що не перевищують заданої величини, 1859. — Оригінальна стаття Рімана, де вперше була сформульована гіпотеза.
2. 2. Derbyshire, John. Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics. — Joseph Henry Press, 2003. — Детальний розгляд історії та математичної суті гіпотези для широкого загалу.
3. 3. Edwards, H. M. Zeta Function. — Academic Press, 1974 (reprinted by Dover Publications). — Класичний математичний підручник, що детально аналізує дзета-функцію.

***О. Кротінов***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## СПІРАЛЬ ФІБОНАЧЧІ

Математика є невід’ємною частиною навколишнього світу і проявляється не лише у формулах та задачах, а й у природі, мистецтві, архітектурі та повсякденному житті людини. Багато природних явищ підпорядковуються чітким математичним закономірностям, які можна спостерігати навколо нас. Однією з найцікавіших і найвідоміших таких закономірностей є спіраль Фібоначчі, яка поєднує в собі красу, гармонію та точність математичних законів. Спіраль Фібоначчі часто називають символом гармонії природи, адже вона зустрічається у формах рослин, мушлях, у будові тіла людини, у творах мистецтва та архітектури. Вивчення цієї спіралі дозволяє зрозуміти, як абстрактна математика тісно пов’язана з реальним світом і чому математичні закономірності відіграють таку важливу роль у формуванні навколишнього середовища.

*Числа Фібоначчі та їх походження* Послідовність Фібоначчі — це числовий ряд, у якому кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх. Виглядає вона так:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 і так далі.

Цю послідовність описав італійський математик Леонардо Пізанський, відомий під ім’ям Фібоначчі, у XIII столітті. Він використав її для розв’язання задачі про розмноження кроликів, навіть не підозрюючи, що відкрив одну з найвідоміших математичних закономірностей у світі. Особливістю чисел Фібоначчі є те, що відношення двох сусідніх чисел поступово наближається до так званого золотого перерізу, який приблизно дорівнює 1,618… . Саме цей зв’язок робить послідовність Фібоначчі надзвичайно важливою для розуміння гармонії в природі та мистецтві.

*Спіраль Фібоначчі та принцип її побудови* Спіраль Фібоначчі утворюється на основі чисел цієї послідовності. Для її побудови створюють квадрати, сторони яких дорівнюють числам Фібоначчі, і розташовують їх послідовно, повертаючи кожен новий квадрат на 90 градусів. Якщо через ці квадрати провести плавну криву, утворюється спіраль, яка і називається спіраллю Фібоначчі. Ця спіраль є наближенням логарифмічної спіралі, яка має унікальну властивість: вона зберігає свою форму незалежно від масштабу. Саме тому подібні спіралі так часто зустрічаються в природі — вони є ефективними з точки зору росту та розвитку. Спіраль Фібоначчі вважається візуальним утіленням математичної гармонії. Вона демонструє, як прості числові закономірності можуть створювати складні та красиві форми, що виглядають природно та естетично привабливо.

*Спіраль Фібоначчі в природі* Одним із найяскравіших прикладів прояву спіралі Фібоначчі є природа. Вона зустрічається у формі мушель равликів, у розташуванні насіння соняшника, у шишках, ананасах та листках рослин. Таке розташування елементів дозволяє максимально ефективно використовувати простір і ресурси, зокрема світло та поживні речовини. У рослин спіраль Фібоначчі часто проявляється у порядку розміщення листків на стеблі. Завдяки цьому кожен листок отримує максимальну кількість сонячного світла, що сприяє кращому росту рослини. Подібні закономірності можна спостерігати і в будові квітів, де кількість пелюсток часто є числом Фібоначчі. Також спіральні форми можна побачити в ураганах, галактиках і навіть у водяних вирвах. Це ще раз підтверджує, що математика є універсальною мовою природи, яка керує процесами на різних рівнях — від мікросвіту до космосу.

*Спіраль Фібоначчі та золотий переріз* Тісний зв’язок спіралі Фібоначчі із золотим перерізом робить її особливо важливою для мистецтва й дизайну. Золотий переріз здавна вважався ідеальним співвідношенням частин цілого, яке сприймається людиною як найбільш гармонійне. У творах живопису, архітектури та скульптури часто можна знайти пропорції, що відповідають золотому перерізу. Художники й архітектори використовували ці пропорції інтуїтивно або свідомо, прагнучи створити естетично досконалі композиції. Спіраль Фібоначчі допомагає візуалізувати ці пропорції та застосовувати їх на практиці. У сучасному світі золотий переріз і спіраль Фібоначчі використовуються в графічному дизайні, фотографії, вебдизайні та навіть у створенні логотипів. Це дозволяє створювати композиції, які виглядають природно та привабливо для людського ока.

*Спіраль Фібоначчі в житті людини Е*лементи спіралі Фібоначчі можна знайти і в будові людського тіла. Пропорції між різними частинами тіла часто наближені до золотого перерізу. Це стосується співвідношення зросту людини до довжини окремих частин тіла, розміщення рис обличчя та навіть будови пальців. Крім того, спіраль Фібоначчі використовується в науці та техніці. Вона застосовується в комп’ютерній графіці, моделюванні природних процесів, фінансовому аналізі та програмуванні. Таким чином, ця математична закономірність має не лише теоретичне, а й практичне значення.

**Література**

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.
2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.
3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.
4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***Н.-П. Лісний***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## НЕСКІНЧЕННІСТЬ, ЯКА ЗАКІНЧУЄТЬСЯ: ПАРАДОКС ЗЕНОНА

Ще в античні часи філософ Зенон Елейський запропонував кілька відомих парадоксів, які ставили під сумнів саму можливість руху. Найвідоміший із них це парадокс Ахілла і черепахи.

На перший погляд він виглядає логічним і навіть переконливим, однак сучасна математика доводить, що проблема полягає не в русі, а в нашому розумінні нескінченності. У цій публікації розглянемо, чому парадокс Зенона виник і як поняття границі повністю його пояснює.

*СУТЬ ПАРАДОКСУ ЗЕНОНА*

Зенон уявив ситуацію, в якій швидкий герой Ахілл намагається наздогнати повільну черепаху. Черепасі дають фору. За логікою Зенона, Ахілл спочатку має дійти до точки, де черепаха була на старті. Але за цей час черепаха трохи просунеться вперед. Потім Ахілл доходить до нового місця черепахи, але вона знову рухається далі. Таких етапів нескінченно багато, отже, з погляду Зенона, Ахілл ніколи не наздожене черепаху.

На інтуїтивному рівні цей висновок здається абсурдним, адже в реальному житті швидший об’єкт завжди обганяє повільніший. Проте в античні часи не існувало математичного апарату, який міг би пояснити цю суперечність.

*РОЛЬ НЕСКІНЧЕННОСТІ*

Основна ідея парадоксу полягає в тому, що шлях Ахілла розбивається на нескінченну кількість відрізків. Зенон зробив помилковий висновок, вважаючи, що нескінченна кількість дій обов’язково потребує нескінченного часу. Саме тут виникає ключове питання: чи завжди нескінченність означає щось безмежне в реальності?

*ГРАНИЦІ ЯК РОЗВ’ЯЗАННЯ ПАРАДОКСУ*

Сучасна математика дає чітку відповідь на це питання через поняття границі. Нескінченна кількість відрізків може мати скінченну суму. Кожен наступний етап

руху Ахілла займає менше часу, ніж попередній. Хоча кількість кроків нескінченна, загальний час їх виконання має певну межу, до якої він прямує.

Саме поняття границі дозволяє описати ситуацію, коли нескінченний процес приводить до конкретного результату. Таким чином, Ахілл наздоганяє черепаху не «в кінці нескінченності», а в цілком визначений момент часу.

*ЧОМУ ПАРАДОКС ВАЖЛИВИЙ СЬОГОДНІ*

Парадокс Зенона є не просто філософською загадкою, а важливим прикладом того, як математика розширює можливості людського мислення. Він показує, що інтуїція може бути хибною, а реальність складнішою, ніж здається на перший погляд. Поняття границі, яке виникло значно пізніше, стало фундаментом математичного аналізу, фізики, інженерії та комп'ютерних технологій.

Парадокс Зенона виник через відсутність строгого поняття границі в античній математиці. Сучасний математичний аналіз доводить, що нескінченна кількість кроків може бути виконана за скінченний час. Таким чином, парадокс зникає, а рух перестає бути чимось неможливим. Цей приклад наочно демонструє, як розвиток математичних ідей дозволяє розв'язувати проблеми, що століттями здавалися нерозв'язними.

**Література**

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

5. ЛБелл Е. Т. Творці математики . - М .: Просвітництво , 1979. - 256 с.

6. Тюліна І. А. Жозеф Луї Лагранж. 1736-1813. - М .: Книжковий будинок «Ліброком», 2010. - 224 с. - (Фізико-математична спадщина). - ISBN 978-5-397-01356-7 .

7. Колчинський І. Р., Корсунь А. А., Родрігес М. Р. . Астрономи: Біографічний довідник 2-ге вид. - Київ: Наукова думка , 1986. - 512 с.

8. Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П. (ред.). Математика XIX століття. Геометрія. Теорія аналітичних функций. - М .: Наука, 1981. - Т. II.

***А. Романюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. М. Трусевич****, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## НЬЮТОН, КОМЕТА ТА ВИНАХІД ПОХІДНОЇ

У XVII столітті Європу сколихнула поява надзвичайно яскравої комети. Вона з'явилася просто-таки «нізвідки» й рухалася так швидко і непередбачувано, що люди почали вбачати в ній знак біди. Астрономи зібрали чимало спостережень, але не могли пояснити найпростішого: якою буде її траєкторія? Чи повернеться вона знову?

На той час рух небесних тіл описували переважно геометричними методами, які чудово працювали з колами та еліпсами, але не дозволяли точно передбачити положення комети в будь-який момент. Саме в цей час до задачі долучився Ісаак Ньютон — один з найвідоміших учених в історії. І хоча сьогодні Ньютон асоціюється з класичною механікою, тоді він ще тільки формував фундамент свого підходу до вивчення природи. Однак для того, щоб описати рух комети математично, йому бракувало ключового інструмента — поняття миттєвої швидкості.

1. *Проблема: як виміряти швидкість "у цю саму мить"?*

Якщо ми хочемо дізнатися середню швидкість тіла, достатньо порахувати за відомою формулою, але це працює лише для проміжку часу, тобто "за секунду", "за годину". А що робити, коли потрібно знати швидкість у конкретно взяту мить**,** наприклад, у 3:13:21? Для комети це було принципово: невеличка помилка в швидкості давала величезну похибку в положенні через місяць. І тоді Ньютон поставив питання, яке перевернуло історію математики: Чи можна брати проміжок часу нескінченно малим?

2. *Народження ідеї границі та похідної*

Ньютон почав розглядати проміжки часу, які стають дедалі меншими:

$$1 \text{ секунда} \to 0{,}1 \text{ с} \to 0{,}01 \text{ с} \to 0{,}0001 \text{ с} \to \cdots$$

І він усвідомив, що можна підходити до миттєвої швидкості як до границі середньої швидкості при наближенні проміжку часу до нуля. Так народилася похідна — величина, яка описує швидкість зміни будь-якого процесу.

Саме поняття похідної перетворило математику на універсальну мову фізики. Для Ньютонового світу це означало одне: тепер можна обчислити точний шлях комети.

3. *Комета як привід для створення математичного аналізу*

Працюючи над задачею, Ньютон сформував зовсім нову галузь — диференціальне числення. Дослідники того часу вважали орбіти планет досконалими колами. Але Ньютон довів, що під дією сили тяжіння небесні тіла рухаються по кривих, які можна описати за допомогою похідної. Саме завдяки

цьому підходу вдалося показати, що комета не летить хаотично, а рухається за еліптичною орбітою**.** Її траєкторію вдалося передбачити надзвичайно точно — і це стало однією з найвидатніших перемог науки.

4. *Фінал історії: повернення комети Галлея*

Через десятиліття астроном Едмунд Галлей дослідив розрахунки Ньютона й зрозумів: деякі комети з XVII століття мали *надзвичайно схожі орбіти*. Він висунув сміливе припущення: це одна й та сама комета, яка обертається навколо Сонця раз на приблизно 76 років. Він передбачив, що вона повернеться у 1758 році. І хоча самого Галлея вже не було в живих, комета з'явилася — точно в передбачений час. На честь ученого її назвали кометою Галлея**.**

Ціль, з якої все почалося — зрозуміти рух небесного тіла — привела до народження інструменту, без якого сьогодні неможливо уявити ні фізику, ні техніку, ні інженерію.

5. *Значення винаходу похідної*

Похідна стала одним із найважливіших відкриттів людства, тому що дозволила:

- описувати рух будь-яких об'єктів — від кулі до ракети;
- аналізувати швидкість нагрівання в пожежах;
- моделювати зростання населення або розповсюдження хвороб;
- прогнозувати поведінку механічних систем;
- створювати математичні моделі катастроф, вибухів, поширення полум'я;
- формувати сучасну науку про автоматизацію та керування.

І все це почалося з простої спроби зрозуміти… куди летить комета.

**Література**

1. Математика XVII століття // Історія математики / За редакцією А. П. Юшкевича , у трьох томах. - М .: Наука, 1970. - Т. II.

2. Кузик А., Карабин О., Трусевич О. Вища математика. Ч.1. ; Ч.2. - ЛДУБЖД - 2014.

3. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Трусевич О. Інтегральне числення. - ЛДУБЖД - 2019.- 111с.

4. Тацій Р.М., Трусевич О. Ряди. - ЛДУБЖД - 2024.- 109с.

***В. В. Іванський***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,*
*Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

## ЕММІ НЕТЕР: АРХІТЕКТОР СУЧАСНОЇ АЛГЕБРИ

Еммі Нетер (1882–1935) — одна з найвидатніших математиків XX століття, яку часто називають архітектором сучасної абстрактної алгебри (рис. 1). Саме вона змінила спосіб, у який математики мислять: від простого обчислення до глибокого розуміння структур.



**Рисунок 1** – Портрет Еммі Нетер
(приблизно 1920–1930-ті роки)

*Джерело: Encyclopedia Britannica [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.britannica.com/biography/Emmy-Noether*

Вона народилася 23 березня 1882 року в німецькому місті Ерланген у родині математика Макса Нетера [1]. Спочатку її шлях у науку не був очевидним. У той час жінкам було складно будувати академічну кар'єру, і Еммі довгий час працювала без офіційної посади та навіть без заробітної плати. Але це не зупинило її.

Справжній прорив стався, коли вона почала працювати з 1915 року в Геттінгені — одному з найважливіших наукових центрів того часу. Там її талант нарешті помітили. Хоча формально вона довгий час не мала повноцінної посади професора, її ідеї вже активно впливали на найкращих математиків світу.

Нетер стала однією з ключових постатей революції в абстрактній алгебрі. Вона змістила акцент з конкретних обчислень на вивчення загальних алгебраїчних структур — кілець, ідеалів, модулів і полів. Це дозволило об'єднати різні розділи математики в єдину логічну систему.

Одним із її найважливіших досягнень стало введення поняття «нетерівських кілець» — кілець, у яких будь-який зростаючий ланцюг ідеалів стабілізується. Це означає, що всі ідеали є скінченно породженими.

Ще більш відомою є теорема Нетер (1918). Вона встановлює глибокий зв'язок між безперервними симетріями фізичної системи та законами збереження [2–3]. Зокрема, якщо лагранжіан системи інваріантний відносно зсуву в часі, то зберігається енергія; якщо відносно просторових трансляцій — зберігається

імпульс; якщо відносно обертань — зберігається момент імпульсу [3–4]. Ця теорема є однією з найфундаментальніших ідей сучасної теоретичної фізики [2].

На рис. 2 наведено графічну ілюстрацію теореми Нетер для випадку координатної симетрії. Діаграма демонструє, як варіація траєкторії під дією безперервної симетрії $\varphi$ призводить до збереження канонічного імпульсу завдяки стаціонарності дії $S$.

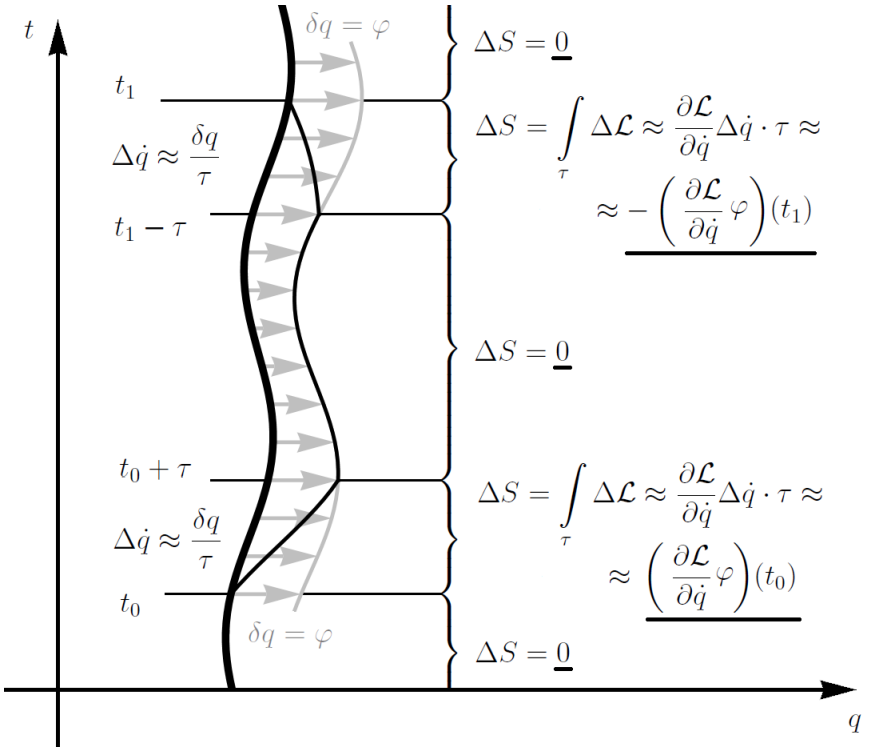



**Рисунок 2** – Ілюстрація теореми Нетер: зв'язок між координатною (просторовою) симетрією та збереженням імпульсу.
*Джерело: Wikimedia Commons (файл Noether theorem scheme.png).*
*Ліцензія: Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0.*
*Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem*

Нетер не завжди прагнула слави. Вона більше любила обговорювати ідеї з колегами та студентами. Багато її відкриттів стали відомими саме через її учнів, яких вона надихала своїм способом мислення.

У 1933 році, коли в Німеччині до влади прийшли нацисти, вона була звільнена з університету і емігрувала до США. Нетер працювала в коледжі Брін-Мор (Bryn Mawr College), але 14 квітня 1935 року померла у віці 53 років після ускладнень операції [1].

Після смерті Еммі Нетер Альберт Ейнштейн написав у листі до The New York Times: «На думку найкомпетентніших нині математиків, фройляйн Нетер була найзначнішим творчим математичним генієм, якого досі породила вища освіта жінок» [5].

У сучасному світі, де активно розвиваються технології, програмування та штучний інтелект, саме абстрактні математичні структури відіграють ключову роль — і тут її внесок особливо відчутний.

Нетер працювала в надзвичайно складних умовах (гендерна дискримінація, відсутність оплати, політичні переслідування), що робить її біографію особливо надихаючою.

Нетер мала особливий стиль викладання: її семінари часто проходили у формі живих дискусій, під час яких студенти разом з нею розвивали нові ідеї. Саме тому її учні не просто запам'ятовували матеріал, а вчилися мислити як справжні математики.

Також варто відзначити її особисті якості. За спогадами сучасників, Нетер була дуже скромною людиною, яка не прагнула визнання чи нагород. Вона більше раділа самим ідеям і можливості працювати з іншими людьми. Водночас вона була надзвичайно наполегливою: навіть у складних умовах вона не залишала науку.

Її життя показує, що справжній талант і любов до справи можуть подолати будь-які перешкоди. Саме тому історія Еммі Нетер є не лише науковою, а й надихаючою — особливо для тих, хто тільки починає свій шлях у навчанні чи науці.

Таким чином, внесок Еммі Нетер виходить далеко за межі окремих теорем. Вона радикально змінила спосіб мислення в алгебрі, перейшовши від конкретних прикладів до універсальних структур, і її ідеї залишаються фундаментальними в сучасній математиці, фізиці та інформатиці.

**Література**

1. Emmy Noether [Електронний ресурс] // Britannica. – Режим доступу: https://www.britannica.com/biography/Emmy-Noether

2. Byers N. The life and times of Emmy Noether; contributions of E. Noether to particle physics [Електронний ресурс] // arXiv, 1994. – arXiv:hep-th/9411110. – Режим доступу: https://arxiv.org/abs/hep-th/9411110

3. Quigg C. Colloquium: A century of Noether's theorem [Електронний ресурс] // arXiv, 2019. – arXiv:1902.01989. – Режим доступу: https://arxiv.org/abs/1902.01989

4. Celebrate the mathematics of Emmy Noether [Електронний ресурс] // Nature. – 2018. – 12 September. – Режим доступу: https://www.nature.com/articles/d41586-018-06658-w

5. Einstein A. The late Emmy Noether [Електронний ресурс] // The New York Times. – 1935. – 4 May. – Режим доступу: https://www.nytimes.com/1935/05/04/archives/the-late-emmy-noether-professor-einstein-writes-in-appreciation-of.html

***Ю. Л. Мастеров***
*НТУ «ХПІ», м. Харків*
*Науковий керівник* ***А. О. Ткаченко,*** *кандидат технічних наук, доцент кафедри «Автоматизовані електромеханічні системи»*

# ЕДМУНД ЛАНДАУ: ВНЕСОК У РОЗВИТОК АНАЛІТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЯК ОСНОВИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ

Постать Едмунда Георга Германа Ландау (1877–1938) посідає особливе місце в історії світової математичної науки кінця XIX – першої третини XX століття. Будучи одним із найяскравіших представників Геттінгенської математичної школи, він не лише збагатив науку фундаментальними відкриттями, а й докорінно змінив підхід до викладання та викладу математичних дисциплін. Його праці стали еталоном логічної строгості, а введені ним терміни та позначення сьогодні є базовим інструментарієм для кожного студента технічних та математичних спеціальностей [1].

Одним із найбільш значущих досягнень Ландау є популяризація та систематизація асимптотичних позначень, відомих сьогодні як «символи Ландау» або нотація «О-велике» та «о-мале» [2]. Хоча ідея таких позначень частково належала Паулю Бахману, саме Ландау ввів їх у широкий науковий обіг, зробивши їх незамінними для опису швидкості росту функцій. У сучасній науці, зокрема в аналізі складності алгоритмів та обчислювальній техніці, ці символи дозволяють ефективно порівнювати продуктивність програмних систем, що підкреслює актуальність його спадщини через століття. Так, у вбудованих системах (Embedded Systems) пам’ять і тактова частота процесора є жорстко обмеженими [3]. При написанні прошивки для мікроконтролера (наприклад, STM32 або AVR) розробник використовує О-нотацію (Big O notation), наприклад, для вибору алгоритму сортування даних з датчиків робота.

**Таблиця 1 –** Приклади складності О-нотацій в алгоритмах робототехніки

| Нотація | Тип складності | Приклад |
|---|---|---|
| $O(1)$ | Стала | Читання значення з одного датчика |
| $O(\log n)$ | Логарифмічна | Пошук у впорядкованому дереві даних датчиків |
| $O(n)$ | Лінійна | Прохід по масиву даних для пошуку перешкоди |
| $O(n\log n)$ | Лінійно-логарифмічна | Використання швидкого перетворення Фур’є (FFT) |
| $O(n^2)$ | Квадратична | Алгоритми розпізнавання об’єктів |

Окрім суто дослідницької роботи, Едмунд Ландау зробив неоціненний внесок у методологію викладання вищої математики. Його фундаментальна праця «Grundlagen der Analysis» («Основи аналізу»), видана у 1930 році, стала революційною для свого часу [4]. У цій книзі Ландау поставив собі за мету вибудувати всю систему математичного аналізу, починаючи з найпростіших понять про цілі числа, з абсолютною логічною послідовністю, де кожне наступне твердження випливає з попереднього без жодних інтуїтивних припущень. Цей підхід отримав назву «аксіоматичного методу Ландау». Цікаво, що книга була

написана в такому стилі, що в ній практично не було малюнків чи графіків, оскільки автор вважав, що справжнє математичне доведення має бути зрозумілим виключно через текст і формули, не спираючись на візуальну інтуїцію, яка може бути оманливою. Формальні аксіоматичні системи – це основа алгоритмів керування у мехатроніці та робототехніці: алгоритми керування, плани руху, логіка роботи системи мають бути строго визначені математично. Ландау показує, як будувати складні структури з мінімальних аксіом – саме так будується і поведінка автономних роботів.

Особливу увагу вчений приділяв теорії розподілу простих чисел. Його двотомна праця «Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen» стала першою системною спробою викласти теорію аналітичних чисел [2]. Ландау зміг значно спростити та уточнити доведення закону розподілу простих чисел, який раніше був представлений Адамаром та де ла Валле Пуссеном. Крім того, на Міжнародному конгресі математиків у Кембриджі (1912 рік) він сформулював чотири фундаментальні проблеми щодо простих чисел, які сьогодні відомі як «Проблеми Ландау». Ці задачі, серед яких гіпотеза Гольдбаха та питання про нескінченність пар простих чисел-близнюків, досі залишаються нерозв'язаними, стимулюючи розвиток нових методів у сучасній математиці.

Найбільш прямий зв'язок між теорією простих чисел і програмуванням – це криптографія. Сучасні робототехнічні системи та пристрої мехатроніки (IoT, безпілотники, промислові маніпулятори) обмінюються даними через інтернет. Захист каналів зв'язку: асиметричне шифрування (наприклад, RSA) базується на складності розкладання великих чисел на прості множники. Безпека керування дроном чи роботизованим хірургом тримається на властивостях простих чисел, які досліджував Ландау. Фундаментальна строгість Ландау лежить в основі сучасних алгоритмів цифрової обробки сигналів (DSP), методів частотного аналізу, спектральних перетворень і фільтрації сигналів у безпілотниках, автономних мобільних роботах та маніпуляторах [3].

Стиль Ландау заслуговує на окрему увагу. У науковому світі існує термін «Landau-Stil», що характеризується граничною стислістю та виключенням будь-якого тексту, який не є частиною логічного доведення [4]. Його підручники побудовані за суворим принципом «Визначення – Теорема – Доведення». Він вважав, що математика повинна бути очищена від зайвої риторики, що робило його книги складними для початківців, але надзвичайно цінними для професійних дослідників та інженерів.

**Література**

1. Hardy G.H. and Heilbronn H. Edmund Landau. Journal of the London Mathematical Society, pp. 302-310.

2. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: B. G. Teubner, 1909. 1058 p.

3. White, E. Making Embedded Systems: Design Patterns for Great Software. 2nd ed. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, 2024. 428 p.

4. Landau E. Grundlagen der Analysis. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1930. 134 p.

***В. В. Попов***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

## ЕМАНУЇЛ ЛАСКЕР – УНІВЕРСАЛЬНИЙ ГЕНІЙ ТА БАГАТОГРАННА ОСОБИСТІСТЬ

Емануїл Ласкер (1868-1941) народився у прусській провінції Бранденбург у єврейській родині. Він був багатогранною особистістю, яка досягла значних успіхів у декількох напрямках: шахах, математиці та філософії [1]. Найбільше він відомий як другий чемпіон світу з шахів. Е. Ласкер утримував цей титул рекордні двадцять сім років (1894–1921), що є безпрецедентним результатом в історії [2]. Проте, слід зазначити, що шахова дошка була не єдиною сферою, де виявив себе його геній.



**Рисунок 1** – Емануїл Ласкер (перший зліва за столом) за грою в Го.
*Джерело: The surrounding game. Режим доступу: https://xpertchesslessons.wordpress.com/tag/go-seigen/*

В 11 років Е. Ласкер переїхав в Берлін до свого брата Бретольда, який вивчав там медицину. Саме брат навчив майбутнього генія грі в шахи, яка настільки захопила юнака, що батьки, занепокоєні його успішністю в школі, у 1887 році змусили його тимчасово повернутися додому [1]. Проте потяг до знань виявився сильнішим.

Фундаментальну наукову освіту Е. Ласкер здобув у провідних освітніх центрах тогочасної Європи. У 1888 році він вступив на філософський факультет Берлінського університету імені Фрідріха-Вільгельма, де протягом п’яти

семестрів опановував вищу математику. Під керівництвом Леопольда Кронекера та Лазаруса Фукса він опановував вищу математику, також він глибоко вивчав аналітичну механіку.

Прагнучи подальшого наукового зростання, у 1890 році Е. Ласкер переїхав до Геттінгена – тодішньої «столиці математики» [3]. Там він продовжив навчання, відвідуючи лекції Фелікса Клейна, Артура Шенфліса та Германа Шварца, що остаточно сформувало його як науковця-дослідника [1].

Спортивні успіхи Ласкера йшли паралельно з науковими. В 1889 році він виграв свій перший турнір в Берліні, і недовго по тому – головний турнір в місті Бреслау, який приніс йому німецьке звання майстра.

Протягом 1890-1900-х років Е. Ласкер перебував у Великій Британії та США, де зосередився на професійній шаховій кар'єрі. Саме в цей період він здобув титул чемпіона світу (1894), що згодом забезпечило йому фінансову стабільність для повернення до фундаментальних наукових досліджень. В 1900 році він успішно захистив докторську дисертацію «Über Reihen auf der Convergenzgrenze» (Про ряди на межі збіжності) під керівництвом Макса Нетера — одного з фундаторів алгебраїчної геометрії [4]. Саме цей науковий тандем став початком дивовижної інтелектуальної естафети.

Розвиваючи ідеї свого вчителя, Ласкер у 1905 році опублікував фундаментальну працю «Zur Theorie der Moduln und Ideale», де вперше довів теорему про розклад ідеалів у кільцях многочленів [5].

Ця робота стала тим містком, який поєднав два покоління родини Нетерів: через шістнадцять років донька Макса — видатна математикиня Еммі Нетер — блискуче узагальнила результати учня свого батька для ширшого класу алгебраїчних структур. Так народилася знаменита теорема Ласкера–Нетер, яка сьогодні є наріжним каменем сучасної комутативної алгебри. Емануїл Ласкер у цій історії виявився не просто «математиком-аматором» серед шахістів, а ключовою фігурою, яка передала імпульс від класичної геометрії XIX століття до абстрактної алгебри століття двадцятого

Після захисту дисертації Е. Ласкер намагався отримати посаду викладача математики в університеті, але його зусилля в цьому напрямку як в Німеччині, так і в США, де він жив з 1902 року, були марними. Через це він був змушений заробляти на життя грою, але саме математика була для нього на першому плані.

Окрім математики, Ласкер залишив слід у філософії та теорії ігор. Його праця «Kampf» (1907) аналізує стратегію боротьби як загальну життєву концепцію [6]. Математичний склад розуму дозволив йому створювати й власні ігри, зокрема «Ласку» (шашки Ласкера). Детальний опис цієї гри та її стратегічних принципів автор навів у своїй пізній праці «Brettspiele der Völker» (1931) [7]. Унікальні правила «полону» фігур у «Ласці» практично виключають можливість нічиєї, перетворюючи партію на чистий математичний розрахунок, що ще раз підкреслює універсальність генія Ласкера як науковця та ігрового стратега.

Отже, Емануїл Ласкер є взірцем універсальної особистості, чия спадщина поєднує логіку шахової гри з фундаментальною математичною строгістю та філософським осмисленням світу.

**Література**

1. Emanuel Lasker [Electronic resource] / J. J. O'Connor, E. F. Robertson // MacTutor History of Mathematics Archive. – University of St Andrews, Scotland. – Mode of access: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lasker/ (date of access: 30.03.2026).

2. Emanuel Lasker: Denker, Weltenbürger, Schachweltmeister [Electronic resource] // Emanuel Lasker Gesellschaft. – Mode of access: https://lasker-gesellschaft.de/publikation/emanuel-lasker-denker-weltenbuerger-schachweltmeister/ (date of access: 30.03.2026).

3. Emanuel Lasker – Mathematiker des Monats [Electronic resource] // Berlin Mathematical School (BMS). – Mode of access: https://www.math.berlin/mathematiker/emanuel-lasker.html (date of access: 30.03.2026).

4. Lasker E. Über Reihen auf der Convergenzgrenze. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. 1901. Vol. 196. P. 431–477. [Electronic resource]. Mode of access: https://doi.org/10.1098/rsta.1901.0009 (date of access: 30.03.2026).

5. Lasker E**.** Zur Theorie der Moduln und Ideale. *Mathematische Annalen*. 1905. Vol. 60, No. 1. P. 20–116. [Electronic resource]. Mode of access: https://api.semanticscholar.org/ CorpusID:120367750 (date of access: 30.03.2026).

6. Lasker E. Kampf. — New York : Lasker’s Publishing Co, 1907. — 96 p. [Electronic resource]. Mode of access: https://archive.org/details/kampf00lask (date of access: 30.03.2026).

7. Lasker E. Brettspiele der Völker. — Berlin : August Scherl, 1931. — 248 S. [Electronic resource]. Mode of access: https://repository.moz.ac.at/obvumsifs/download/pdf/7934988 (date of access: 30.03.2026).

***Б. С. Цибань***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

## ВНЕСОК КАРЛА РУНГЕ У РОЗВИТОК ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Карл Давід Тольме Рунге (1856–1927) був видатним німецьким математиком і фізиком, чиї дослідження заклали фундамент сучасної прикладної математики (рис. 1). Його науковий шлях розпочався в Берлінському університеті під керівництвом Карла Веєрштрасса, де він захистив дисертацію з диференціальної геометрії. Проте справжнє визнання Рунге здобув завдяки розробці алгоритмів, що дозволяють розв’язувати складні математичні задачі за допомогою арифметичних наближень [1].

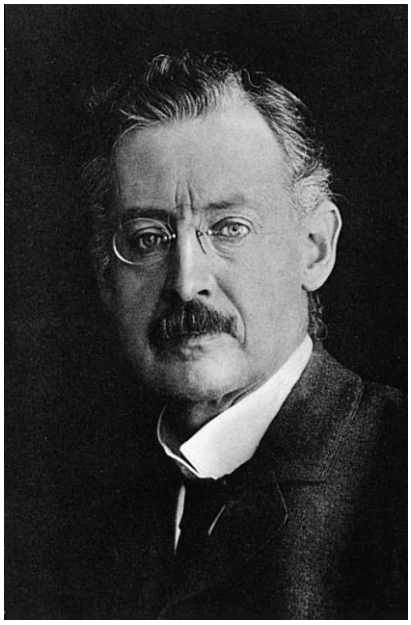


**Рисунок 1** – Карл Давід Тольме Рунге (1856–1927) у похилому віці. Автор фото: Peter Matzen (колекція Voit). Джерело: Wikimedia Commons — https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Voit_202_Karl_Runge.jpg

Найбільш відомим результатом його діяльності є розробка (спільно з Мартіном Куттою) сімейства ітераційних методів для чисельного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності сьогодні є «золотим стандартом» в інженерних розрахунках, аеродинаміці та комп’ютерному моделюванні складних динамічних систем [1–2]. Важливим внеском у теорію наближень став опис «феномену Рунге» — проблеми погіршення точності при інтерполяції поліномами високих степенів на рівновіддалених вузлах, що стимулювало розвиток сплайн-інтерполяції.

Окрім обчислювальної математики, Рунге зробив вагомий внесок у спектроскопію та астрофізику. Працюючи в Геттінгені разом з Феліксом Клейном, він очолив першу в Німеччині кафедру прикладної математики. Він досліджував спектральні лінії хімічних елементів і виявив закономірності в їх розташуванні (зокрема в спектрі гелію), що мало критичне значення для

становлення квантової механіки та атомної фізики на початку XX століття [3]. У математичному аналізі фундаментальною залишається «теорема Рунге» про можливість апроксимації голоморфних функцій раціональними [4].

Цікавим аспектом його біографії є те, що Рунге активно пропагував використання математики в практичних цілях, що на той час було рідкістю для консервативної німецької академічної школи. Він вірив, що математична теорія лише тоді є завершеною, коли вона пропонує ефективний і швидкий спосіб отримання конкретного числового результату для потреб природознавства та техніки.

Особистість Карла Рунге також відіграла значну роль у формуванні інтелектуального середовища тієї епохи. Його донька, Ірис Рунге, стала однією з перших жінок-математиків у промисловості, а інша донька, Гертруда, вийшла заміж за видатного фізика Макса Борна. Це родинне коло було осередком наукових дискусій, де ідеї математичної точності Рунге переплітались з новітніми концепціями квантової теорії [5]. Навіть у похилому віці Рунге зберігав високу наукову активність і цікавість до нових відкриттів, зокрема, в астрономії та космології.

Спадщина вченого живе не лише в алгоритмах обчислювальної техніки. Його ім’ям названо кратер на Місяці [6] та астероїд 11853 Runge [7]. Сучасні суперкомп’ютери, що моделюють кліматичні зміни або рух космічних апаратів, фактично працюють на вдосконалених версіях тих самих ітераційних схем, які Карл Рунге запропонував понад століття тому. Таким чином, він став тим «містком», який з’єднав абстрактну математику XIX століття з епохою цифрових технологій.

**Література**

1. Runge C. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen // Mathematische Annalen. – 1895. – Bd. 46. – S. 167–178. – Режим доступу: https://eudml.org/doc/157756

2. Butcher J. C. A history of Runge-Kutta methods // Applied Numerical Mathematics. – 1996. – Vol. 20, № 3. – P. 247–260. – Режим доступу: https://people.cs.vt.edu/~asandu/Public/Qual2011/DiffEqn/Butcher_1996_RK-history.pdf

3. Runge, Carl David Tolme // Springer Nature Reference. – 2016. – Режим доступу: https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-1-4419-9917-7_1197

4. Fornaess J. E., Forstnerič F. Holomorphic approximation: the legacy of Weierstrass, Runge, Oka-Weil, and Mergelyan [Електронний ресурс] // arXiv, 2018. – arXiv:1802.03924. – Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1802.03924

5. Tobies R. Iris Runge: A life at the crossroads of mathematics, science, and industry. – Basel: Birkhäuser, 2012. – 481 p.

6. International Astronomical Union (IAU). Runge // Gazetteer of Planetary Nomenclature / NASA / USGS Astrogeology Science Center. – Режим доступу: https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/5223

7. JPL Small-Body Database. 11853 Runge // NASA Jet Propulsion Laboratory. – Режим доступу: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=11853

***І. С. Недодаєв***
*Херсонський аграрно-економічний університет*
*Науковий керівник* ***Т. П. Білоусова****, старший викладач кафедри менеджменту, маркетенгу та інформаційних технологій*

## ВНЕСОК ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО У РОЗВИТОК СУЧАСНОЇ НАУКИ

*1 квітня* всі, хто причетний до «цариці наук», відзначають *День математика*. Точне походження цієї дати невідоме, як і ім’я ініціатора свята, однак це жодним чином не зменшує його значення для наукової спільноти. Для математиків це ще одна нагода відчути єдність професії, обмінятися ідеями та згадати про красу й силу точних наук. Це неофіційне свято є чудовим приводом звернутися до найвидатніших математичних відкриттів людства, осмислити досягнення науки та вшанувати постаті, які зробили вагомий внесок у її розвиток. Особливу гордість викликають українські математики, чиї імена відомі у всьому світі: Марина В'язовська, Михайло Остроградський, Георгій Вороний, Михайло Кравчук, Стефан Банах, МиколаБоголюбов, Віктор Глушков та багато інших. Їхні праці стали фундаментом для розвитку сучасної науки, інформаційних технологій, економіки та інженерії. День математика — це не лише професійне свято, а й нагадування про те, що математика є універсальною мовою, яка допомагає людству пізнавати світ і формувати майбутнє.

У статті досліджено роль математичних відкриттів у розвитку сучасної науки та технологій. Особливу увагу приділено науковій спадщині Георгія Вороного — видатного українського математика, який зробив фундаментальний внесок у геометрію чисел і просторовий аналіз [1]. Створив діаграми , за допомогою яких посприяв для розвитку сучасних інформаційних технологій, економіки й природничих наук [2].

Математика відіграє ключову роль у розвитку людської цивілізації, оскільки саме вона забезпечує інструментарій для аналізу, моделювання та прогнозування процесів у різних сферах діяльності. Особливо важливими є ті математичні відкриття, які мають універсальний характер і можуть застосовуватися в багатьох галузях науки. У сучасних умовах цифровізації економіки та суспільства особливої актуальності набувають методи просторового аналізу. Одним із таких універсальних інструментів є діаграми Вороного, які він запропонував [2].

Георгій Вороной народився 28 квітня 1868 року на території сучасної України. Його батько був освіченою людиною та сприяв розвитку інтересу сина до науки з раннього віку. Ще у шкільні роки Вороной виявив виняткові здібності до математики, що визначило його подальший життєвий шлях. Вищу освіту він здобув у Санкт-Петербурзькому університеті, де навчався під керівництвом видатних математиків того часу. Його наукові інтереси формувалися під впливом розвитку теорії чисел та аналітичних методів. Після завершення навчання він працював у провідних навчальних закладах, зокрема у Варшавському університеті, де займався викладацькою та науковою діяльністю. Саме в цей період він зробив свої найважливіші відкриття. Незважаючи на складні історичні умови, коротке життя (він помер у 1908 році), наукова спадщина Вороного стала основою для розвитку цілого напряму в математиці [1].

Роботи Георгія Вороного стали важливим етапом у розвитку геометрії чисел. Його дослідження стосувалися розподілу точок у просторі та властивостей числових структур. Основним досягненням вченого стало створення методу розбиття простору, який дозволяє визначити області впливу заданих точок. Цей метод отримав назву діаграм Вороного [2]. Подальший розвиток його ідей дозволив сформувати нові підходи до аналізу геометричних структур і сприяв розвитку обчислювальної геометрії [3]. Цей підхід дозволяє: моделювати просторові процеси; аналізувати структури розподілу; оптимізувати розміщення об’єктів. Діаграми Вороного стали фундаментом для розвитку: обчислювальної геометрії; теорії оптимізації; математичного моделювання; теорії графів [3]. Вони також тісно пов’язані з тріангуляцією Делоне, що розширює їх практичне застосування.

У сучасних умовах діаграми Вороного широко використовуються у різних галузях.

***Інформаційні технології.*** Вони застосовуються у комп’ютерній графіці, обробці зображень та штучному інтелекті [2]. Зокрема, використовуються для побудови тривимірних моделей і аналізу просторових даних.

*Економіка.* В економічних дослідженнях діаграми Вороного використовуються для аналізу ринкових зон, розподілу ресурсів і моделювання конкурентного середовища.

***Географія та урбаністика.*** Метод дозволяє оптимізувати розміщення інфраструктури, аналізувати транспортні мережі та планувати розвиток територій.

***Природничі науки.*** У біології вони застосовуються для моделювання клітинних структур, а у фізиці — для опису розподілу частинок [3] .

У XXI столітті значення діаграм Вороного значно зросло завдяки розвитку цифрових технологій. Вони активно використовуються у: геоінформаційних системах; аналізі великих даних; машинному навчанні; робототехніці [2]. Це підтверджує універсальність відкриття та його адаптивність до нових умов розвитку науки.

Математичні відкриття є основою розвитку науки й технологій. Внесок Георгія Вороного демонструє, як фундаментальні ідеї мають глобальний вплив.

Його діаграми стали базою сучасного просторового аналізу в різних галузях. Попри коротке життя, вчений залишив значну спадщину, що й нині визначає розвиток науки й суспільства.

**Література**

1. Вороний Г. Ф. Зібрання творів: у 3 т. – К.: Наукова думка, 1952. – 512 с.
2. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams**.** – 2nd ed. – Chichester: Wiley, 2000. – 671.
3. Aurenhammer F. Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure // *ACM Computing Surveys*. – 1991. – Vol. 23(3). – P. 345–405.

***Д. Г. Мішина***
*Одеський ліцей№82 Одеської міської ради*
*Науковий керівник* ***Н. Д. Худік****, вчитель математики*

## ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛІ

Закон великих чисел (ЗВЧ), сформульований Якобом Бернуллі, є однією з ключових теорем теорії ймовірностей (доведений у 1713 р.). Він стверджує, що за великої кількості незалежних випробувань відносна частота настання події наближається до її теоретичної ймовірності. Інакше кажучи, зі зростанням числа спроб зменшується ймовірність суттєвого відхилення частоти від очікуваного значення.

Ця теорема лежить в основі статистичного підходу до визначення ймовірності, тобто дозволяє оцінювати ймовірність події за її частотою в серії експериментів. Водночас заздалегідь передбачити, яке саме значення набуде випадкова величина, неможливо. Хоча певна інформація про неї існує, виявлення закономірностей її поведінки часто є складним завданням.

Внесок Якоба Бернуллі у розвиток цієї теорії є надзвичайно важливим. Йому належить доведення закону великих чисел у найпростішому випадку незалежних випробувань. По суті, його теорема є прикладом граничного твердження, яке набуває змісту лише при великих значеннях основного параметра — кількості спостережень. У сучасній теорії ймовірностей граничні теореми та їх узагальнення становлять одну з найважливіших частин науки, а теорема Бернуллі вважається їх вихідною основою.

Практичне значення закону великих чисел було високо оцінене як сучасниками Бернуллі, так і наступними поколіннями науковців. Він фактично став містком між теоретичними положеннями та практичними застосуваннями. У більшості випадків теорія ймовірностей не дозволяє безпосередньо визначити значення ймовірностей або пов’язаних із ними величин. Тому такі параметри доводиться встановлювати експериментально, спираючись саме на закон великих чисел.

Важливо підкреслити, що закладені Бернуллі основи використання теорії ймовірностей у різних сферах, зокрема в економіці, мають велике значення. У своїй праці «Мистецтво припущень» він довів теорему про великі числа та розглянув два ключові питання: як співвідносяться практичні результати з теоретичними, і чи можна, навпаки, визначити теоретичну ймовірність на основі експериментальних даних. Протягом багатьох років досліджень він довів, що при багаторазовому киданні грального кубика частка випадків випадіння, наприклад, чотирьох очок, буде наближатися до 1/6. Сам учений назвав це відкриття «золотою теоремою», хоча нині воно відоме як закон великих чисел.

У економіці та соціально-економічній статистиці закон великих чисел проявляється як один із фундаментальних об'єктивних законів, що визначають закономірності масових процесів. Наприклад, для оцінки доходів населення певної країни «Х» можна розглянути вибірку: із 20 осіб 15 мають дохід 50 000, а 5 — 300 000. Середній дохід становитиме (15·50000+5·300000)/20=112500, що не відображає реальної ситуації. Якщо ж збільшити кількість спостережень до 500 (400 осіб із доходом 50 000 і 100 — 300 000), середній дохід дорівнюватиме (400·50000+100·300000)/500=100000, що вже значно точніше характеризує реальний рівень. Отже, зі збільшенням обсягу вибірки середнє значення наближається до істинного.

Розглянемо інший приклад. Нехай імовірність викрадення автомобіля певної марки вартістю 700 000 становить 0,06 на рік (тобто приблизно 6 із 100 автомобілів викрадаються). Ця ймовірність існує для кожного власника. Якщо людина прагне самостійно убезпечити себе від такого ризику, їй доведеться накопичити повну суму — 700 000. Однак якщо 1000 власників об'єднаються і створять страховий фонд, то, згідно із законом великих чисел, очікується близько 60 викрадень. У цьому випадку кожен учасник має внести (700000·60)/1000=42000. За відносно невеликий внесок кожен отримує гарантію повної компенсації у разі втрати, що є вигідним для всіх.

Таким чином, закон великих чисел демонструє свою універсальність і практичну цінність, підтверджуючи важливість цього розділу навіть у повсякденному житті.

## Література

1. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. - Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. – 190 с.

2. Тичинська Л. М., Черепащук А. А. Теорія ймовірностей. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості. Вінниця : ВНТУ, 2010. 112 с.

***Х. М. Петрушка***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук****, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## АЛГОРИТМ ЕВКЛІДА ТА ЙОГО РОЛЬ У СУЧАСНІЙ КРИПТОГРАФІЇ

Алгоритм Евкліда є одним із найдавніших і водночас найбільш фундаментальних алгоритмів теорії чисел, що знайшов широке застосування в сучасних інформаційно-комунікаційних технологіях. Його основне призначення - ефективне обчислення найбільшого спільного дільника (НСД) двох цілих чисел. Оскільки більшість сучасних асиметричних криптосистем і протоколів безпеки базуються на концепціях модульної арифметики, операція знаходження НСД та пов'язані з нею обчислення є фундаментальною основою для забезпечення конфіденційності, цілісності та автентичності даних.

НСД двох цілих чисел визначається як найбільше ціле число, що ділить обидва вихідні числа без остачі. За визначенням, якщо одне з чисел дорівнює нулю, а інше відмінне від нуля, їхнім НСД є друге число; якщо ж обидва числа дорівнюють нулю, результат не визначений.

В основі класичного алгоритму Евкліда лежить послідовне обчислення остач від ділення, яке триває доти, доки остача не стане рівною нулю. Остання ненульова остача і є шуканим НСД.

*Приклад:* Знайдемо НСД(252, 198):

1. $252 = 198 \times 1 + 54$ (остача 54)
2. $198 = 54 \times 3 + 36$ (остача 36)
3. $54 = 36 \times 1 + 18$ (остача 18)
4. $36 = 18 \times 2 + 0$ (остача 0)

Оскільки остання ненульова остача дорівнює 18, то НСД(252, 198) = 18.

Розширений алгоритм Евкліда дає змогу не лише знайти НСД($a, b$), а й обчислити такі цілі коефіцієнти $x$ та $y$ (співвідношення Безу), для яких виконується рівність:

$a \cdot x + b \cdot y = \text{НСД}(a, b)$

Бінарний алгоритм Евкліда (алгоритм Штейна) є модифікацією для прискореного обчислення НСД на обчислювальних машинах без використання трудомістких операцій ділення. Він замінює ділення на бітові зсуви (ділення на 2), віднімання та перевірку парності, що суттєво оптимізує апаратну реалізацію в смарт-картах та IoT-пристроях. Алгоритм базується на таких властивостях:

- $\text{НСД}(2a, 2b) = 2 \cdot \text{НСД}(a, b)$
- $\text{НСД}(2a, 2b + 1) = \text{НСД}(a, 2b + 1)$
- $\text{НСД}(-a, b) = \text{НСД}(a, b)$

Ключові сфери застосування в криптографічних системах:

1. Обчислення модульного оберненого елемента є ключовою операцією в

асиметричній криптографії. Модульним оберненим до числа $a$ за модулем $m$ є таке число $x$, що задовольняє порівняння: $a \cdot x \equiv 1 \pmod{m}$. Зазначене $x$ існує тоді й лише тоді, коли НСД($a$, $m$) = 1. Звівши співвідношення Безу $a \cdot x + m \cdot y = 1$ за модулем $m$, отримуємо саме шукане $x$, яке обчислюється через розширений алгоритм Евкліда.

2. Генерація ключової інформації у криптосистемі RSA:

1) При виборі відкритої експоненти $e$ класичний алгоритм Евкліда застосовується для перевірки умови взаємної простоти з функцією Ейлера: НСД($e$, $\varphi(n)$) = 1.

2) Для обчислення секретної експоненти $d$, яка задовольняє умову $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, використовується розширений алгоритм Евкліда.

3. Електронні цифрові підписи (DSA, ECDSA): Під час підписання повідомлень виникає потреба обчислення значення $k^{-1} \pmod{q}$ для одноразового числа $k$. Без розширеного алгоритму Евкліда генерація та перевірка цифрових підписів є неможливою.

4. Криптографія на еліптичних кривих (ECC): Додавання та подвоєння точок на еліптичній кривій над скінченним полем $F_p$ потребує обчислення нахилу дотичної/січної, що зводиться до ділення за модулем простого числа $p$ шляхом знаходження модульного оберненого елемента.

## Література

1. Ковальчук Л.В., Маслова Н.О. Математичні методи криптографії. Електронний навчальний посібник. – Дрогобич: ДВНЗ «ДонНТУ», 2024. – 146с

2. Попович Р. О., Ємець В. Ф. Математичні методи криптографії та кібербезпеки. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*. 2021. Т. 32 (71), № 2. С. 84–89.

3. Шевченко А. І., Мельник Р. М. Аналіз застосування алгебри та алгебраїчних структур у захисті інформації. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія: Математика і інформатика. 2023. Вип. 42, № 1. С. 112–119.

4. Extended Euclidean Algorithm and Modular Inverses in Public Key Cryptography. *EITCA Academy*. 2024. URL: https://uk.eitca.org/cybersecurity

***Д. О. Батюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ: ВІД НЬЮТОНА ДО СУЧАСНОСТІ

У тезах розглянуто історичні передумови виникнення диференціального числення, внесок Ісаака Ньютона та Готфріда Вільгельма Лейбніца у формування його основ, а також основні етапи розвитку математичного аналізу. Показано роль диференціального числення у становленні сучасної науки й техніки та окреслено його значення для математичного моделювання природних і технічних процесів.

Диференціальне числення є одним із найважливіших досягнень світової математичної науки. Його виникнення стало переломним етапом у розвитку математики, оскільки надало універсальний інструмент для дослідження змінних величин, швидкостей зміни процесів, побудови математичних моделей та розв'язування широкого кола прикладних задач. Сьогодні методи диференціального числення застосовуються не лише в математиці, а й у фізиці, механіці, економіці, біології, інформатиці та інженерії.

Передумови створення диференціального числення формувалися протягом багатьох століть. Ще античні математики Евдокс і Архімед використовували метод вичерпування для знаходження площ і об'ємів, який став одним із попередників математичного аналізу. Значний внесок у розвиток ідей нескінченно малих величин зробили Йоганн Кеплер, Бонавентура Кавальєрі, П'єр Ферма та Рене Декарт, праці яких підготували науковий ґрунт для появи нової математичної теорії.

Засновниками диференціального числення вважають Ісаака Ньютона та Готфріда Вільгельма Лейбніца, які майже одночасно, але незалежно один від одного, створили основи нового математичного методу. Ньютон розробив теорію флюксій, у якій досліджував швидкість зміни фізичних величин у часі. Його підхід був тісно пов'язаний із задачами механіки та астрономії. Лейбніц, навпаки, запропонував універсальну математичну символіку, яка використовується й сьогодні: позначення $dx$, $dy$ та знак інтеграла $\int$ . Саме завдяки зручності запису система Лейбніца стала загальноприйнятою у світовій математичній практиці.

Наприкінці XVII - на початку XVIII століття між прихильниками Ньютона і Лейбніца виникла відома суперечка щодо першості відкриття диференціального числення. Проте сучасна історія науки визнає незалежність їхніх досліджень та рівнозначний внесок обох учених у створення математичного аналізу. Їхні праці заклали фундамент для подальшого розвитку багатьох розділів математики та природничих наук.

Подальший розвиток диференціального числення пов'язаний із працями Леонарда Ейлера, Жозефа Луї Лагранжа, Огюстена Луї Коші, Бернгарда Рімана та Карла Вейєрштраса. У XVIII–XIX століттях було сформовано строгі означення границі, неперервності та похідної, що забезпечило логічне обґрунтування математичного аналізу. Саме тоді диференціальне числення перетворилося на завершену математичну теорію, яка стала основою сучасної вищої математики.

У XX-XXI століттях сфера застосування диференціального числення значно розширилася. Воно використовується при побудові математичних моделей фізичних процесів, дослідженні динамічних систем, створенні алгоритмів оптимізації, розробленні технологій штучного інтелекту, комп'ютерної графіки та машинного навчання. Методи похідних лежать в основі чисельного аналізу, математичного моделювання та прогнозування складних процесів, що підтверджує їхню актуальність у сучасній науці та техніці.

Можна вважати, що виникнення диференціального числення стало одним із найвизначніших етапів розвитку світової науки і стало мовою, якою описується природа. Сьогодні ці методи є критично важливими для алгоритмів штучного інтелекту та машинного навчання, моделювання процесів у квантовій фізиці та космології, а також для прогнозування фінансових ринків та оптимізації інвестиційних портфелів.

Таким чином, диференціальний підхід залишається найпотужнішим інструментом пізнання світу - від мікрочастинок до космічних масштабів.

**Література**

1. Гребенюк О. В., Клименко В. Г., Дяченко О. М., Тітова Л. І. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навчальний посібник. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2014. 244 с.

2. Горевич О. А. Історія виникнення диференціального числення. Суперечка між І. Ньютоном та Г. В. Лейбніцем // Наукові записки молодих учених. 2018.

3. Федоровська К. П. Готфрід Лейбніц і створення диференціального числення // Могилянський математичний журнал. 2025. Т. 8. С. 3-5.

***Д. Р. Рівняк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Л. Чопик****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНИЙ КОД ВЕЛИКОДНЯ: ЯК ГАУСС ПРИБОРКАВ ЧАС

Визначення дати Великодня є однією з найдавніших та найскладніших хронологічних задач, оскільки це рухоме свято об'єднує в собі кілька незалежних астрономічних і календарних чинників: тривалість сонячного року, фази місячного циклу та семиденну структуру тижня. Згідно з канонічними правилами, Великдень святкується у першу неділю після першої повні, що настає після дня весняного рівнодення (21 березня). Історично для цього процесу створювалися пасхалії — величезні, громіздкі таблиці, ручні розрахунки за якими вимагали значних зусиль і супроводжувалися високим ризиком помилок через численні календарні винятки та неоднорідність календарів.

Видатний математик Карл Фрідріх Гаусс запропонував революційний підхід, замінивши багатовікові табличні масиви стрункою та компактною математичною моделлю. Його метод повністю базується на послідовності простих арифметичних операцій із залишками (modulo), що дозволило звести складну астрономічну задачу до детерміністичного числового алгоритму стрічкової логіки.

Мета дослідження: детально проаналізувати логіку алгоритму Гаусса, розкрити сутність його проміжних параметрів та продемонструвати практичну ефективність методу через обчислення конкретної дати свята і його програмну імплементацію.

Суть методу Гаусса полягає у взаємодії залишків від ділення на ключові календарні періоди. Розрахунковий процес розбивається на кілька послідовних етапів:

1. Розрахунок циклічних позицій: обчислюються змінні, де a = рік/19 відображає позицію року в 19-річному Метоновому місячному циклі (період, за який фази Місяця повертаються на ті самі календарні дні); b = рік/4 враховує чотирирічний цикл високосних років для корекції календарного зсуву; c = рік/7 визначає позицію року в тижневому циклі.

2. Обчислення місячної поправки: за формулою d = (19a + 15)/30 визначається зміщення дня повного Місяця. Числові коефіцієнти є константами, адаптованими під специфіку юліанського чи григоріанського календарів.

3. Обчислення тижневого зсуву: параметр e = (2b + 4c + 6d + 6) / 7 визначає, скільки днів необхідно додати до знайденої повні, щоб отримати найближчу неділю.

4. Фінальний синтез: інтегральний зсув визначається як сума s = d + e. Залежно від реалізації формули, вираз (s - 9) вказує на день квітня, а якщо значення є від'ємним або нульовим, розрахунок автоматично переноситься на березень (через конструкцію 31 + day).

Важливою перевагою алгоритму Гаусса є його універсальність, оскільки, він залишається точним для будь-якого історичного чи майбутнього року.

Як наочний приклад розглянемо розрахунок для 2026 року.

Нехай $Y = 2026$

**1. Знаходимо остачі**

$$a = Y \bmod 19 = 2026 \bmod 19 = 12$$
$$b = Y \bmod 4 = 2026 \bmod 4 = 2$$
$$c = Y \bmod 7 = 2026 \bmod 7 = 3$$

**2. Обчислюємо число d**

$$d = (19a + 15) \bmod 30$$
$$d = (19 \cdot 12 + 15) \bmod 30$$
$$d = (228 + 15) \bmod 30$$
$$d = 243 \bmod 30 = 3$$

**3. Обчислюємо число e**

$$e = (2b + 4c + 6d + 6) \bmod 7$$
$$e = (2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6) \bmod 7$$
$$e = (4 + 12 + 18 + 6) \bmod 7$$
$$e = 40 \bmod 7 = 5$$

**4. Знаходимо дату Великодня**

$$22 + d + e = 22 + 3 + 5 = 30$$

Оскільки число не перевищує 31, то Великдень за юліанським календарем:
30 березня

**5. Переведення на григоріанський календар**

У XX–XXI століттях різниця між календарями становить 13 днів:

$$30 \text{ березня} + 13 \text{ днів} = 12 \text{ квітня}$$

Завдяки відсутності складних розгалужень, цей алгоритм ідеально підходить для автоматизації. Програмна імплементація на мові Python дозволяє за допомогою всього кількох рядків коду миттєво обчислювати дату для будь-якого року без залучення сторонніх календарних бібліотек.

Висновок. Алгоритм Карла Фрідріха Гаусса є витонченим прикладом математичного моделювання, що перетворило емпіричні астрономічні спостереження та заплутані історичні правила на чітку цифрову структуру. Поєднання модульної арифметики з календарними циклами демонструє тріумф логіки, роблячи цей метод компактним, легким для розуміння та незамінним для сучасних програмних застосувань.

**Література**

1. Про старий та новий стилі // Інформатика. 2008. № 20 (114). С. 14–16.

2. Як обчислюють дату Великодня // Урядовий кур'єр.

3. Алгоритм Гаусса обчислення дати Великодня // Вікіпедія : вільна енциклопедія. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Гаусса_обчислення_дати_Великодня

***Ю. В. Галайко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## НАЙВАЖЛИВІШІ ВІДКРИТТЯ В ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

Математика посідає особливе місце в системі наук, адже саме вона формує універсальну мову опису світу та забезпечує інструменти для пізнання закономірностей природи й суспільства. Її історія - це не просто послідовність відкриттів, а глибока еволюція людського мислення: від конкретного до абстрактного, від інтуїтивного сприйняття до строгої логічної побудови знання. Ключові математичні ідеї не лише розширювали межі науки, а й визначали нові способи осмислення реальності.

Першим фундаментальним етапом став античний період, коли відбувся принциповий злам у підходах до знання - перехід від інтуїтивних спостережень до логічно обґрунтованої системи доказів. Визначальну роль у цьому процесі відіграв Піфагор та його школа, які вперше поставили вимогу логічного обґрунтування кожного твердження. Суть їхнього методу полягала не просто у встановленні фактів, а у побудові послідовного доведення, де кожен крок випливає з попереднього. Саме такий підхід заклав основи аксіоматичного мислення, яке й сьогодні є фундаментом математичної науки. Класичним прикладом є співвідношення між сторонами прямокутного трикутника:

$a^2 + b^2 = c^2$. Значення цього відкриття полягає не лише в самій формулі, а в утвердженні нового стандарту істини: математичне знання має бути доведеним, універсальним і незалежним від досвіду.

Наступним важливим етапом стало формування алгебри як універсальної мови рівнянь і перетворень. Значний внесок у цей процес зробив Аль-Хорезмі, який у своїй праці систематизував правила розв'язування лінійних і квадратних рівнянь, фактично вперше описавши їх у вигляді узагальнених алгоритмічних процедур. Його підхід передбачав послідовне виконання чітко визначених кроків, що дозволяло отримувати розв'язок без прив'язки до конкретних числових прикладів. Саме від латинізованої форми його імені походить термін «алгоритм», який сьогодні означає універсальний набір формальних правил обробки інформації. Таким чином, алгебра стала не лише розділом математики, а й фундаментальним інструментом формалізації та моделювання реальних процесів.

Революційний прорив у розвитку математичної думки відбувся у XVII столітті з появою математичного аналізу, який незалежно один від одного розробили Ісаак Ньютон та Готфрід Вільгельм Лейбніц. Основними поняттями цього напряму стали похідна та інтеграл, які дозволили математично описувати зміни величин у часі. Наприклад, стало можливим точно визначати швидкість як зміну положення тіла та прискорення як зміну швидкості. Це відкриття дало змогу переходити від статичного опису об'єктів до аналізу їхнього руху та розвитку. Математичний аналіз став універсальним інструментом для

дослідження природних процесів і значно вплинув на розвиток фізики, механіки та інженерних наук.

Подальший розвиток математики супроводжувався суттєвим розширенням поняття числа. Введення комплексних чисел стало відповіддю на внутрішні проблеми самої алгебри, зокрема на існування рівнянь, що не мають розв'язків у множині дійсних чисел. Запровадження уявної одиниці дозволило сформувати нову числову систему, у якій будь-яке алгебраїчне рівняння має розв'язок. Це узагальнення привело до формування цілісної та замкненої теорії чисел, що стало важливим кроком у розвитку алгебри. Комплексні числа також відкрили нові підходи до дослідження функцій, симетрій і перетворень, що значно розширило можливості математичного аналізу та сприяло розвитку сучасних абстрактних теорій.

Окремим етапом розвитку стала поява теорії ймовірностей, яка змінила уявлення про роль математики. Якщо раніше вона асоціювалася з точністю та визначеністю, то тепер стала інструментом аналізу невизначеності. Теорія ймовірностей широко застосовується у статистиці, економіці, соціальних науках і сучасних технологіях, зокрема в системах штучного інтелекту, де необхідно працювати з великими обсягами даних та прогнозувати результати.

Таким чином, найвідоміші відкриття в історії математики відображають глибоку трансформацію наукового мислення. Вони демонструють, як людство поступово переходило від спостереження до моделювання, від простих обчислень до складних абстракцій. Математика постає не лише як система знань, а як фундаментальний інструмент пізнання, що визначає розвиток науки, техніки та сучасного суспільства.

**Література**

1. Стюарт І. Витоки нескінченності: історія математики від найдавніших часів до сучасності. Львів : Видавництво Старого Лева, 2021. 512 с.

2. Девлін К. Мова математики: як числа описують наш світ. Київ : Наш Формат, 2019. 304 с. Сінгх С. Велика теорема Ферма: розгадка найзнаменитішої математичної загадки. Львів : Видавництво Старого Лева, 2018. 368 с.

3. Бевз Г. П. Історія математики та елементи розвитку математичних ідей. Київ : Освіта, 2019. 256 с.

4. Інститут математики НАН України. Український математичний журнал. Київ, 2019–2024. Т. 71–76. С. 1–120.

***Д. Б. Будзан***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## СПІРАЛЬ АРХІМЕДА У ВИЩІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Спіраль Архімеда — це одна з відомих кривих у математиці, яку вивчав давньогрецький учений Архімед. Вона є прикладом кривої, яка задається в полярній системі координат і допомагає зрозуміти, як пов'язані між собою кут і відстань від центра.

Спіраль описується формулою: $r = b\varphi$, де:

- r — це відстань від центра (радіус);
- φ — це кут повороту (в радіанах);
- b — це число, яке показує, як швидко "розкручується" спіраль.

Це означає, що коли кут φ збільшується, то відстань від центра (радіус) також збільшується рівномірно. Тобто точки спіралі поступово віддаляються від центра з однаковим "кроком".

Головна особливість цієї спіралі полягає в тому, що відстань між її витками однакова. Саме це відрізняє її від інших спіралей. Завдяки цьому її легко аналізувати та використовувати в різних задачах.

У вищій математиці спіраль Архімеда використовують як приклад для:

- вивчення полярних координат;
- розуміння графіків кривих;
- обчислення площі за допомогою інтегралів;
- знаходження довжини кривої.

Також спіраль можна записати через звичайні координати:

$$x = b\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$y = b\varphi \cdot \sin\varphi$$

Це дає можливість будувати її графік і досліджувати за допомогою похідних. Спіраль Архімеда має кілька важливих властивостей. По-перше, її радіус збільшується рівномірно і прямо пропорційно до кута, тобто спіраль розкручується плавно, без різких змін. По-друге, відстань між сусідніми витками є сталою, що є однією з її характерних ознак і відрізняє її від інших спіралей. Починається вона в центрі координат, оскільки при нульовому значенні кута радіус також дорівнює нулю, після чого крива поступово віддаляється від центра.

Ще однією особливістю є те, що спіраль є нескінченною, тобто за збільшення кута вона може продовжувати розкручуватися без обмежень. Вона не має осьової симетрії, однак зберігає впорядковану і закономірну форму. Її вигляд залежить від параметра у формулі, який визначає швидкість розширення спіралі та відстань між витками.

Спіраль Архімеда може бути задана як у полярних координатах, так і в декартовій системі координат, що робить її зручною для різних математичних

задач. Для неї також можна обчислювати площу між витками та довжину дуги за допомогою інтегралів. Крива є гладкою, без розривів і кутів, тому добре піддається математичному аналізу з використанням похідних.

**Література**

1. Архімед. Про спіралі / пер. з давньогрец. // Архімед. Твори. Київ : Наукова думка, 1965. 512 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. 6-те вид. Київ : Ігнатекс-Україна, 2018. 648 с.

***О. П. Садлівська***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ІСТОРІЯ ВІДКРИТТЯ ПОХІДНОЇ: ВІД ІСААКА НЬЮТОНА ДО ГОТФРІДА ЛЕЙБНІЦА

Похідна є одним із ключових понять математичного аналізу, що описує швидкість зміни функції та використовується для дослідження процесів у фізиці, економіці та інших науках. Її відкриття стало результатом незалежних досліджень двох видатних учених — Ісаак Ньютон та Готфрід Вільгельм Лейбніц у XVII столітті. Ще задовго до створення математичного аналізу вчені намагалися дослідити змінні величини. У працях античних математиків, зокрема Архімеда, використовувалися методи наближення, що стали основою для подальшого розвитку диференціального числення. Основною проблемою було визначення миттєвої швидкості зміни величини та побудова дотичної до кривої в заданій точці. Ця задача приводить до поняття границі, яке є фундаментом для визначення похідної. Формально похідна функції визначається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Це означає, що похідна описує миттєву швидкість зміни функції в точці. Ісаак Ньютон розглядав похідну як швидкість зміни величини у часі. Він вводить поняття флюксій (fluxions) — швидкостей зміни змінних величин (флюентів).

Ньютон позначав похідну за часом через крапку над змінною:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$$

Його підхід був тісно пов'язаний із фізикою, зокрема з описом руху тіл. Наприклад, швидкість є похідною координати за часом:

$$\vartheta(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$$

а прискорення — похідною швидкості:

$$\alpha(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Таким чином, Ньютон розглядав похідну як фізичну величину, що описує динамічні процеси.

Готфрід Вільгельм Лейбніц незалежно від Ньютона розробив власний підхід до диференціального числення. Він ввів зручну символіку, яка використовується й сьогодні.

Основне позначення похідної у Лейбніца:

$$\frac{dy}{dx}$$

де (dy) — нескінченно малий приріст функції, а (dx) — приріст аргументу.

Лейбніц також розглядав похідну як відношення нескінченно малих величин, що дозволило сформувати універсальний математичний апарат. Його підхід виявився більш зручним для обчислень і широко застосовується в сучасній математиці.

Об’єднання ідей Ньютона та Лейбніца привело до створення повноцінного математичного аналізу. Центральним результатом стало встановлення зв’язку між диференціюванням і інтегруванням:

$$\frac{d}{dx}\left(\int (x)dx\right) = f(x)$$

Це співвідношення є основою аналізу і має фундаментальне значення в математиці. У подальшому розвиток теорії границь дозволив строго обґрунтувати поняття похідної. Математики XVIII–XIX століть (зокрема Коші та Вейєрштрасс) надали строге визначення границі та неперервності, що зробило математичний аналіз логічно завершеним. Відкриття похідної стало одним із найважливіших досягнень математики XVII століття. Незалежні дослідження Ісаак Ньютон та Готфрід Вільгельм Лейбніц заклали основи диференціального числення, яке сьогодні є невід’ємною частиною науки і техніки. Похідна дозволяє описувати змінні процеси, досліджувати функції та моделювати реальні явища. Її застосування охоплює фізику, економіку, інженерію та інші галузі, що підтверджує універсальність і значущість цього математичного поняття.

**Література**

1. Boyer C. B., Merzbach U. C. *A History of Mathematics*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011.

2. Roy R. *The Discovery of the Infinitesimal Calculus: A History of Calculus and Analysis in Euclidean Settings*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

3. Arthur R. T. W., Rabouin D. *Leibniz and the Foundations of Differential Calculus*. Cham: Springer, 2025.
4. Isaac Newton. *Method of Fluxions*.
5. Gottfried Wilhelm Leibniz. *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* (1684).
Khan Academy: Вступ до похідної

***А. В. Гордієнко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,*
*Науковий керівник* ***О. Ю. Чмир****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ПАРАДОКС МОНТІ-ХОЛА

Парадокс Монті-Хола є однією з найвідоміших задач теорії ймовірностей, що демонструє розбіжність між інтуїтивним мисленням людини та математично коректним аналізом [1, 2]. Виник цей парадокс на основі телевізійної гри, у якій учаснику пропонується обрати один із трьох можливих варіантів, лише один з яких є виграшним [5]. Після початкового вибору ведучий, який володіє повною інформацією про розміщення призу, відкриває один із програшних варіантів і пропонує гравцеві змінити свій вибір. Попри поширене переконання про рівні шанси, математичний аналіз доводить, що стратегія зміни вибору подвоює ймовірність успіху [3]. У роботі розглянуто сутність парадоксу Монті-Хола, його математичне обґрунтування, психологічні причини інтуїтивної помилки, а також значення цього парадоксу для формування ймовірнісного мислення [4].

У сучасному світі прийняття рішень часто відбувається в умовах невизначеності, де людина змушена оцінювати шанси на успіх, спираючись не лише на логіку, а й на інтуїцію. Проте інтуїтивне мислення нерідко призводить до помилкових висновків, особливо у сфері ймовірностей. Одним із найяскравіших прикладів такого протиріччя є парадокс Монті-Хола, який став предметом численних наукових дискусій, експериментів і популярних пояснень. Актуальність теми полягає в тому, що парадокс Монті-Хола використовується не лише як навчальна задача з теорії ймовірностей, а й як інструмент для пояснення особливостей людського мислення, когнітивних упереджень та помилок у прийнятті рішень [4].

Назва парадоксу походить від імені телеведучого Monty Hall, який був ведучим американського шоу Let’s Make a Deal [5]. У класичному формулюванні задачі учасникові пропонують обрати одні з трьох дверей. За одними дверима знаходиться цінний приз (автомобіль), а за двома іншими – програшні варіанти (кози). Після того як гравець робить свій вибір, ведучий, знаючи, де саме розташований приз, відкриває одні з двох дверей, що залишилися, демонструючи програш. Після цього учасникові надається можливість або залишитися при своєму первісному виборі, або змінити його. Саме на цьому етапі виникає

парадокс: більшість людей вважає, що після відкриття одних дверей ймовірність виграшу стає однаковою для двох дверей, що залишилися, тобто 50 на 50 [2].

З позиції теорії ймовірностей початковий вибір учасника має ймовірність успіху $\frac{1}{3}$, тоді як сукупна ймовірність того, що приз знаходиться за двома іншими дверима, дорівнює $\frac{2}{3}$ [1]. Дія ведучого не є випадковою: він ніколи не відкриває двері з призом, а отже, його вибір не змінює початковий розподіл ймовірностей [3]. Після відкриття одних програшних дверей ймовірність $\frac{2}{3}$ фактично «переноситься» на єдині двері, що залишилися. Таким чином, стратегія зміни вибору забезпечує вдвічі більшу ймовірність виграшу порівняно зі стратегією залишення первісного рішення.

Причина того, що парадокс Монті-Хола здається суперечливим, полягає в особливостях людського мислення. Люди схильні ігнорувати додаткову інформацію, яку надає ведучий, та оцінювати ситуацію поверхнево [4]. Інтуїція часто підказує, що за наявності двох варіантів шанси мають бути рівними, хоча з математичної точки зору це твердження є помилковим. Цей парадокс демонструє, що навіть прості на вигляд задачі можуть вимагати строгого логічного аналізу, а довіра лише до інтуїції може призводити до неправильних рішень [2].

Парадокс Монті-Хола має важливе практичне та навчальне значення. Він широко використовується в освіті для пояснення понять умовної ймовірності та статистичного мислення [1, 3]. Крім того, цей приклад застосовується в економіці, психології та теорії прийняття рішень для аналізу поведінки людей в умовах ризику та невизначеності [4].

Парадокс Монті-Хола наочно демонструє розбіжність між інтуїтивним сприйняттям ймовірності та її математичним аналізом [1, 2]. Дослідження цієї задачі доводить, що стратегія зміни вибору після відкриття програшного варіанту є статистично вигіднішою. Водночас парадокс підкреслює обмеженість людської інтуїції та необхідність застосування формальних методів аналізу при прийнятті рішень. Таким чином, парадокс Монті-Хола є не лише математичною задачею, а й важливим інструментом розвитку критичного та ймовірнісного мислення.

## Література

1. *Feller W.* (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. – New York: Wiley.

2. *Gardner M.* (2001). The Colossal Book of Mathematics. – New York: W. W. Norton & Company.

3. *Selvin S.* (1975). A Problem in Probability. The American Statistician.

4. *Gigerenzer G.* (2014). Risk Savvy: How to Make Good Decisions. – New York: Viking.

5. *Rosenhouse J.* (2009). The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math’s Most Contentious Brain Teaser. – Oxford University Press.

***Ю. В. Слободян***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# ІСТОРИКО-ЕВОЛЮЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СТАНОВЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЗНАННЯ: ВІД ЕМПІРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ СТАРОДАВНОСТІ ДО АБСТРАКТНИХ СТРУКТУР СУЧАСНОСТІ

Еволюція математичної науки є віддзеркаленням загального інтелектуального та технологічного прогресу людської цивілізації. Виникнувши з утилітарних потреб доісторичної людини, необхідності вести кількісний облік, вимірювати земельні наділи та структурувати часові інтервали на основі астрономічних спостережень, математика пройшла шлях тривалої внутрішньої трансформації. Протягом тисячоліть вона перетворилася з набору розрізнених рецептурних правил арифметіки на монолітну систему абстрактного знання, яка сьогодні слугує універсальною методологічною мовою для всього спектра природничих, технічних та соціогуманітарних дисциплін. Становлення математичного апарату відбувалося не ізольовано, а під безперервним взаємовпливом між практичними запитами соціуму та внутрішньою логікою саморозвитку наукової теорії. Ретроспективний аналіз етапів розвитку математичної думки дозволяє не лише збагнути витоки сучасних концепцій дискретного та неперервного аналізу, але й глибше зрозуміти закономірності формування наукових парадигм, які визначають вектор розвитку сучасного глобального інформаційного простору.

Перший монументальний етап генезису математики пов'язаний із прагматичною діяльністю стародавніх цивілізацій Месопотамії та долини Нілу. Математичні тексти Стародавнього Єгипту (зокрема, папіруси Райнда та Московський) і клинописні таблички Вавилона демонструють високий рівень розвитку прикладної арифметики та геометрії. Математичний апарат єгиптян був орієнтований на вирішення інженерних та фіскальних задач: розрахунок об'ємів гранітних блоків для пірамід, обчислення площ трапецієподібних ділянок після розливу Нілу та адміністрування податкових зборів. Водночас вавилонські книжники пішли значно далі в царині абстрактних числових операцій. Створивши унікальну шістдесяткову позиційну систему числення, вони навчилися не лише оперувати громіздкими дробами, а й розв'язувати квадратні та навіть окремі типи кубічних рівнянь за допомогою спеціальних числових таблиць, заклавши перші підвалини алгоритмічного мислення задовго до появи формальної алгебри.

Принциповий парадигмальний зсув у сприйнятті математики відбувся в античний період завдяки мислителям Стародавньої Греції. Саме в елліністичну епоху математика вперше позбулася суто ремісничого, утилітарного характеру і перетворилася на дедуктивну теоретичну систему, засновану на суворій логіці. Філософські школи Фалеса, Піфагора та Платона впровадили концепцію

математичного доведення як єдиного критерію істинності знання. Вершиною античної геометричної думки стали «Начала» Евкліда (близько 300 р. до н.е.), де вперше було реалізовано аксіоматичний підхід: з невеликої множини очевидних постулатів за допомогою строгих правил логічного виведення будувалася велична будівля планіметрії та стереометрії. Натомість Архімед із Сиракуз, поєднавши геометричну строгість із механічною інтуїцією, розробив евристичний метод вичерпування, що дозволяв обчислювати площі параболічних сегментів та об'єми тіл обертання, що фактично передбачило базові ідеї інтегрального числення.

Після занепаду античної культури центр математичних досліджень перемістився на Схід: до Індії, Китаю та країн Ісламського світу. Вчені Середньовіччя здійснили критично важливий синтез еллініcтичної геометрії та східних обчислювальних традицій. Індійські математики (Аріабхата, Брахмагупта) зробили революційний крок, запровадивши повноцінну десяткову позиційну систему числення та концепцію нуля як самостійного числа, без якого неможливий розвиток сучасної математичної символіки. Цей досвід був перейнятий та переосмислений вченими Арабського халіфату. Видатний перський математик Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі у своїй праці *«Кітаб аль-джебр ва-ль-мукабала»* (IX ст.) кодифікував загальні правила розв'язання лінійних і квадратних рівнянь за допомогою операцій відновлення та протиставлення, від назви яких походить термін «алгебра», а латинізоване ім'я самого автора породило фундаментальне поняття «алгоритм».

Новий час ознаменувався грандіозним науковим проривом у XVII–XVIII століттях, викликаним потребами класичної механіки, балістики та астронавігації, які вимагали математичного опису процесів руху та безперервних змін. Створення Рене Декартом аналітичної геометрії дозволило об'єднати алгебру і геометрію за допомогою системи координат, трансформувавши геометричні лінії в алгебраїчні рівняння. Це заклало фундамент для незалежного та майже одночасного створення диференціального та інтегрального числення Ісааком Ньютоном та Готфрідом Вільгельмом Лейбніцом. Математичний аналіз надав ученим апарат похідних та інтегралів, де базовий зв'язок між операціями диференціювання та інтегрування відображає знаменита теорема Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Цей апарат дозволив записати фундаментальні закони Всесвіту у вигляді диференціальних рівнянь, відкривши епоху детерміністичного опису природи, яку згодом блискуче розвинули Леонард Ейлер, Жозеф-Луї Лагранж та П'єр-Симон Лаплас.

Протягом XIX століття математика вступила в період глибокої саморефлексії та критичного переосмислення власних підвалин. Спроби довести п'ятий постулат Евкліда завершилися революційним відкриттям неевклідової геометрії Миколою Лобачевським, Яношем Бояї та Бернгардом Ріманом, що

наочно продемонструвало відносність просторових аксіом і згодом дозволило Альберту Ейнштейну описати фізику загальної теорії відносності через викривлені многовиди. Паралельно з цим зусиллями Оґюстена-Луї Коші та Карла Вейєрштрасса було здійснено строге логічне обґрунтування математичного аналізу через теорію границь, а праці Евариста Галуа та Ріхарда Дедекінда заклали підвалини загальної абстрактної алгебри (теорії груп, кілець та полів). Наприкінці століття Георг Кантор створив теорію множин, яка мала стати універсальним фундаментом для всієї будівлі математики, проте виявлені в ній логічні парадокси (зокрема, парадокс Рассела) призвели до глибокої кризи основ математики на початку XX століття.

Розв'язання цієї кризи зумовило розвиток математичної логіки, формалізму Давида Гільберта та доведення Куртом Геделем теорем про неповноту, які встановили внутрішні межі формальних систем. Протягом XX–XXI століть математична наука продемонструвала безпрецедентний рівень абстракції (розвиток топології, функціонального аналізу, теорії категорій) і одночасно — колосальний вибух нових прикладних напрямів. Створення електронно-обчислювальних машин підштовхнуло розвиток дискретної математики, теорії кодування та чисельних методів. Теорія ймовірностей, аксіоматизована Андрієм Колмогоровим, та математична статистика стали основою для моделювання стохастичних процесів в економіці, квантовій фізиці та соціології.

У сучасну цифрову епоху історичний вектор математики спрямований у сферу кібернетики, криптографічного захисту даних та систем штучного інтелекту. Сучасні архітектури глибокого навчання (генеративні трансформери, графові нейромережі) та квантові обчислення є прямим продовженням багатовікового розвитку матричної алгебри, теорії графів, математичної логіки та оптимізаційних методів. Математика остаточно закріпила за собою статус головного архітектора технологічного прогресу.

Таким чином, історичний розвиток математики демонструє величну картину послідовної та безперервної інтелектуальної еволюції, від примітивного утилітарного рахунку стародавніх народів, до складних багатовимірних абстрактних теорій сучасності. Кожен історичний період не просто додавав нові формули до наукового арсеналу, а повністю змінював методологічну парадигму мислення, розширюючи межі пізнання. Математика довела свою універсальність, виступаючи надійним фундаментом для розвитку інших наук і матеріальної культури людства. Розуміння історичного шляху математичного знання є критично важливим для прогнозування напрямків майбутніх наукових проривів та ефективного керування процесами цифрової трансформації сучасного суспільства.

**Література**

1. Boyer C. B., Merzbach U. C. A History of Mathematics. — 3rd ed. — New York: John Wiley & Sons, 2011. — 688 p.

2. Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 1–3. — New York: Oxford University Press, 1990. — 1238 p.

3. Struik D. J. A Concise History of Mathematics. — 4th rev. ed. — New York: Dover Publications, 2008. — 228 p.
4. Рибников К. О. Історія математики. — К.: Вища школа, 2015. — 312 с.
5. Бурбакі Н. Нариси з історії математики. — М.: ІЛ, 1963. — 292 с.

***В. Ю. Зінчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

У сучасну епоху цифрової трансформації та стрімкого розвитку глобальних інтернет-комунікацій платформи, такі як Facebook, Instagram, LinkedIn та Twitter (X), перетворилися на колосальні сховища взаємопов’язаних соціометричних даних. У зв'язку з цим виникає гостра науково-практична потреба в ефективних, масштабованих математичних моделях для системного аналізу, візуалізації та інтерпретації таких надвеликих інформаційних масивів. Дискретна математика, а саме теорія графів, забезпечує універсальний, строгий і глибокий апарат, який дає змогу формалізувати й моделювати архітектуру соціальних мереж. Це дозволяє детально досліджувати топологічні властивості мережевих структур, відстежувати приховані патерни користувацької поведінки та виявляти специфічні закономірності групової динаміки. Ба більше, за структурними характеристиками зв’язків і метриками мережі стає можливим класифікувати об’єкти з метою кібербезпеки: виявляти деструктивні елементи, бот-мережі, автоматизованих спамерів, аккаунти-провокатори та координаторів дезінформаційних кампаній. Разом із цим граф-орієнтована архітектура даних дозволяє легко та гнучко застосовувати алгоритмічні контентні фільтри на платформах - наприклад, динамічно ранжувати новинну стрічку, спочатку показуючи дописи від близького кола друзів (кластерів із високою щільністю зв'язків), або інтелігентно приховувати оновлення від другорядних знайомих без повного розриву комунікації.

Будь-яка складна соціальна мережа математично формалізується як графова структура $G = (V, E)$, де скінченна множина вершин $V$ відображає унікальних користувачів (аккаунти, агенти або суб'єкти системи), а множина ребер $E$ фіксує наявність парних взаємодій чи відношень між ними (відносини дружби, взаємні підписки, обмін приватними повідомленнями, репости, лайки або коментарі під публікаціями). У випадку двосторонніх, взаємоузгоджених і симетричних відносин, як-от класичне додавання в «друзі» на багатьох платформах, граф є неорієнтованим. Тоді як для асиметричних, односторонніх взаємодій, таких як підписка на публікації (фоловінг) або надсилання таргетованих запитів, використовується апарат орієнтованих графів (орграфів), де кожне ребро є дугою,

що має строго визначений напрямок від ініціатора до реципієнта. Для глибокої кількісної оцінки ролі та позиції конкретного індивіда всередині такої глобальної структури використовуються ключові топологічні характеристики графа.

Першою базовою метрикою є ступінь вершини $\deg(v)$, який визначає абсолютну кількість безпосередніх зв'язків конкретного користувача $v \in V$. Математично для неорієнтованого графа ступінь визначається потужністю множини суміжних вершин:

$$\deg(v) = |\{u \in V : (v,u) \in E\}|$$

У випадку орієнтованого графа цей показник розгалужується на напівступінь заходу $\deg^-(v)$ (кількість підписників, що свідчить про авторитет чи популярність аккаунта) та напівступінь виходу $\deg^+(v)$ (кількість осіб, яких читає сам користувач). Проте для виявлення стратегічно важливих вузлів лише ступеня вершини недостатньо, тому застосовують метрики центральності. Центральність за посередництвом (betweenness centrality) оцінює роль вершини як критичного інформаційного містка або посередника у передачі даних між іншими сегментами мережі. Вона розраховується як частка найкоротших шляхів між усіма парами вершин, що проходять через досліджувану вершину:

$$B(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

де $\sigma_{st}$ - загальна кількість найкоротших шляхів від вершини $s$ до $t$, а $\sigma_{st}(v)$ - кількість тих шляхів, які проходять через $v$. Високий показник $B(v)$ вказує на те, що користувач контролює потоки інформації і його видалення може призвести до фрагментації мережі. Близькісна центральність (closeness centrality) характеризує середню геодезичну відстань від обраної вершини до всіх інших доступних вершин мережі і визначається як величина, обернена до суми найкоротших шляхів:

$$C(v) = \frac{1}{\sum_{u \neq v} d\,(v,u)}$$

Вузли з високим рівнем близькісної центральності здатні максимально швидко поширювати інформацію або чутки по всій мережі з мінімальними часовими затримками.

Для детального аналізу архітектури великих мереж та практичного витягування корисних знань застосовуються різноманітні алгоритмічні методи дискретного аналізу. Зокрема, алгоритм Дейкстри (Dijkstra's algorithm), а також його модифікації для розріджених графів, використовуються для миттєвого знаходження найкоротших шляхів між користувачами, що є життєво важливим для оптимізації маршрутизації пакетів даних та точного моделювання стохастичних процесів дифузії інформації чи вірусного маркетингу. Не менш значущою задачею є кластеризація графа або виявлення прихованих спільнот (community detection) - груп користувачів із надзвичайно щільними внутрішніми

зв’язками та відносно розрідженими зовнішніми контактами. Для цього застосовуються евристичний метод Лувена (Louvain method), спрямований на максимізацію критерію модульності графа, та дивізивний алгоритм Гірвана-Ньюмена (Girvan–Newman algorithm), який послідовно обчислює та видаляє ребра з найбільшим показником «міжвікової в'язкості» (edge betweenness). Ці алгоритми лежать в основі рекомендаційних систем, які пропонують користувачам нові цільові групи, сторінки або потенційних знайомих зі схожими інтересами.

У реальних сценаріях графи соціальних мереж рідко бувають простими та однорідними; найчастіше вони є зваженими. У таких моделях кожному ребру присвоюється певний числовий коефіцієнт (вага) $w_{ij}$, який відображає інтенсивність, частоту або емоційне забарвлення взаємодії між користувачами $i$ та $j$. Наприклад, вага ребра може формуватися як лінійна комбінація кількості надісланих повідомлень, тривалості дзвінків та кількості спільних фотографій. Більше того, для відображення мультимодальної природи сучасних комунікацій використовують мультиграфи. Вони дозволяють декільком різнотипним ребрам одночасно з'єднувати ту саму пару вершин (наприклад, одне ребро маркує родинні зв'язки, інше - фінансові транзакції, третє - професійну співпрацю), що забезпечує значно вищу точність моделювання реальних соціально-економічних і психологічних процесів.

Для ілюстрації розглянемо абстрактний математичний приклад. Нехай задано неорієнтований граф соціальної мікромережі з множиною вершин $V = \{A, B, C, D\}$, де літери відповідають чотирьом різним користувачам, та множиною ребер $E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (A, C)\}$, які описують встановлені канали зв'язку. Проведемо розрахунок базових ступенів для кожного індивіда:

$$\deg(A) = 2, \quad \deg(B) = 2, \quad \deg(C) = 3, \quad \deg(D) = 1$$

Аналіз отриманих кількісних даних показує, що вершина $C$ має найбільший ступінь суміжності ($\deg(C) = 3$). Відповідно, у межах цієї ізольованої системи користувач $C$ займає центральне топологічне положення і може розглядатися як локальний лідер думок або ключовий центр впливу, через якого потенційно проходить і фільтрується левова частка внутрішніх інформаційних потоків, тоді як користувач $D$ перебуває на периферії мережі та має обмежений доступ до ресурсів системи.

Перспективним і найбільш динамічним напрямом розвитку цієї міждисциплінарної галузі є впровадження графових нейронних мереж (Graph Neural Networks, GNN). Вони органічно поєднують у собі класичні топологічні методи теорії графів, матричну алгебру та сучасні концепції глибокого машинного навчання. На відміну від стандартних нейромереж, GNN здатні працювати безпосередньо з неевклідовими структурами даних, виконуючи операції графової згортки (Graph Convolution) та агрегації ознак сусідніх вузлів. Це дає змогу ефективно обчислювати векторні представлення (embeddings) вершин, ребер та всього графа загалом. Застосування GNN дозволяє аналізувати динаміку структурних змін мережі в реальному часі, з високою точністю

передбачати появу нових зв'язків між користувачами (link prediction), здійснювати інтелектуальний фрод-моніторинг, блокувати скоординовані атаки ботів та масштабувати рекомендаційні сервіси на мільйони активних вузлів.

**Література**

1. Соціальний граф // Вікіпедія. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Соціальний_граф
2. Використання теорії графів для аналізу соціальних мереж. ХНПУ імені Г. С. Сковороди. Режим доступу: https://dspace.hnpu.edu.ua/items/a328469c-2269-4a4f-a818-fac4983bf016
3. Застосування графової бази даних у соціальних мережах // Журнал комп'ютерно-інтегрованих технологій. ДонНУ. Режим доступу: https://jktod.donnu.edu.ua/article/view/16255
4. Огляд моделей аналізу соціальних мереж. ДДТУ. Режим доступу: https://pzs.dstu.dp.ua/DataMining/social/bibl/SNA.pdf
5. Носков В. В. Методи аналізу соціальних мереж на основі теорії графів // Штучний інтелект. - 2022. - № 2. - С. 14–25.

***Н. Р. Науменко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КВАНТИФІКАЦІЯ ПРИРОДНИЧИХ ПРОЦЕСІВ: ВІД ФІЗИЧНИХ ЗАКОНІВ ДО СИСТЕМНОЇ ЕКОЛОГІЇ

Історичний розвиток і сучасний стан природничих наук переконливо доводять, що глибина розуміння будь-якого природного явища прямо пропорційна рівню його математичної формалізації. Наївне емпіричне спостереження та якісний опис навколишнього світу, притаманні раннім етапам науки, поступилися місцем концепції точного кількісного аналізу та прогнозного моделювання складних нелінійних динамічних систем. Математика у просторі природничих дисциплін виступає не як зовнішній прикладний інструмент арифметичних розрахунків, а як універсальна мова науки, що дозволяє трансформувати складні фізичні, хімічні, біологічні та екологічні процеси у строгі диференціальні рівняння, стохастичні матриці й оптимізаційні задачі. Актуальність цієї теми зумовлена об'єктивною необхідністю системного вивчення міждисциплінарних підходів, оскільки межі між традиційними галузями природознавства стираються саме на базі спільних математичних моделей. Математичне моделювання дозволяє не лише звести різнорідні емпіричні дані до єдиної теоретичної структури, а й прогнозувати поведінку

екосистем чи фізичних об'єктів у критичних умовах без проведення тривалих, небезпечних або фінансово затратних натурних експериментів.

Фундаментальним прикладом абсолютного симбіозу точних і природничих наук є теоретична та математична фізика. Увесь понятійний апарат фізики - від класичної механіки Ісаака Ньютона до квантової теорії поля - побудований на апараті математичного аналізу, варіаційного числення та диференціальних рівнянь. Рух макроскопічних тіл, поширення електромагнітних хвиль або термодинамічні процеси описуються строгими рівняннями математичної фізики. Зокрема, хвильова функція $\psi(\mathbf{r}, t)$, яка визначає квантовий стан мікрочастинки, підпорядкована часовому рівнянню Шредінгера, що є лінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r}, t)\psi$$

де $\hbar$ - зведена стала Планка, $m$ - маса частинки, $\nabla^2$ - оператор Лапласа, а $V(\mathbf{r}, t)$ - потенціальна енергія системи. Математичне розв'язання цього рівняння за певних граничних умов дозволяє з абсолютною точністю розраховувати енергетичні спектри атомів і молекул, передбачати результати ядерних реакцій та створювати новітні напівпровідникові й квантові технології, які є основою сучасної цивілізації.

У хімічній науці математичні методи здійснили перехід від простої стехіометрії до глибокого моделювання мікросвіту та опису макроскопічних процесів у межах хімічної кінетики та квантової хімії. Хімічна кінетика вивчає швидкість перебігу реакцій та залежність цієї швидкості від концентрації реагуючих речовин, що формалізується системами звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого або вищих порядків. Наприклад, для опису динаміки концентрацій речовин у складних автокаталітичних коливальних реакціях (як-от відома реакція Бєлоусова-Жаботинського) застосовується математична модель Брюсселятора. Швидкість зміни концентрацій проміжних продуктів $X$ та $Y$ описується нелінійною системою:

$$\frac{dX}{dt} = A + X^2Y - BX - X, \quad \frac{dY}{dt} = BX - X^2Y$$

Математичний аналіз цієї системи за допомогою теорії стійкості Ляпунова та теорії біфуркацій дозволяє прогнозувати появу стійких граничних циклів, що візуально виражається у періодичній зміні кольору розчину. Окрім цього, термодинамічні розрахунки енергії Гіббса, ентальпії та ентропії дають змогу завчасно визначити термодинамічну ймовірність і напрямок проходження хімічного синтезу без проведення реальних лабораторних випробувань.

Сучасна біологія також зазнала глибокої математизації, еволюціонувавши у квантитативну біоінформатику та системну біологію. Математичний апарат є незамінним для опису генетичних процесів, розшифровки первинних послідовностей нуклеотидів у ДНК на основі теорії графів та комбінаторних алгоритмів. Популяційна біологія та екологія використовують диференціальні рівняння для моделювання динаміки чисельності видів та їхньої взаємодії в біоценозах. Класичним прикладом є система рівнянь Лотки-Вольтерри (модель

«хижак–жертва»), яка описує коливання чисельності популяцій жертв $x(t)$ та хижаків $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad \frac{dt}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - позитивні емпіричні коефіцієнти, що відображають народжуваність, смертність та інтенсивність трофічних контактів. Для аналізу складніших біологічних експериментів та верифікації наукових гіпотез у генетиці й фізіології обов'язковим є використання методів математичної статистики: дисперсійного аналізу (ANOVA), регресійного моделювання, критеріїв Стьюдента та Пірсона, що забезпечує високу репрезентативність і доказовість отриманих результатів.

Найбільш вагомим проявом інтеграції математики у природничі науки є концепція комплексного математичного моделювання великих геоекологічних та кліматичних систем. Моделювання глобальних кліматичних змін, поширення антропогенних забруднювачів у гідросфері чи атмосфері, а також оцінка стійкості екосистем базуються на складних комп'ютерних симуляціях. Ці симуляції об'єднують у собі закони гідродинаміки, термодинаміки, переносу мас та хімічних перетворень речовин. Використання чисельних методів (методів скінченних елементів, скінченних різниць) для розв'язання надвеликих систем диференціальних рівнянь на суперкомп'ютерах дозволяє людству будувати точні довгострокові кліматичні прогнози, оцінювати наслідки екологічних катастроф та розробляти стратегії сталого розвитку для збереження біосфери.

Таким чином, математика є невід’ємною методологічною основою, головним драйвером та інтегратором сучасних природничих наук. Застосування диференціальних рівнянь, інтегральних перетворень, лінійної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики дозволяє вивести дослідження природи на якісно новий рівень точності, об'єктивності та верифікованості. Математичні моделі успішно долають обмеженість прямого людського сприйняття, зв'язуючи мікросвіт квантових частинок і макросвіт глобальних екосистем у єдину гармонійну систему знань. Подальший прогрес природничих наук нерозривно пов'язаний із розвитком обчислювальної математики та методів штучного інтелекту, що відкриватиме нові можливості для глибинного пізнання законів Всесвіту та ефективного вирішення глобальних екологічних викликів.

**Література**

1. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. - 8th ed. - Boston: Cengage Learning, 2016. - 1368 p.
2. Halliday D., Resnick R., Walker J. Fundamentals of Physics. - 11th ed. - New York: Wiley, 2018. - 1216 p.
3. Murray J. D. Mathematical Biology: I. An Introduction. - 3rd ed. - New York: Springer, 2002. - 551 p.
4. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у біологічних моделях. - К.: Вища школа, 2018. - 240 с.
5. Ляшко С. І., Черняк О. І. Математичне моделювання природних і техногенних процесів. - К.: Либідь, 2022. - 312 с.

***О. І. Дацко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТОХАСТИЧНИЙ АНАЛІЗ У ФІНАНСОВІЙ І БАНКІВСЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Одним із основних застосувань математики у банківській сфері є розрахунок простих і складних відсотків. Вони використовуються при нарахуванні відсотків за депозитами та кредитами. У сучасній практиці короткострокові операції спираються на прості відсотки, де нарощена сума $S$ обчислюється через початковий капітал $P$, ставку $i$ та термін $t$:

$$S = P(1 + it)$$

Для довгострокових інвестицій та кредитів базою є складні відсотки, де враховується капіталізація. Формула набуває вигляду $S = P(1 + i)^n$. У випадку безперервного нарахування відсотків використовується експоненціальна модель $S = P \cdot e^{rt}$, де $r$ — номінальна ставка. Математичні формули дозволяють точно визначати суму виплат, строки погашення, дисконтовану вартість грошей ($PV$) та загальну вигідність фінансових операцій. На цій основі банки формують ануїтетні графіки платежів, розраховуючи фіксований щомісячний внесок за формулою коефіцієнта ануїтету.

У фінансовій інженерії критично важливе місце займає оцінка ризиків. За допомогою інструментарію математичної статистики та теорії ймовірностей банки визначають ймовірність дефолту позичальників, можливі масштаби фінансових втрат і приймають зважені рішення щодо видачі кредитів чи макроінвестування.

Основним інструментом оцінки ринкового ризику є концепція *Value at Risk* ($VaR$), яка визначає максимальні очікувані збитки портфеля за певний проміжок часу з заданим довірчим інтервалом (наприклад, 99%). Математично це виражається через квантиль розподілу ймовірностей прибутку/збитків:

$$P(\Delta V \leq -VaR) = 1 - \alpha$$

де $\Delta V$ — зміна вартості портфеля, а $\alpha$ — рівень довіри. Застосування нормального розподілу Гаусса та логнормальних моделей дозволяє аналізувати волатильність активів (через стандартне відхилення $\sigma$), мінімізувати фінансові ризики та суттєво підвищувати загальну стабільність фінансових установ.

Математика активно використовується для комплексного аналізу ефективності інвестицій та управління капіталом. За допомогою моделей прогнозування визначається дохідність активів, оптимізується структура портфеля інвестицій та оцінюється інтегральний рівень прибутку.

Класичним прикладом є Марковіцівська модель портфельної оптимізації, яка зводить задачу вибору активів до мінімізації дисперсії портфеля $\sigma_p^2$ (ризику) за заданого рівня очікуваної дохідності $E(R_p)$:

$$\min \sum_i \sum_j x_i \, x_j \sigma_{ij}$$

за умов $\sum_i x_i \, E(R_i) = E(R_p)$ та $\sum_i x_i = 1$, де $x_i$ — частка $i$-го активу в портфелі, а $\sigma_{ij}$ — коваріація між доходами активів. Для оцінки вартості похідних фінансових інструментів (опціонів, ф'ючерсів) застосовується фундаментальне диференціальне рівняння в частинних похідних Блека-Шоулза:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Ці розрахунки дозволяють точно оцінювати ринкові деривативи та будувати стратегії хеджування ризиків.

Сучасні комерційні банки та світові фінансові установи повсюдно застосовують математичні моделі для стратегічного прогнозування економічних процесів. Це дозволяє аналізувати ринок, передбачати динаміку відсоткових ставок, моделювати поведінку споживачів та розробляти довгострокові стратегії розвитку. Використання систем економетричних рівнянь та методів симуляції Монте-Карло надає можливість програмувати тисячі сценаріїв розвитку ринкової кон’юнктури, оцінюючи стійкість банківської системи до стресових ситуацій (стрес-тестування).

Системне використання математичних методів значно підвищує ефективність проведення фінансових операцій. Вони забезпечують високу точність, надійність, швидкість та прозорість у банківській діяльності, що є критично важливим для стабільного економічного розвитку всього суспільства. Математичні алгоритми мінімізують вплив суб’єктивного людського фактора, переводячи фінансовий аналіз у площину об'єктивних цифрових розрахунків.

**Література**

1. Mishkin F. The Economics of Money, Banking and Financial Markets. — 12th ed. — New York: Pearson, 2019. — 744 p.
2. Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives. — 11th ed. — New York: Pearson, 2021. — 912 p.
3. Ross S., Westerfield R., Jordan B. Corporate Finance. — 12th ed. — New York: McGraw-Hill Education, 2020. — 1040 p.
4. Financial Mathematics and Engineering // Khan Academy Educational Reports. — 2024. — Vol. 14. — P. 88–95.

***І. В. Карабин***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ У СУЧАСНІЙ ФІЛОЛОГІЇ: ВІД СТАТИСТИКИ ТЕКСТУ ДО КОМП'ЮТЕРНОЇ ЛІНГВІСТИКИ

Традиційне сприйняття філології як суто гуманітарної дисципліни, що оперує виключно якісними та описовими категоріями, на сучасному етапі розвитку науки зазнає докорінних змін. Стрімкий розвиток інформаційних технологій, глобальна цифровізація текстового простору та виникнення концепції великих даних (Big Data) зумовили глибоку інтеграцію точних наук у дослідження мови. Математика сьогодні виступає не просто інструментом для підрахунку частоти вживання слів, а фундаментальним методологічним базисом, що дозволяє формалізувати мовну систему, виявити приховані структурні закономірності текстів та побудувати об'єктивні прогностичні моделі. Процес квантифікації - переходу від інтуїтивного аналізу художньої тканини чи мовної системи до строгого математичного моделювання - відкрив перед сучасною філологією нові горизонти. З огляду на це, особливої актуальності набуває системне дослідження ключових напрямів застосування математичного апарату в лінгвістиці та літературознавстві, оцінка ефективності сучасних статистичних і комбінаторних методів, а також визначення перспектив інтеграції математичних моделей у прикладні філологічні проєкти та системи автоматичної обробки природної мови (NLP).

Історичним і фундаментальним містком між точними науками та філологією стала математична лінгвістика, яка активно використовує методи теорії ймовірностей та математичної статистики для аналізу текстових масивів. Одним із найвідоміших емпіричних законів структуризації тексту є закон Ципфа (Zipf's law), який описує розподіл частоти слів у природній мові. Згідно з цим законом, якщо розподілити всі слова тексту за зменшенням частоти їхнього вживання, то частота $f$ будь-якого слова буде обернено пропорційною до його рангу $r$ у цьому частотному списку. Математично ця емпірична закономірність виражається формулою:

$$f(r) = \frac{C}{r^{\gamma}}$$

де $C$ - константа, характерна для конкретної мови або великого корпусу текстів, а параметр $\gamma$ зазвичай близький до одиниці. Математичний аналіз відхилень від класичного закону Ципфа дозволяє філологам об'єктивно оцінювати багатство словникового запасу автора, визначати жанрову специфіку творів та фіксувати штучні або аномальні текстові структури. Окрім цього, у квантитативній лінгвістиці активно застосовують закон Менцерата-Піorequest, який встановлює нелінійну залежність між довжиною мовної одиниці (наприклад, слова) та

довжиною складових її компонентів (морфем чи складів), доводячи, що чим довше слово, тим коротші склади, з яких воно складається.

Окремим вагомим напрямом, де математика виконує вирішальну роль, є авторознавча експертиза та атрибуція анонімних або суперечливих текстів (стилометрія). Визначення авторства історичних документів або сучасних судово-слідчих текстів тривалий час базувалося на суб'єктивному відчутті експерта-філолога. Сьогодні стилометрія оперує методами багатовимірного статистичного аналізу, теорією інформації Клода Шеннона та концепцією текстової ентропії. Для кожного автора існує унікальний, несвідомий «цифровий відбиток» стилю, який математично кодується через розподіл службових слів, довжину речень, частоту використання певних граматичних конструкцій або індекс лексичної різноманітності (TTR - Type-Token Ratio). Застосування таких методів, як кластеризація (зокрема, ієрархічний кластерний аналіз), метод головних компонент (PCA) та дельта-метрика Берроуза (Burrows' Delta), дозволяє обчислити математичну відстань між стилями різних текстів. Якщо відстань між вектором частот службових слів досліджуваного анонімного тексту та еталонним вектором автора є мінімальною у багатовимірному евклідовому просторі, це слугує строгим доказом на користь атрибуції тексту конкретному письменнику.

Справжню революцію на стику наук продемонструвала комп'ютерна та прикладна лінгвістика, яка лежить в основі сучасних пошукових систем, машинного перекладу, голосових асистентів та генеративних моделей штучного інтелекту. Природна мова за своєю природою є дискретною та неоднозначною, тому її комп'ютерний аналіз вимагає переведення слів і фраз у неперервні математичні об'єкти - числові вектори. Для цього застосовують методи лінійної алгебри та дистрибутивної семантики. Сучасні алгоритми (наприклад, Word2Vec, FastText) відображають кожне слово тексту у багатовимірний векторний простір (векторні ембедінги - embeddings). Семантична близькість між словами в такому просторі визначається через косинусну відстань (cosine similarity) між їхніми векторами:

$$\text{similarity}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}}$$

Завдяки такій геометризації мови комп'ютер здатний виконувати дивовижні лінгвістичні обчислення на рівні змісту. Відомий матричний приклад: вектор слова «король» мінус вектор слова «чоловік» плюс вектор слова «жінка» дає вектор, який є максимально близьким до слова «королева».

Окрім геометрії просторів, у філологічних дослідженнях активно застосовують апарат теорії графів. Мову або окремий текст можна представити як складну мережу (семантичний чи синтаксичний граф), де вершинами є окремі лексеми, а ребрами - зв'язки між ними (граматична узгодженість, синонімія чи спільне вживання в межах одного абзацу). Розрахунок таких метрик графа, як ступінь вершини, центральність за посередництвом (betweenness centrality) та коефіцієнт кластеризації, дозволяє філологам автоматично виділяти ключові

поняття в художньому тексті, моделювати концептуальну систему автора, будувати ментальні карти персонажів та автоматично реферувати (стискати) великі наукові праці без втрати головного змісту.

Не менш важливим є застосування марковських ланцюгів та стохастичних моделей для аналізу фонологічної та морфологічної структури мови. Послідовність літер чи звуків у мовленні не є випадковою - поява кожної наступної одиниці залежить від попереднього контексту з певною ймовірністю. Приховані марковські моделі (HMM) активно використовуються філологами для автоматичного морфологічного аналізу, зокрема для зняття граматичної омонімії (коли слово за формою може належати до різних частин мови) та точного тегування частин мови (POS-tagging) у великих національних корпусах мов.

Таким чином, математика у сучасній філології пройшла еволюційний шлях від простого допоміжного інструментарію арифметичного підрахунку до головного методологічного архітектора нових міждисциплінарних галузей. Використання лінійної алгебри, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії графів та алгоритмів машинного навчання дозволило вивести гуманітарні дослідження на рівень високої наукової точності, об'єктивності та верифікованості. Математичне моделювання лінгвістичних процесів не знеособлює текст, а навпаки - допомагає розкрити тонкі архітектонічні закономірності мовної системи та художнього стилю, які неможливо помітити при класичному лінійному читанні. Подальший розвиток філологічної науки критично залежить від поглиблення інтеграції з математичними дисциплінами, що є запорукою створення ефективних систем штучного інтелекту та глибшого розуміння феномену людської мови.

**Література**

1. Перебийніс В. С. Математичні методи в лінгвістиці. - К.: Вища школа, 2017. - 184 с.

2. Дарчук Н. П. Комп’ютерна лінгвістика: автоматичний аналіз тексту. - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2020. - 256 с.

3. Manning C. D., Schütze H. Foundations of Statistical Natural Language Processing. - MIT Press, 1999. - 680 p.

4. Штовба С. Д., Пасічник В. В. Квантитативна лінгвістика та закон Ципфа // Комп'ютерні науки та інформаційні технології. - 2022. - №4. - С. 112–125.

5. Кочерган М. П. Загальне мовознавство: Підручник для студентів філологічних спеціальностей. - К.: Академія, 2021. - 464 с.

***Ю. Р. Захарко***
*Відокремлений структурний підрозділ «Львівський фаховий коледж Львівського національного університету природокористування»*
*Науковий керівник* ***О. С. Олійник****, викладач фізики, викладач-методист, голова циклової комісії фізико-математичних дисциплін та інформаційних технологій*

# МАТЕМАТИКА ЯК МОВА ФІЗИКИ. ЯК ФОРМУЛИ ОПИСУЮТЬ ЗАКОНИ ПРИРОДИ

Фізика є наукою, яка вивчає явища природи, їх причини та закономірності. Але самих лише слів недостатньо, щоб точно описати процеси, які відбуваються навколо нас. Саме тому головною мовою фізики стала математика. Без формул, рівнянь і обчислень неможливо пояснити, передбачити або використати фізичні процеси. Фізичні закони набувають точності саме завдяки математичному запису, що дає змогу кількісно описувати явища та виконувати розрахунки [1].

Фізика і математика – це дві науки, які тісно пов'язані між собою. Фізика вивчає явища природи, а математика дає інструменти для їх точного опису.

Математика у фізиці виконує роль універсального інструмента, який перетворює спостереження на точні закономірності. Якщо фізика відповідає на питання «що відбувається?», то математика – «скільки, як швидко і за якою залежністю це відбувається». Саме тому, вивчення функцій і графіків є основою для розуміння фізичних процесів, адже будь-яке явище можна подати як залежність однієї величини від іншої [2].

Наприклад, рух тіл описується рівняннями, які показують залежність швидкості, часу та прискорення. Завдяки цьому можна точно розрахувати, де буде тіло через певний проміжок часу.

Один із найвідоміших прикладів – формула другого закону Ньютона:

$$F = m \cdot a.$$

Цей простий математичний вираз пояснює, як рухаються всі об'єкти у світі – від м'яча, що летить у повітрі, до планет у космосі. Саме такі математичні співвідношення лежать в основі теоретичної фізики і дозволяють узагальнювати результати спостережень [3].

Математика також описує енергію. Наприклад, формула кінетичної енергії

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

показує, що енергія залежить не лише від маси, а й від швидкості у квадраті. Це пояснює, чому навіть невеликий об'єкт на великій швидкості може бути дуже небезпечним. Такі залежності мають велике значення в техніці та безпеці руху.

В електриці математика також є незамінною. Закон Ома

$$I = \frac{U}{R}$$

дозволяє обчислювати силу струму в колі. Це основа роботи всіх електричних приладів – від лампочки до складних комп'ютерних систем. Саме через рівняння фізика описує процеси поширення струму, тепла чи хвиль [4].

Ще один приклад – хвильові процеси. Коливання струни, звук або світло описуються тригонометричними функціями. Без математики неможливо було б зрозуміти, як поширюються хвилі або як працює музика.

У сучасній фізиці математика стала ще важливішою. Наприклад, у квантовій фізиці використовуються складні рівняння, які описують поведінку частинок, що неможливо побачити неозброєним оком.

А в астрономії математичні моделі дозволяють передбачати рух планет і навіть відкривати нові небесні тіла.

Завдяки поєднанню фізики і математики люди створили сучасні технології: смартфони, комп'ютери, автомобілі, супутники. Усе це працює тому, що фізичні явища були точно описані математичними моделями [6].

Навіть у повсякденному житті ми використовуємо цей зв'язок: коли розраховуємо швидкість, відстань або час, ми фактично застосовуємо фізику через математику [5].

Отже, математика є універсальною мовою, яка дозволяє фізиці пояснювати світ. Без неї фізика була б лише набором спостережень, а не точною наукою. Саме завдяки математичним формулам ми можемо не тільки описувати, але й передбачати явища природи та створювати нові технології.

**Література**

1. Бар'яхтар В. Г., Довгий С. О. Фізика : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Ранок, 2019. 272 с.

2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2018. 256 с.

3. Svozil K. Mathematical Methods of Theoretical Physics. Vienna : Vienna University of Technology, 2012. 300 p.

4. Lein M. Differential Equations of Mathematical Physics. Oxford : University of Oxford, 2015. 250 p.

5. Елленберґ Дж. Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення / пер. з англ. Київ : Наш Формат, 2017. 400 с.

6. Брайсон Б. Коротка історія майже всього на світі / пер. з англ. Київ : Наш Формат, 2018. 544 с.

***А. В. Геренчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафкдри прикладної математики і механіки*

## ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ЯК МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТ МОДЕЛЮВАННЯ НАВКОЛИШНЬОГО СВІТУ

У сучасному науковому дискурсі навколишній світ розглядається не як статична картина, а як неперервний потік змін та динамічних процесів. Будь-який об'єкт - від біологічних клітин та вірусних популяцій до коливань ринкових цін і технічних пристроїв є елементом певної динамічної системи, що постійно трансформується в часі. Математичний апарат дозволяє формалізувати звичайні емпіричні правила життєдіяльності, перетворюючи їх на лаконічні диференціальні рівняння, що дає змогу прогнозувати поведінку систем на довгострокові періоди.

Метою цієї роботи є аналіз універсальності застосування диференціальних рівнянь як «рушія» (математичного двигуна) для моделювання природних, економічних, медичних та соціальних процесів , а також обґрунтування ролі сучасних комп'ютерних технологій у дослідженні складних нелінійних систем.

**Основні математичні моделі та їх застосування:**

**Модель гармонічних коливань (правило маятника).** В основі руху класичного маятника, коливань гітарної струни або гойдалки лежить універсальний принцип: сила повернення пропорційна величині відхилення від положення рівноваги. Математична формалізація цього закону у вигляді диференціального рівняння другого порядку є базовим шаблоном для моделювання пульсації людського серця, роботи легень, а також розрахунку стійкості велетенських хмарочосів і мостів під дією вітрових навантажень.

**Екологічна модель «хижак–жертва».** Динаміка біологічних популяцій (на прикладі коливання чисельності вовків та зайців) описується системою диференціальних рівнянь, яка демонструє відсутність стаціонарної константи в природі. Математика доводить, що система перебуває в стані постійної динамічної рівноваги («гойдалок»), що дозволяє прогнозувати ризики вимирання видів на десятиліття вперед.

**Логістичне рівняння обмеженого росту.** Модель описує розвиток систем в умовах лімітованих ресурсів (харчування, простору тощо). На відміну від стрімкої експоненти на початковому етапі, логістична модель враховує неминуче сповільнення темпів зростання при наближенні до ємності середовища. Цей принцип є універсальним для прогнозування масштабування IT-компаній, розвитку міст або розмноження бактерій.

**Економічна динаміка ринку.** Ринкові механізми розглядаються як динамічна система, де баланс попиту та пропозиції формує вектори руху цін.

Математичний опис цих коливань доводить, що економічні процеси не є хаотичними, а підпорядковуються чітко прорахованим правилам взаємодії.

**Епідеміологічна модель SIR.** Розділення популяції на три детерміновані групи — сприйнятливі до хвороби ($S$), інфіковані ($I$) та вилікувані/імунні ($R$) — дозволяє за допомогою диференціальних рівнянь описувати швидкість «переходу» індивідів між критеріями. Модель дає змогу комп'ютерно тестувати різні сценарії протиепідемічних заходів (вакцинація, масковий режим) та прогнозувати пікові навантаження на систему охорони здоров'я.

**Фармакокінетичні процеси «входу–виходу».** Застосування медикаментозних препаратів базується на математичному розрахунку швидкості абсорбції та виведення речовини з організму. Диференціальні рівняння допомагають визначити оптимальний інтервал прийому ліків для підтримання стабільної терапевтичної концентрації в крові без шкоди для пацієнта.

При дослідженні надскладних багатокомпонентних систем (тижневі прогнози погоди, онкологічний рух клітин у пухлинах) аналітичний розрахунок вручну стає неможливим. Сучасні обчислювальні потужності дозволяють створювати «цифрових двійників» реальних процесів. Це забезпечує можливість багаторазово віртуально тестувати сценарії (наприклад, політ літака чи дію нових ліків) до їх реального впровадження, мінімізуючи потенційні ризики.

Математика та диференціальні рівняння є універсальною мовою природи, яка дозволяє не просто констатувати поточний стан систем, а й розуміти їхні внутрішні механізми. Розуміння траєкторії руху динамічних систем надає дослідникам і практикам можливість свідомо та ефективно коригувати курс процесів для досягнення оптимуму й безпеки.

# СЕКЦІЯ 4. МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІСТЬ

***О. Я. Коломієць***
*Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького*
*Науковий керівник* ***Л. М. Трасковецька.****, кандидат фізико - математичних наук, доцент, професор кафедри загальнонаукових та інженерних дисциплін*

## ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БЕЗПІЛОТНИХ СИСТЕМАХ

Сучасні безпілотні системи (дрони, автономні літальні апарати, наземні роботи) широко застосовуються у військовій справі, логістиці, розвідці та моніторингу. Ефективність їх роботи значною мірою залежить від точності математичних моделей, основу яких становлять диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння використовуються у безпілотних системах не лише як теоретичний апарат, а як ключовий інструмент забезпечення їх функціонування в реальних умовах**,** так як всі основні процеси в таких системах є динамічними. Вони дозволяють моделювати зміну фізичних величин у часі, зокрема координат, швидкості, прискорення та орієнтації апарата.

Насамперед, диференціальні рівняння використовуються для розрахунку траєкторії польоту безпілотника в умовах бойового середовища. На відміну від ідеальних умов, реальний політ відбувається під впливом змінних факторів: поривів вітру, турбулентності, зміни маси (наприклад, при скиданні корисного навантаження), а також можливих пошкоджень. Усі ці впливи описуються через зміну параметрів руху в часі.

Диференціальні рівняння другого порядку, що описують рух безпілотного літального апарата випливають із законів механіки. Наприклад, другий закон Ньютона дає змогу записати диференціальне рівняння, яке враховує силу тяжіння, опір повітря, тягу двигунів та інші фактори, що впливають на траєкторію:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_{тяги} - F_{опору} + F_{зовн},$$

де $m$ — маса апарата, $F$ — рівнодійна сил, що діють на нього.

Це дозволяє оперативно оцінювати, як зміниться траєкторія та чи досягне апарат заданої цілі, одночасно враховуються зовнішні фактори (рис.1).

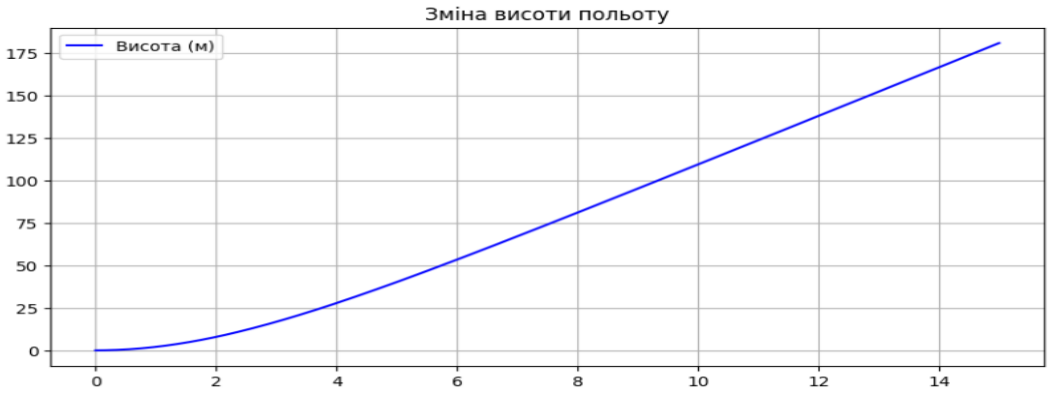



**Рисунок 1** – Траєкторія руху літального апарату

Під час виконання бойових завдань безпілотник може зазнавати радіоелектронних перешкод (РЕБ), втрати GPS-сигналу або різких змін курсу. У таких умовах система автоматичного керування (контролер) повинна швидко реагувати на відхилення. На основі диференціальних рівнянь створені автоматичні регулятори, які реагують на відхилення параметрів

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt},$$

що забезпечує утримання стабільного польоту навіть при втраті частини даних, компенсацію зовнішніх впливів, підвищення живучості апарата.

Проаналізуємо ситуацію коригування артилерійського вогню за допомогою безпілотного літального апарата. Підрозділ отримує завдання уразити рухому ціль. Безпілотник здійснює розвідку та передає координати об’єкта, який змінює своє положення в часі.

Для підвищення точності ураження необхідно не лише визначити поточні координати цілі, а й спрогнозувати її подальший рух. Це досягається шляхом використання диференціальних рівнянь, які описують зміну координат і швидкості:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \qquad \frac{dv_x}{dt} = a_x.$$

У результаті використання математичної моделі значно зменшується похибка ураження, що є важливим у бойових умовах.

Розглянемо задачу вибору оптимальної траєкторії польоту для виконання бойового завдання безпілотником в умовах протидії протиповітряної оборони (ППО), радіоелектронної боротьби (РЕБ) та рельєфу місцевості. У такій ситуації апарат повинен не лише досягти цілі, а й мінімізувати ймовірність виявлення та ураження. Кінематика руху безпілотника в цьому випадку описується системою диференціальних рівнянь із керуванням:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y, \qquad \frac{dv}{dt} = u(t),$$

де *u(t)* — керуючий вплив, який змінюється залежно від тактичної ситуації.

У процесі виконання цього завдання система управління змінює висоту і швидкість для зменшення ймовірності виявлення, коригує маршрут у реальному часі при виявленні загрози та переходить у автономний режим при втраті зв'язку.

У сучасній війні перевагу отримує сторона, яка швидше обробляє інформацію та точніше застосовує засоби ураження. Безпілотні системи стали ключовим елементом цієї переваги, а їх ефективність безпосередньо базується на використанні диференціальних рівнянь.

**Література**

1. Бойчук І. В. Диференціальні рівняння та їх застосування. – Київ, 2020.
2. Кузнецов О. П. Математичне моделювання технічних систем. – Харків, 2019.

***В. О. Юхимчук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій****, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики і механіки*

## ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ БЕЗПЕЧНИХ ВІДСТАНЕЙ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ

Пожежна безпека є однією з ключових умов збереження життя та здоров'я людей. Під час пожежі визначальними є швидкість поширення небезпечних факторів і правильне встановлення безпечних відстаней. Для цього широко застосовуються методи геометрії, які дозволяють моделювати просторові процеси та проводити точні розрахунки.

Ефективне реагування на пожежу значною мірою залежить від правильних розрахунків, серед яких важливе місце займає геометрія. Саме завдяки геометричним методам можна визначити безпечні відстані, спланувати евакуаційні шляхи та мінімізувати ризики під час надзвичайних ситуацій.

Одним із ключових аспектів є визначення безпечної відстані від джерела вогню. Під час пожежі тепло поширюється в усіх напрямках, утворюючи умовні зони у вигляді кіл (у відкритому просторі) або складніших фігур (у приміщеннях). Використовуючи знання про радіус і площу кола, можна розрахувати територію, яка є небезпечною для перебування людей. Чим більша інтенсивність горіння, тим більшим стає радіус небезпечної зони.

Розглянемо задачу на обчислення радіуса та площі пожежі.

Визначити геометричні параметри пожежі на 4 та 8 хв розвитку пожежі в приміщенні довжиною 20 м і шириною 25 м, якщо лінійна швидкість 1,3 м/хв. Пожежа виникла біля стіни та розвивається в безмежно довгий простір.

*Розв'язання*:

1. Визначаємо радіус розвитку пожежі на 4-й хвилині:

$$R=0,5V_л = 0,5 \times 1,3 \times 4 = 2,6 \text{ м}.$$

2. Визначаємо площу пожежі на 4-й хвилині:

Виходячи з місця виникнення пожежі, приймемо подальшу форму розвитку пожежі у вигляді півкруга.

$$S_{\text{п}} = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2,6^2}{2} = 10,61 \text{ м}^2$$

3. Радіус розвитку пожежі на 8-й хвилині:

$$R =0,5V_л = 0,5 \times 1,3 \times 8 = 5,2 \text{ м}.$$

4. Визначаємо площу пожежі на 8-й хвилині:

Виходячи з того, що радіус розвитку пожежі менший значення довжини або ширини приміщення, форма пожежі залишається півкруглою.

$$S_{\text{п}} = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 5,2^2}{2} = 42,45 \text{ м}^2$$

Отже, радіус пожежі на 4, 8 хвилинах становить 2,6 та 5,2 м відповідно, а площа пожежі – 10,61 та 42,45 м$^2$.

Геометрія також допомагає при плануванні евакуаційних шляхів. Важливо, щоб відстань до найближчого виходу була мінімальною. Для цього використовують поняття найкоротшої відстані між двома точками — прямої лінії. Проте в реальних умовах приміщення має стіни, перегородки та інші перешкоди, тому маршрути евакуації розглядають як ламані лінії. Завдання полягає в тому, щоб знайти найкоротший і найбезпечніший шлях до виходу.

Ще одним важливим застосуванням геометрії є розрахунок кутів огляду та зон видимості. У задимленому приміщенні видимість значно зменшується, тому важливо правильно розташувати аварійні виходи, покажчики та освітлення. Використовуючи геометричні побудови, можна визначити, з яких точок приміщення ці об’єкти будуть добре помітні.

Крім того, геометричні розрахунки застосовуються під час розміщення пожежного обладнання: вогнегасників, датчиків диму, систем пожежогасіння. Наприклад, визначаються оптимальні відстані між датчиками, щоб забезпечити повне покриття приміщення без «сліпих зон».

У будівництві також широко використовують геометрію для створення безпечних об’єктів. Розраховуються площі приміщень, ширина коридорів, кількість і розташування евакуаційних виходів. Усе це базується на точних геометричних формулах і нормах.

Геометрія є ефективним інструментом для визначення безпечних відстаней під час пожежі. Вона забезпечує можливість точного моделювання зон ураження, оптимізації евакуаційних маршрутів і підвищення рівня безпеки людей. Поєднання геометричних методів із сучасними технологіями моделювання відкриває нові перспективи у сфері пожежної безпеки.

**Література**

1. Дослідження пожеж: навчальний посібник / Сергій ВОВК, Андрій ХАРЧУК, Андрій СУХАЙ, Юрій ШЕЛЮХ - Львів: ЛДУ БЖД, 2022. - 528с.
2. Димовидалення на пожежі: навчальний посібник / В.І. Лущ, О.В. Лазаренко. - Львів : ЛДУ БЖД, 2017. - 100 с.
3. Електронний посібник з дисципліни: «Теорія горіння та вибуху» для студентів спеціальності 263 – Цивільна безпека денної та заочної форм навчання/ В.І. Федорчук, М.В. Рудинець. - Луцьк:ЛНТУ, 2020

***І. В. Ганжа***
*Львівський Національний університет «Львівська Політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики*

## РОЛЬ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА ТРИГОНОМЕТРІЇ В СУЧАСНІЙ КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Сучасні люди все більше проводять свій час перед екранами телефонів, комп'ютерів та інших пристроїв. Щодня користуючись девайсами ми даже не задумуємося , що зображення які ми всі бачимо комп'ютер бачить під іншим кутом. Для нього все, що ми бачимо – це результат безперервного потоку математичних обчислень. Будь-яка графіка складається лише з "цифрових декорацій" і побудована на мові чисел.

Початок цифрового зображення є піксель ( скорочено від англ. PICture'S Element – елемент зображення ). Якщо дивитися з точки зору математики , то піксель не просто точка, а набір числових даних. Пікселі мають свої координати в двовимірній системі та числовий код кольору, який зазвичай описується трьома компонентами: R – червоний, G – зелений, B – синій.

У цій роботі я хочу показати іншу сторону монітора , щоб кожен зрозумів важливість абстрактних формул лінійної алгебри, матриці та геометричні закони які перетворюють нудні цифри на живу візуальну реальність, яку ми називаємо IT-технологіями.

Цифрова фотографія для комп'ютера є двовимірним масивом або матрицею. Кожна клітинка цієї таблиці містить інформацію про колір пікселя. У моделі RGB колір представлений кортежем чисел, де кожне число відповідає інтенсивності певного кольору.

Математика кольору дозволяє редагувати зображення за допомогою арифметичних операцій. Наприклад, додавання значень до всіх пікселів підвищує яскравість. Створення фільтрів, таких як перетворення у чорно-білий формат, відбувається шляхом обчислення середнього арифметичного компонентів R, G та B, що створює нейтральний сірий тон.

У сучасній 3D-графіці будь-який об’єкт описується за допомогою векторів, які фіксують точне положення точок, ліній та полігонів у просторі. Для того, щоб змінити вигляд або положення цих об’єктів, математика використовує матриці перетворень. Процес масштабування відбувається через множення координат вектора на певний коефіцієнт, що дозволяє пропорційно змінювати розмір об’єкта. Для здійснення повороту камери або персонажа застосовуються тригонометричні функції синуса та косинуса, інтегровані в матрицю обертання. Перенесення ж об’єкта в іншу точку простору реалізується шляхом додавання відповідних значень до його поточних координат. Усі ці обчислення виконує відеокарта , яка виступає в ролі надпотужного калькулятора. Її архітектура спеціально заточена під паралельне виконання мільйонів операцій множення матриць щосекунди, що й дозволяє нам бачити плавний рух у відеоіграх.

Зображення у форматі без стиснення, відомі як RAW, мають величезний цифровий об’єм через надлишковість даних, що створює проблему для пам’яті пристроїв. Математика допомагає ефективно економити цей простір за допомогою різних методів. Формат PNG використовує стиснення без втрат, базуючись на пошуку повторів та алгоритмі Хаффмана. Математичний принцип тут простий: замість того, щоб записувати код білого пікселя сто разів поспіль, програма робить короткий запис про кількість повторів, а часто вживані кольори отримують коротші цифрові коди. Натомість формат JPEG використовує стиснення з втратами, яке ґрунтується на дискретному косинусному перетворенні. Цей алгоритм переводить дані зображення у частотну область, що дозволяє математично обчислити та видалити ті дрібні деталі й відтінки, які людське око все одно не здатне розрізнити, суттєво зменшуючи розмір файлу.

Цифровий світ - це не просто картинка, а складне багаторівневе рівняння. Програмування графіки доводить, що IT базується на «чистій» математиці. Розвиток алгоритмів, таких як нейромережі та технології DLSS, робить графіку ще досконалішою. Сьогодні знання геометрії та лінійної алгебри - це не просто шкільна програма, а справжній вхідний квиток у світ високих технологій, GameDev та аналізу даних.

## Література

1. Тотосько О. В., Микитишин А. Г. Комп’ютерна графіка: Навчальний посібник. Тернопіль: ТНТУ, 2010. 144 с.

2. Скиба О. П. Комп’ютерна графіка: Конспект лекцій для студентів. Тернопіль: ТНТУ, 2013. 88 с.

***А. Д. Гасюк***
*Національний університет "Львівська Політехніка"*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

# МАТРИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ ЯК ФУНДАМЕНТ ДЛЯ АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Математика — це не лише набір абстрактних формул, а універсальний інструмент для моделювання реальних процесів. Актуальність цієї роботи полягає у вивченні матричного числення як ключового методу аналізу складних багатовимірних систем. Матриці дозволяють структурувати хаотичні потоки даних, перетворюючи їх на чіткі математичні структури. Робота присвячена аналізу ролі матриць у розвитку сучасних технологій, економіки та систем безпеки, що дозволяє зрозуміти, як математичні відкриття минулого формують фундамент нашого майбутнього.

**Еволюція та математична структура матричних моделей**

Традиційна матриця — це прямокутна таблиця чисел, проте в науці вона розглядається як лінійний оператор, що здійснює трансформацію простору. Теорія матриць пройшла шлях від простого засобу розв'язання систем рівнянь до універсальної мови опису систем.

Кожна складна система складається з багатьох взаємопов'язаних елементів. Матриця дозволяє записати ці зв'язки у вигляді єдиного об'єкта A = $(a_{ij})$, де кожен елемент $a_{ij}$ відображає силу або характер впливу одного фактора на інший.

Завдання аналізу полягає у знаходженні таких характеристик, як визначник та власні значення. Наприклад, якщо власні значення матриці, що описує стан об'єкта, виходять за межі певного діапазону, система втрачає стійкість.

Сьогодні матричне числення є основою для «Big Data». Використання розріджених матриць великої розмірності дозволяє опрацьовувати мільйони записів одночасно, що раніше було технічно неможливим.

**Прикладне застосування: від економіки до безпеки**

Аналіз складних систем за допомогою матриць знаходить своє відображення у стратегічно важливих галузях людської діяльності.

Моделювання витрат: В економічному аналізі матриці використовуються для розрахунку балансу між галузями. Основне твердження моделі полягає в тому, що для стабільного розвитку держави необхідно підтримувати чітку пропорцію між ресурсами та кінцевим продуктом, що описується матричним рівнянням (I - A)x = y.

Інженерна стійкість (Метод скінченних елементів): У будівництві та цивільному захисті будь-яка споруда розглядається як сітка вузлів. Взаємодія між ними описується матрицею жорсткості. Це дозволяє моделювати поведінку

будівлі під впливом вібрацій або екстремальних температур, що має фундаментальне значення для запобігання катастрофам.

Цифрова обробка та зв'язок: Кожне цифрове зображення чи сигнал — це по суті матриця. Алгоритми, які ми використовуємо щодня (від стиснення фото до передачі даних у мережах 5G), базуються на операції множення матриць на спеціальні ядра згортки для фільтрації шумів та збереження якості.

Дослідження матричного числення демонструє, що в основі аналізу будь-якої складної системи лежать математичні структури, які дозволяють спрощувати складне до зрозумілих моделей. У першому випадку ми стикаємося з необхідністю опрацювання великих масивів даних, у другому — з прогнозуванням стійкості фізичних та економічних об'єктів. Використання матричних методів є не лише математичною потребою, а й ключовим стимулом для розвитку сучасних систем моніторингу та управління. Глибоке розуміння цієї дисципліни дозволяє будувати точні прогнози та ефективно реагувати на виклики, які ставить перед нами динамічне середовище.

**Література**

1. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць. - 2010.
2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричні обчислення. - 1999.
3. Странг Г. Лінійна алгебра та її застосування. – 2005.

***І. О. Самборський***
*Національний університет «Львівська політехніка»*
*Науковий керівник* ***І. В. Андрусяк****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ НЕСКІНЧЕННОГО СПУСКУ, МЕТОДУ ЧАКРАВАЛИ ТА ЧИСЕЛ ПЕЛЛЯ

Методи нескінченного спуску та чакравали є елегантними інструментами теорії чисел, що зберігають актуальність від античності до сьогодення та знаходять застосування в сучасній криптографії, комбінаториці й раціональних наближеннях ірраціональних чисел.

Мета роботи — проаналізувати математичну структуру, історичну еволюцію та сучасні застосування методу нескінченного спуску, методу чакравала і чисел Пелля, а також розкрити їхній зв'язок із ланцюговими дробами.

Метод нескінченного спуску (МНС) сформульований П'єром де Ферма у XVII ст., проте схожі ідеї відомі ще з піфагорійської школи. Суть: якщо припущення про існування розв'язку породжує нескінченну спадну послідовність натуральних чисел — виникає суперечність, адже $\mathbb{N}$ має найменший елемент.

Класичний приклад — ірраціональність $\sqrt{2}$ (Гіппас): з $\sqrt{2} = a/b$ у нескоротному дробі випливає, що $a$ і $b$ обидва парні — суперечність.

Два ключові застосування МНС: (1) рівняння $x^2 + y^2 = 3z^2$ має лише тривіальний розв'язок — аналіз за mod 3 показує, що $x, y, z$ всі діляться на 3, що породжує нескінченний спуск; (2) рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ не має розв'язків у $\mathbb{N}$: з примітивного розв'язку $(x; y; z)$ будується новий $(c; d; b)$ з $b < z$ — частковий випадок Великої теореми Ферма для $n = 4$.

**Рівняння Пелля та метод Чакравала**

Рівняння Пелля — $x^2 - ny^2 = \pm 1$, де $n$ — натуральне, не є точним квадратом. Назва виникла через помилку Ейлера; систематичне дослідження розпочав Брахмагупта близько 628 р. н.е.

Метод чакравала («колесо», за циклічною природою алгоритму) базується на тотожності Брахмагупти:

$$(x_1x_2 + ny_1y_2)^2 - n(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - ny_1^2)(x_2^2 - ny_2^2).$$

Алгоритм ітеративно «згортає» трійки розв'язків, щоразу обираючи $m \in \mathbb{N}$ з мінімальним $|m^2 - n|$, аж поки $t = 1$. Лагранж (1768) довів збіжність методу. Приклад: Бхаскара II знайшов мінімальний розв'язок $x^2 - 61y^2 = 1$: $x = 1\,766\,319\,049$, $y = 226\,153\,980$. Метод Лагранжа через ланцюгові дроби вимагає 21 кроку; чакравала є значно ефективнішою.

**Числа Пелля та ланцюгові дроби**

Числа Пелля $P_k$ — знаменники збіжних дробів ланцюгового розкладу $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$, що задаються формулою $P_k = [(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k] / (2\sqrt{2})$. Дроби 3/2; 7/5; 17/12; 41/29; 99/70 почергово задовольняють $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, наближаючи $\sqrt{2}$ з дедалі вищою точністю.

Практичний приклад — стандарт паперу ISO 216: відношення сторін форматів A0–A6 дорівнює $\sqrt{2}$, а формат A4 (297 × 210 мм) відповідає наближенню $99/70 \approx \sqrt{2}$, де 70 є числом Пелля.

МНС ефективно доводить неможливість цілочисельних розв'язків широкого класу діофантових рівнянь. Метод чакравала, розроблений індійськими математиками за сотні років до Лагранжа, перевершує ряд сучасних алгоритмів. Числа Пелля та їхній зв'язок із ланцюговими дробами забезпечують оптимальні раціональні наближення ірраціональних чисел і знаходять застосування від поліграфічних стандартів до криптографії.

**Література**

1. Barbeau E.J. Pell's Equation. — Springer-Verlag, 2003.
2. Edwards H.M. Fermat's Last Theorem. — Springer, 2000.
3. Lenstra H.W. Solving the Pell Equation // Notices of the AMS. — 2002. — Vol. 49, No. 2. — P. 182–192.
4. Bell E.T. Men of Mathematics. — Simon & Schuster, 1937. — 608 p.

***В. І. Чугунов***
*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,*
*Науковий керівник* ***Г. Я. Тулученко****, д.т.н., професор, професор кафедри вищої математики*

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ТИПОГРАФСЬКІЙ СПРАВІ: ВІД ДРУКАРСЬКОГО ВЕРСТАТА ЙОГАННЕСА ГУТЕНБЕРГА ДО СУЧАСНОСТІ

Винахід друкарського верстата Йоганнес Гутенберг у XV столітті став не лише технологічним проривом, але й прикладом застосування математичних принципів у техніці [1–2]. Його розробка дозволила стандартизувати процес відтворення тексту та значно підвищити швидкість поширення інформації [3–4]. Сучасний аналіз дозволяє розглядати цей винахід крізь призму геометрії, механіки, комбінаторики та статистик.

У верстці сторінок інкунабул (ранніх друкованих книг) часто спостерігаються пропорції, близькі до золотого перетину $\left(\varphi \approx 1{,}618\right)$ або простих раціональних співвідношень (наприклад, 2:3), які за деякими дослідженнями нагадують золотий перетин (φ ≈ 1,618) [5–6].

Одним із ключових аспектів є використання геометрії при створенні друкарських форм. У верстці сторінок застосовувалися пропорції, близькі до золотого перетину $\left(\varphi \approx 1{,}618\right)$, який визначається формулою: $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)\big/2$. Це ірраціональне число виникає як розв'язок квадратного рівняння $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Його застосування дозволяє мінімізувати візуальну «напруженість» сторінки та забезпечує оптимальний розподіл простору [6–7].

Крім золотого перетину, використовувалося число $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, яке є основою для побудови масштабованих форматів сторінок [6]. Якщо сторони прямокутника мають відношення $1:\sqrt{2}$, то при поділі навпіл пропорції зберігаються. Це можна записати як: $\left(1/\sqrt{2}\right):1 = 1:\sqrt{2}$. Така властивість активно використовується і в сучасних стандартах паперу (наприклад, у форматі А4) [8–9].

Геометрія літер у металевому наборі базувалася на практичних геометричних побудовах [10–11]. Сучасною мовою форму літер можна описати за допомогою рівнянь, наприклад, літера «О» наближено описується рівнянням кола: $x^2 + y^2 = r^2$.

Головним відкриттям Гутенберга були рухомі літери (metal type), які дозволили реалізувати принцип комбінаторної генерації текстів [2, 8]. Якщо алфавіт містить *N* символів, а довжина тексту становить *k* символів, то кількість можливих комбінацій становить: $N^k$. Це означає експоненціальне зростання

кількості можливих текстів, що робить систему універсальною та надзвичайно гнучкою.

При підготовці шрифтових кас враховувалася частота появи літер. Перші друкарі інтуїтивно використовували залежність: якщо $p_i$ – ймовірність появи *i*-ої літери, тоді математичне сподівання кількості цієї літери: $n_i = k \cdot p_i$.

У сучасному цифровому друці та комп'ютерній типографіці широко застосовуються математичні методи [7, 11]. Наприклад, перетворення Фур'є використовується для обробки зображень і растрування:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) dx,$$

де $f(x)$ – вихідний сигнал або функція розподілу яскравості (у контексті растрування); $F(\omega)$ – спектральна щільність (амплітуда частотних компонент); $\omega$ – просторова частота; $i$ – уявна одиниця; $x$ – просторова координата;

а криві Безьє – для опису контурів літер:

$$B(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2(1 - t)tP_1 + t^2 P_2,$$

де $B(t)$ – точка на кривій, що відповідає параметру *t*; *t* – параметр, що змінюється від 0 до 1; $P_0$, $P_2$ – опорні точки (початок і кінець сегмента літери); $P_1$ – керуюча точка, що визначає вигин кривої.

Гутенберг не винайшов друкарський прес — він його адаптував. У регіоні Рейну (Майнц), де він працював, виноградарство було широко поширене, і гвинтові преси для віджиму винограду були звичним обладнанням. Саме цей механізм, який дозволяв рівномірно прикладати велике зусилля до плоскої поверхні, Гутенберг модифікував для друку [2, 4].

З механічної точки зору друкарський верстат Гутенберга реалізує перетворення обертального руху важеля в поступальний рух плити (platen) за допомогою гвинтового преса (рис. 1). Осьова сила тиску *F* в ньому визначається наближено через гвинтовий механізм (без урахування тертя) [4, 10]:

$$F \approx (2\pi T)/p,$$

де *T* – момент сили, *p* – крок різьби.

Гутенберг додав можливість швидко вставляти та виймати аркуш паперу, а також забезпечувати стабільний тиск на набір рухомих літер. Таким чином, технологія, що століттями використовувалася у виноробстві, стала основою першого механізованого друкарського верстата в Європі.

Цей приклад яскраво ілюструє, як Гутенберг поєднав уже існуючі технології з власними інноваціями (рухомий металевий шрифт і спеціальне масло-чорнило), створивши революційний винахід.

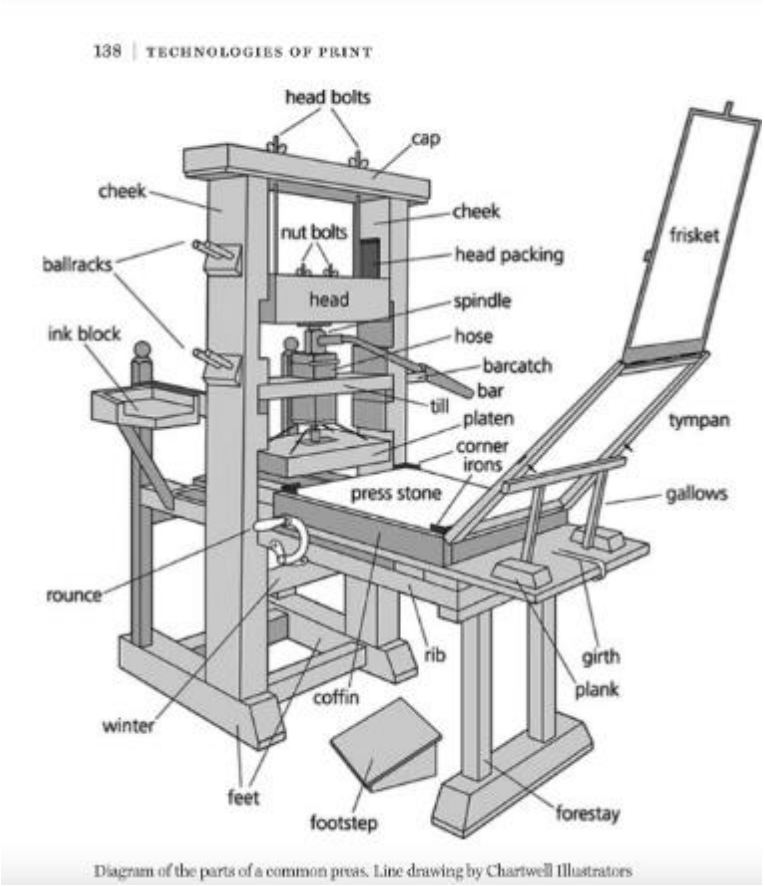



**Рисунок 1** – Схема будови та механіки типового дерев'яного друкарського верстата (common press) XVII–XVIII століть.

*Джерело: Chartwell Illustrators. Santa Clara University Digital Exhibits. Режим доступу: https://dh.scu.edu/exhibits/exhibits/show/final-project--opt-2--victory/early-printing-press-era*

Отже, друкарський верстат Гутенберга можна розглядати як початкову точку розвитку складних математичних систем обробки інформації. Поєднання геометрії, ірраціональних чисел, комбінаторики, теорії ймовірностей і механіки зробило цей винахід фундаментом сучасних технологій друку та цифрової графіки. Його значення виходить далеко за межі історії техніки і безпосередньо пов'язане з розвитком математичного моделювання.

## Література

1. Eisenstein E. L. The Printing Press as an Agent of Change. Cambridge : Cambridge University Press, 1979. 2 vols.

2. Kapr A. Johann Gutenberg: The Man and His Invention / transl. by D. Martin. Aldershot : Scolar Press, 1996. 320 p.

3. Britannica. Johannes Gutenberg [Електронний ресурс] // Encyclopædia Britannica. – Режим доступу: https://www.britannica.com/biography/Johannes-Gutenberg (дата звернення: 30.03.2026).

4. Britannica. Printing press [Електронний ресурс] // Encyclopædia Britannica. – Режим доступу: https://www.britannica.com/topic/printing-press (дата звернення: 30.03.2026).

5. Man J. Gutenberg: How One Man Remade the World with Words. New York : John Wiley & Sons, 2002. 312 p.

6. Tschichold J. The Form of the Book: Essays on the Morality of Good Design. London : Lund Humphries, 1991.

7. Wikipedia contributors. Canons of page construction [Електронний ресурс] // Wikipedia, The Free Encyclopedia. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Canons_of_page_construction (дата звернення: 30.03.2026).

8. Johnson S. Where Good Ideas Come From: The Natural History of Innovation. New York : Riverhead Books, 2010.

9. Українська LibreTexts. Друкарський верстат [Електронний ресурс] // LibreTexts Україна. 2023. – Режим доступу: https://ukrayinska.libretexts.org/Гуманітарні_науки/Музика/Книга:*Музична_вдячність_I*(Lumen)/01:_Середньовіччя_та_Відродження/1.18:_Друкарський_верстат (дата звернення: 30.03.2026).

10. World History Encyclopedia. Printing Press [Електронний ресурс] // World History Encyclopedia. 2022. – Режим доступу: https://www.worldhistory.org/Printing_Press/ (дата звернення: 30.03.2026).

11. History.com. Invention of the Printing Press [Електронний ресурс] // A&E Television Networks. 2023. – Режим доступу: https://www.history.com/topics/inventions/printing-press (дата звернення: 30.03.2026).

***Р. М. Шмигельський, Н. В. Валага***
*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*Науковий керівник* ***Л. Ю. Фірман****, старший викладач кафедри вищої математики механіко-математичного факультету.*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В АВТОМОБІЛЬНІЙ БЕЗПЕЦІ: ЕВОЛЮЦІЯ СИСТЕМ ЗАХИСТУ ЖИТТЯ

Автомобільний транспорт залишається джерелом підвищеної небезпеки, проте технології неухильно знижують рівень смертності та важкого травматизму в дорожньо-транспортних пригодах (ДТП) [1]. За даними Патрульної поліції України, протягом 2025 року внаслідок майже 26 тисяч ДТП на вітчизняних дорогах загинуло понад 3000 осіб. Мета даної роботи – дослідити еволюцію використання математичного апарату в системах автомобільної безпеки крізь призму минулого, теперішнього та майбутнього.

У минулому захист базувався на законах класичної механіки для зниження тяжкості наслідків аварії та збереження життя учасників дорожнього руху під час уже скоєної ДТП. Математичні розрахунки зводилися до обчислення кінетичної енергії автомобіля:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

де $m$ — маса автомобіля, $v$ — його швидкість.

При ударі ця величезна енергія має кудись подітися. Щоб уникнути миттєвої зупинки, яка є критичною для внутрішніх органів людини, інженери почали розраховувати зони запрограмованої деформації кузова. За допомогою диференціального та інтегрального числення інженери моделювали поступове зминання металу, що дозволяло розтягнути час удару та знизити перевантаження (виражені в $g$) до безпечних меж. Це математичне обґрунтування (разом із пасками безпеки) привело до зниження ризику миттєвої смерті та отримання критичних травм при фронтальних ударах на 45-50% [2].

У наш час, безпека дорожнього руху керується мікропроцесорами, які щосекунди розв'язують складні системи рівнянь для запобігання ДТП. Наприклад, системи ABS та ESP постійно обчислюють коефіцієнт ковзання колеса $\lambda$:

$$\lambda = \frac{v - \omega R}{v}$$

де $v$ – лінійна швидкість автомобіля, $\omega$ – кутова швидкість обертання колеса, $R$ – радіус колеса.

При наближенні $\lambda$ до 1 (повне блокування), мікроконтролери алгоритмічно, використовуючи принципи пропорційно-інтегрально-диференціальних-регуляторів (ПІД-регуляторів), за мілісекунди коригують тиск гідравліки у гальмах. Водночас матричні обчислення безперервно обробляють масиви даних із датчиків швидкості та гіроскопів, аналізуючи кут повороту керма та бічне прискорення. Завдяки високій частоті дискретизації система здатна миттєво

стабілізувати авто. Ця "математика в реальному часі" зменшила кількість фатальних одиночних ДТП майже на 50% (завдяки ESP) та ДТП із тяжкими травмами на 15-20% (завдяки ABS) [3].

Майбутнє безпеки — це предиктивна аналітика та комп'ютерний зір, реалізовані на базі згорткових нейромереж. Сучасні системи автономного водіння генерують гігабайти телеметричних даних щохвилини. Для їх обробки використовуються спеціалізовані обчислювальні платформи, які виконують мільйони тензорних операцій за секунду. Бортові системи використовують ланцюги Маркова та баєсівські мережі довіри для безперервного перерахунку ймовірності зіткнення. Складні моделі машинного навчання (натреновані на величезних масивах даних за допомогою сучасних фреймворків) розпізнають пішоходів та об'єкти, самостійно активуючи екстрене гальмування швидше за людську реакцію.

Оскільки понад 90% ДТП спричинені через людський фактор, повноцінне автономне керування здатне знизити глобальну смертність на дорогах на 90-94%, перетворивши фатальні інциденти на статистичну похибку [4].

Отже, підсумовуючи все вище наведене, еволюція транспортної безпеки— це перехід від розрахунку деформації конструкційних матеріалів до обробки даних нейромережами. Математика минулого вдвічі знизила рівень смертності та важкого травматизму під час ДТП, алгоритми сьогодення масово запобігають зіткненням, а ШІ майбутнього здатний практично їх ліквідувати, роблячи математику головним інструментом збереження здоров’я та життів на дорозі.

**Література**

1. Офіційний репозиторій Всесвітньої організації охорони здоров'я. URL: World Health Organization. (2023). *Global status report on road safety 2023*. Geneva: World Health Organization.
2. Офіційний портал Національного центру статистики та аналізу (NCSA) при Міністерстві транспорту США. URL: Kahane, C. J. (2015). *Lives saved by vehicle safety technologies and associated Federal Motor Vehicle Safety Standards, 1960 to 2012* (Report No. DOT HS 812 069). National Highway Traffic Safety Administration.
3. Офіційний портал Національного центру статистики та аналізу (NCSA) при Міністерстві транспорту США. URL: Dang, J. N. (2004). *Preliminary Results Analyzing the Effectiveness of Electronic Stability Control (ESC) Systems* (Report No. DOT HS 809 790).
4. Офіційний портал Національного центру статистики та аналізу (NCSA) при Міністерстві транспорту США. URL: Singh, S. (2015). *Critical reasons for crashes investigated in the National Motor Vehicle Crash Causation Survey* (Traffic Safety Facts Crash•Stats. Report No. DOT HS 812 115). National Highway Traffic Safety Administration.

***А. Р. Селіверстова, Ю. О. Тимочко***
*Львівський національний університет імені Івана Франка*
*Науковий керівник* ***А. Ю. Фірман****, старший викладач кафедри вищої математики механіко-математичного факультету*

## МЕЖІ МАТЕМАТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ: ЯК ЛОГІКА ХАОСУ ДОПОМАГАЄ ЗАПОБІГАТИ КАТАСТРОФАМ

Сучасна цивілізація покладає великі сподівання на потужність суперкомп'ютерів та обчислювальні алгоритми. Здавалося б, знаючи закони фізики та маючи достатньо датчиків, ми мали б прогнозувати природні катастрофи з неймовірною точністю. Проте практика доводить протилежне: метеорологічні прогнози залишаються імовірнісними, а точне місце та час стихійного лиха часто стають несподіванкою. Причина криється не в недостатній потужності техніки, а у фундаментальній властивості природи — нелінійності. Природні процеси є динамічними системами, де найменша зміна параметрів на початку призводить до колосальних розбіжностей у фіналі.

Зазвичай, чуючи слово «хаос», суспільство уявляє собі повний безлад, щось випадкове та непередбачуване, що не підпорядковується жодним правилам. Проте у математичному розумінні хаос — це не відсутність порядку, а стан надзвичайної чутливості динамічної системи до початкових умов [1]. Це явище отримало назву «ефект метелика» завдяки метеорологу Едварду Лоренцу, який зауважив: навіть такий мізерний вплив, як помах крил метелика в Бразилії, через ланцюжок нелінійних зв’язків може зрештою спричинити торнадо в Техасі [3]. У цій метафорі криється глибокий математичний зміст: мінімальне коливання в одній частині системи може спричинити масштабні зміни в іншій. Математично це описується як детермінований хаос [5] — система розвивається за чіткими законами та рівняннями, але через свою нелінійність стає практично непередбачуваною на довгостроковий період.

Щоб зрозуміти, як поводиться хаос, математики використовують поняття атракторів [4] — це «улюблений стан» системи, до якого структура завжди тяжіє. Для порівняння: звичайний маятник годинника завжди зупиняється в одній точці спокою. Це приклад простого атрактора, де фінал системи є очевидним і стабільним. Природні ж процеси працюють інакше: ці процеси ніколи не зупиняються і не повторюються в точності, але при цьому не перетворюються на повний хаос. Математично це описується як дивні атрактори. Найвідоміший із них — атрактор Лоренца [1]. Візуально візерунок такого тяжіння нагадує метелика: два кільця або «крила», що з’єднані в центрі. Кожне «крило» представляє певний стан системи (наприклад, сонячну погоду або шторм). Метелик тут згадується знову не випадково: система постійно «перелітає» з одного стану в інший, ніколи не повторюючи свій шлях двічі. Ми не знаємо, в якій саме точці «крила» опиниться система завтра, але ми точно знаємо форму самих крил. Тобто математика показує нам межі, за які стихія не вийде.

Розуміння цих меж доводить, що створити ідеальну модель прогнозу на роки вперед неможливо. Жоден комп'ютер не зможе врахувати мільярди дрібних факторів одночасно. По-друге, ми ніколи не зможемо виміряти початкові дані з абсолютною точністю. Будь-яка похибка приладу з часом перетворюється на величезну помилку прогнозу. Проте математика хаосу запропонувала вихід — ансамблеве прогнозування [2]. Замість одного точного розрахунку запускається серія симуляцій (ансамбль) з варіативними початковими умовами в межах допустимої похибки вимірювання. Результатом такого підходу є не конкретна дата чи показник, а імовірнісний розподіл подій. Якщо значна частина моделей ансамблю вказує на розвиток небезпечного процесу, це є математично обґрунтованим сигналом для служб цивільного захисту про високу ймовірність загрози. Такий підхід дозволяє рятувальникам розробляти стратегії реагування на основі оцінки ризиків та найгірших сценаріїв, що є значно ефективнішим за очікування єдиного точного показника, який у нелінійних системах апріорі є недостовірним.

Отже, математика хаосу вчить нас, що світ складніший за лінійні рівняння. Майбутнє не в точному розрахунку однієї траєкторії, а в управлінні ризиками. Розуміння нелінійності процесів дозволяє створювати системи захисту, які є гнучкими та стійкими до непередбачуваних змін. Математика не дає нам кришталеву кулю для передбачення майбутнього, але вона дає інструменти для виживання в умовах повної невизначеності.

**Література**

1. Chaos Theory and the Lorenz Attractor. Britannica Academic : енциклопедія. URL: https://www.britannica.com/science/chaos-theory (дата звернення: 21.03.2026).

2. Ensemble forecasting. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) : офіційний веб-ресурс. URL: https://www.ecmwf.int/en/research/modelling-and-prediction/quantifying-forecast-uncertainty (дата звернення: 21.03.2026).

3. The Butterfly Effect: This Is Why We Can't Predict the Weather. SciJinks. National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) : веб-сайт. URL: https://mpfi.org/a-butterfly-effect/ (дата звернення: 21.03.2026).

4. Атрактор : Вікіпедія : вільна енциклопедія. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Атрактор (дата звернення: 21.03.2026).

5. Детермінований хаос : *Вікіпедія : вільна енциклопедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Детермінований_хаос (дата звернення: 21.03.2026).

***А. А. Прочий***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# МАТЕМАТИЧНИЙ БАЗИС КІБЕРФІЗИЧНИХ СИСТЕМ: МОДЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ, ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ТА КРИПТОГРАФІЧНОГО ЗАХИСТУ В СМАРТФОНАХ

У сучасному постіндустріальному суспільстві смартфони еволюціонували з простих засобів голосового зв'язку на надпотужні портативні обчислювальні комплекси, які координують майже всі аспекти життєдіяльності людини - від фінансових транзакцій та навігації до біометричної автентифікації й взаємодії зі штучним інтелектом. Попри те, що пересічний користувач сприймає мобільний пристрій крізь призму ергономічного інтерфейсу додатків, його архітектура, апаратне та програмне забезпечення функціонують виключно завдяки безперервному виконанню мільярдів математичних операцій у реальному часі.

Математика в архітектурі мобільних систем виступає універсальним базисом, що дозволяє квантифікувати фізичні процеси (електромагнітні хвилі, світлові потоки камери, акустичні коливання) та переводити їх у строго детерміновані або стохастичні цифрові моделі. Актуальність дослідження цієї теми зумовлена необхідністю глибокого аналізу міждисциплінарних зв'язків між теоретичними розділами математики та прикладними інженерними рішеннями, оскільки будь-яке технологічне вдосконалення смартфонів - від підвищення швидкодії процесора до впровадження обчислювальної фотографії - критично залежить від розробки та оптимізації нових математичних алгоритмів.

Одним із найбільш математично насичених аспектів функціонування сучасного смартфона є цифрова обробка сигналів (DSP) та обчислювальна фотографія. Отримання якісного знімка з мініатюрної матриці камери мобільного пристрою є результатом складних математичних трансформацій, які нівелюють фізичні обмеження оптики. Процеси деталізації зображення, динамічного придушення шумів, реалізації режиму HDR та стабілізації базуються на методах лінійної алгебри, математичного аналізу та теорії ймовірностей. Обробка просторових частот зображення та кодування аудіо- й відеосигналів для бездротової передачі (наприклад, у мережах 5G або Wi-Fi) здійснюється за допомогою дискретного швидкого перетворення Фур'є (FFT) та дискретного косинусного перетворення (DCT). Зокрема, перетворення Фур'є дозволяє перевести сигнал із часової або просторової області у частотну для ефективного відсікання шумів:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Цей алгоритм забезпечує високу щільність стиснення медіаданих (формати JPEG, HEIC, MP4) без суттєвої втрати якості, мінімізуючи навантаження на флеш-пам'ять пристрою та канали зв'язку.

Паралельно з обробкою сигналів, фундаментальну роль у програмній архітектурі смартфонів відіграють оптимізаційні алгоритми та дискретна математика. Функціонування операційних систем (Android чи iOS) пов'язане з плануванням потоків обчислень на багатокерневих процесорах, що описується методами теорії масового обслуговування та теорії графів (задачі оптимізації розподілу ресурсів). Робота систем супутникової навігації (GPS, Galileo) всередині картографічних сервісів цілком спирається на методи аналітичної геометрії та трилатерації - визначення координат пристрою у тривимірному просторі шляхом розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, які описують перетин сфер, де радіусами є відстані до кількох орбітальних супутників, розраховані на основі часових затримок сигналів.

Важливим вектором інтеграції вищої математики у смартфони є сфера інформаційної безпеки, криптографічного захисту та біометрії. Надійне шифрування приватних листувань у месенджерах, захист безконтактних платежів (NFC) та безпека операційної системи базуються на алгоритмах асиметричної криптографії та сучасній теорії чисел. Безпека протоколів шифрування (наприклад, RSA) тримається на обчислювальній складності задачі факторизації надвеликих цілих чисел - знаходження простих множників для композитного числа $n = p \cdot q$. У сучасних смартфонах для підвищення швидкодії та криптостійкості застосовується криптографія на еліптичних кривих (ECC). Вона базується на алгебраїчній структурі еліптичних кривих над скінченними полями, що описуються рівнянням виду:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

Задача дискретного логарифмування в групі точок еліптичної кривої є обчислювально нерозв'язною за прийнятний час для сучасних суперкомп'ютерів, що гарантує абсолютну конфіденційність даних користувача при мінімальних енерговитратах мобільного процесора. Крім того, алгоритми розпізнавання обличчя (FaceID) або відбитків пальців використовують матричні трансформації, метод головних компонент (PCA) та геометричне вирівнювання антропометричних точок.

Сучасний етап розвитку мобільних технологій ознаменований інтеграцією безпосередньо в кристали процесорів спеціалізованих нейромережевих модулів (NPU). Робота алгоритмів штучного інтелекту на пристрої (On-Device AI) - від інтелектуального розпізнавання голосу до генерації тексту та автоматичного покращення нічних знімків - є тріумфом прикладної математики. З обчислювальної точки зору, функціонування згорткових та трансформерних нейронних мереж є послідовним виконанням операцій тензорної алгебри, багатовимірного диференціального числення та математичної оптимізації. Параметри нейромереж оптимізуються через мінімізацію цільових функцій втрат за допомогою алгоритму зворотного поширення помилки (backpropagation), що базується на ланцюговому правилі взяття похідних. Математична оптимізація

самих моделей за допомогою квантування (переведення обчислень із плаваючою комою FP32 у фіксовану 8-бітну точність INT8) дозволяє запускати складні інтелектуальні сервіси безпосередньо на обмежених апаратних потужностях смартфона без надмірного розряджання акумулятора.

Таким чином, математичний апарат є першоосновою, головним конструктивним архітектором і рушійною силою розвитку мобільних технологій та смартфонів. Застосування методів лінійної та тензорної алгебри, диференціальних рівнянь, інтегральних перетворень Фур'є, теорії чисел, теорії графів та математичної статистики дозволяє успішно вирішувати критичні інженерні завдання: від забезпечення максимальної швидкодії апаратних платформ та побудови стійких систем криптографічного захисту до реалізації інтелектуальних інтерфейсів на базі штучного інтелекту. Подальша еволюція мобільних пристроїв та перехід до архітектур шостого покоління зв'язку (6G) і квантових обчислень демонструють, що значення математичного моделювання у цій сфері безперервно зростатиме, виступаючи містом між теоретичними науковими відкриттями та практичним комфортом цифрового суспільства.

## Література

1. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Volume 1: Fundamental Algorithms. - 3rd ed. - Reading: Addison-Wesley, 2019. - 650 p.
2. Smith J., Jones M. Mathematical Foundations of Mobile Computing and Signal Processing // MIT Technology Review. - 2023. - Vol. 28, No. 2. - P. 102–115.
3. Stallings W. Cryptography and Network Security: Principles and Practice. - 8th ed. - Upper Saddle River: Pearson, 2022. - 752 p.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Рівест Р., Стайн К. Вступ до алгоритмів. - К.: К.І.С., 2021. - 1288 с.
5. Сергієнко І. В. Математичні методи та комп'ютерні технології в моделюванні складних систем. - К.: Наукова думка, 2023. - 416 с.

***Р. С. Коробка***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АЛГОРИТМІЧНІ ОСНОВИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СУЧАСНИХ СОЦІАЛЬНИХ ПЛАТФОРМ

У сучасну цифрову епоху глобальні соціотехнічні платформи перетворилися на надскладні інформаційні екосистеми, що керують комунікаційними, економічними та когнітивними процесами суспільства. Щоденна діяльність мільярдів користувачів генерує колосальні масиви слабкоструктурованих даних (Big Data), ефективна обробка яких у реальному часі була б неможливою без залучення фундаментального математичного апарату. Сучасні соціальні медіа функціонують не як пасивні дошки оголошень, а як динамічні інтелектуальні системи, чия архітектура повністю побудована на математичних моделях. Математика в цьому контексті виступає головним інструментом квантифікації людської поведінки, дозволяючи переводити абстрактні соціальні взаємодії, психологічні преференції та інформаційні потоки у строгі матричні обчислення, стохастичні матриці й оптимізаційні задачі. Актуальність дослідження цієї проблематики зумовлена необхідністю глибокого теоретичного осмислення та математичної формалізації внутрішніх механізмів, які визначають архітектуру цифрового простору, керують людською увагою та безпосередньо формують сучасне інформаційне середовище.

Ключовим операційним вузлом будь-якої соціальної платформи є алгоритми динамічного формування персоналізованої стрічки новин. Замість хронологічного виведення публікацій сучасні системи застосовують складні прогностичні моделі, які оцінюють імовірність цільової дії (лайка, репосту, тривалого перегляду чи написання коментаря) для кожної пари «користувач–допис». Математично цю задачу можна представити як максимізацію функції очікуваної цінності контенту для конкретного суб'єкта. Алгоритм оперує багатовимірними векторами ознак користувача $\mathbf{u}$ та публікації $\mathbf{p}$. Розрахунок інтегрального рейтингу Score найчастіше базується на модифікаціях логістичної регресії або факторизаційних машин, де підсумкова оцінка є скалярним добутком векторів у латентному просторі з урахуванням часового згасання інтересу, що описується експоненціальною функцією:

$$\text{Score}(u,p) = \sigma(\mathbf{w}^T \cdot [\mathbf{u},\mathbf{p}]) \cdot e^{-\lambda(t_{\text{current}} - t_{\text{pub}})}$$

У цій моделі $\sigma(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ є нелінійною сигмоїдальною функцією активації, яка переводить абстрактні вагові оцінки у простір ймовірностей $[0,1]$, $\mathbf{w}$ - вектор параметрів моделі, що безперервно коригується за допомогою методів стохастичного градієнтного спуску (SGD), а коефіцієнт $\lambda$ визначає швидкість старіння інформації. Завдяки цьому математичному апарату досягається максимальне утримання уваги аудиторії всередині платформи.

Паралельно із формуванням стрічки здійснюється безперервний інтелектуальний аналіз та прогнозування поведінки користувачів, який спирається на методи математичної статистики, теорії ймовірностей та марковських процесів. Послідовність дій індивіда в мережі (наприклад, перехід між вкладками, кліки на лінки, зупинка скролінгу) моделюється як ланцюг Маркова вищих порядків, де ймовірність здійснення наступного кроку залежить від фіксованої передісторії. Збираючи статистичні матриці переходів, математичні алгоритми обчислюють вектори поведінкових профілів, сегментують аудиторію за допомогою кластерного аналізу (алгоритми $k$-середніх, DBSCAN) та будують криві розподілу щільності ймовірності часу перебування на платформі. Це дозволяє здійснювати прогнозний аналіз відтоку користувачів (churn rate prediction) та превентивно корегувати функціональні властивості інтерфейсу.

Надзвичайно потужним математичним інструментом у структурі соціальних медіа є рекомендаційні системи, чиє завдання полягає у розширенні мережі зв'язків та пропонуванні цільового контенту. Математичним базисом таких систем є методи колаборативної фільтрації (collaborative filtering) та розрідженої матричної факторизації, такі як сингулярний розклад матриць (SVD). Глобальна соціальна мережа формалізується у вигляді гігантської розрідженої матриці взаємодій $R$ розмірністю $M \times N$, де рядки відповідають користувачам, а стовпці - об'єктам (групам, медіафайлам, іншим аккаунтам). Задача рекомендації зводиться до апроксимації цієї матриці через добуток двох матриць низького рангу $P$ та $Q$, які відображають приховані (латентні) фактори інтересів:

$$R \approx P \cdot Q^T$$

Для вимірювання близькості між різними суб'єктами або об'єктами у багатовимірному просторі ознак математично розраховується косинусна схожість (cosine similarity) або коефіцієнт кореляції Пірсона. У сучасних реалізаціях для побудови рекомендацій дедалі частіше використовуються графові нейронні мережі (GNN), які виконують операції згортки безпосередньо на топологічній структурі соціального графа, враховуючи не лише прямі вподобання індивіда, але й транзитивні інтереси його друзів другого та третього порядків.

Окрім генерації розважального контенту, математичні методи виконують фундаментальну захисну функцію у сфері кібербезпеки, модерації контенту та протидії гібридним загрозам. Завдання автоматичного виявлення ботів, спам-розсилок та скоординованої неавтентичної поведінки вирішується за допомогою аналізу топології соціального графа та методів дискретної математики. Розрахунок таких глобальних та локальних метрик графа, як центральність за посередництвом (betweenness centrality), близькісна центральність (closeness centrality) та коефіцієнт кластеризації, дозволяє алгоритмам ідентифікувати аномальні щільні підграфи, характерні для штучно створених бот-мереж. Для модерації текстового контенту, виявлення мови ворожнечі (hate speech) або дезінформації застосовуються стохастичні моделі обробки природної мови (NLP). Тексти векторизуються у багатовимірні ембединг-простори, після чого глибокі згорткові та трансформерні нейромережі через обчислення механізмів

внутрішньої уваги (self-attention) класифікують контент на предмет порушення правил безпеки з високим рівнем статистичної значущості.

Широке впровадження математичних алгоритмів у роботу соціальних мереж має глибокі соціально-психологічні наслідки для всього глобального соціуму. Математична оптимізація систем утримання уваги, яка максимізує метрики залученості, часто призводить до виникнення так званих «інформаційних бульбашок» (filter bubbles) та ехо-камер, де користувачі бачать лише ту інформацію, яка підтверджує їхні початкові упередження. Це явище математично описується як самопідсилюваний стохастичний процес із позитивним зворотним зв'язком, що може вести до поляризації суспільства. Розуміння математичних принципів, які лежать в основі цих процесів, є критично важливим для розробки методів протидії алгоритмічним спотворенням та побудови збалансованого і безпечного цифрового простору.

Таким чином, математичний апарат є першоосновою, головним архітектором та рушійною силою функціонування сучасних соціальних мереж. Застосування методів лінійної алгебри, теорії графів, теорії ймовірностей, математичної статистики та глибокого машинного навчання дозволяє успішно вирішувати масштабні прикладні задачі: від високоточної персоналізації новинних стрічок та побудови стійких рекомендаційних систем до автоматизованого виявлення кіберзагроз і модерації терабайтних потоків мультимедійних даних. Подальша еволюція соціальних платформ та інтеграція передових моделей штучного інтелекту демонструють, що значення математичного моделювання у цій сфері безперервно зростатиме, вимагаючи створення нових міждисциплінарних підходів для забезпечення стабільності та безпеки глобального цифрового суспільства.

**Література**

1. Boyd D., Ellison N. Social Network Sites: Definition, History, and Scholarship // Journal of Computer-Mediated Communication. - 2018. - Vol. 13, No. 1. - P. 210–230.
2. Smith J., Jones M. Algorithmic Optimization in Social Media Feeds // MIT Technology Review. - 2023. - Vol. 26, No. 3. - P. 45–52.
3. Russell S., Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. - 4th ed. - Upper Saddle River: Prentice Hall, 2020. - 1166 p.
4. Ткаченко О. В., Кузнецов Ю. М. Математичні методи аналізу великих даних у соціальних мережах // Комп'ютерні науки та системний аналіз. - 2022. - № 2. - С. 78–89.
5. Носков В. В. Теорія графів та інструменти веб-аналітики. - Львів: Світ, 2021. - 204 с.

***Д. О. Легкун, В. П. Притула***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних наук*

## ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ ВЕДЕННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОГО ВОГНЮ

У сучасних умовах ведення бойових дій, що характеризуються високою динамічністю, активним застосуванням засобів контрбатарейної боротьби та необхідністю швидкого прийняття рішень, особливого значення набуває використання математичних методів моделювання бойових ситуацій. Одним із таких підходів є теорія ігор, яка дозволяє формалізувати протиборство сторін та визначити раціональні стратегії поведінки в умовах невизначеності. Зокрема, для задач, у яких один із гравців має обмежену кількість стратегій, ефективним є застосування графоаналітичного методу.

Розглянемо модельну задачу вибору режиму ведення вогню артилерійським підрозділом в умовах протидії противника. Нехай артилерійський підрозділ (гравець А) має дві альтернативи: $A_1$ – інтенсивний короткочасний вогневий наліт та $A_2$ – тривалий менш інтенсивний вогонь. Противник (гравець В) може реалізувати одну з трьох стратегій: $B_1$ – негайне відкриття контрбатарейного вогню, $B_2$ – маневр (зміна позиції), $B_3$ – укриття та очікування. Виграші гравця А задаються матрицею

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай p – ймовірність застосування стратегії $A_1$, тоді 1−p – ймовірність використання стратегії $A_2$.

Середній виграш артилерійського підрозділу залежно від вибору противника визначається як математичне сподівання. Для кожної стратегії противника отримаємо відповідні функції виграшу:

$$H_1(p) = 6p + 3(1-p) = 3 + 3p,$$
$$H_2(p) = 2p + 5(1-p) = 5 - 3p,$$
$$H_3(p) = 4p + 1(1-p) = 1 + 3p.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження такого значення параметра p, при якому максимізується мінімальний виграш:

$$V = \max_{0 \le p \le 1} \min\{H_1(p), H_2(p), H_3(p)\}.$$

Графоаналітичний метод передбачає побудову графіків лінійних функцій $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ на відрізку [0,1] та визначення нижньої огинаючої для цих прямих. Оптимальна стратегія відповідає точці, у якій досягається максимум цієї огинаючої.

Порівняння функцій $H_1(p)$ та $H_3(p)$ дає

$$H_1(p) - H_3(p) = (3 + 3p) - (1 + 3p) = 2 > 0,$$

що виконується для всіх $p \in [0,1]$. Отже,

$$H_1(p) > H_3(p)$$

на всьому інтервалі, тобто стратегія $B_1$ не визначає мінімальний виграш і не входить до нижньої огинаючої. Таким чином, задача зводиться до аналізу двох функцій:

$$V = \max_{0 \le p \le 1} \min\{H_2(p), H_3(p)\}.$$

Оптимальне значення параметра p визначається з умови рівності цих функцій:

$$5 - 3p = 1 + 3p$$

Звідси

$$6p = 4, \quad p = \frac{2}{3}.$$

Підставляючи знайдене значення у функцію виграшу, отримуємо ціну гри:

$$V = 1 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 3.$$

Отже, оптимальна змішана стратегія артилерійського підрозділу полягає у застосуванні інтенсивного короткочасного вогневого нальоту з ймовірністю $\frac{2}{3}$ та тривалого вогню з ймовірністю $\frac{1}{3}$. Відповідна ціна гри становить 3 умовні одиниці ефективності.

Важливо відзначити, що сучасні цифрові платформи, зокрема Desmos, значно розширюють можливості дослідження подібних задач. Використання таких інструментів дозволяє оперативно будувати графіки функцій $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, візуалізувати їх взаємне розташування та наочно визначати нижню огинаючу. Це сприяє кращому розумінню сутності графоаналітичного методу, дозволяє швидко перевіряти аналітичні результати та мінімізує ймовірність помилок.

З військової точки зору отриманий результат свідчить про доцільність варіювання режимів ведення вогню для ускладнення прогнозування дій артилерійського підрозділу противником. При цьому встановлено, що стратегія негайного контрбатарейного вогню не є визначальною у формуванні найгіршого для артилерії сценарію, а критичними залишаються дії противника, пов’язані з маневром та укриттям.

Таким чином, застосування графоаналітичного методу в задачах теорії ігор дозволяє не лише отримати оптимальні змішані стратегії, але й виявити домінуючі та неактивні стратегії противника. Запропонований підхід доцільно використовувати у навчальному процесі курсантів, оскільки він сприяє розвитку аналітичного мислення, формуванню навичок формалізації бойових ситуацій та опануванню методів прийняття обґрунтованих рішень в умовах невизначеності, що є важливою складовою професійної підготовки майбутніх офіцерів.

***В. О. Балдін, Ю.-С. П. Сало***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Н. М. Гузик****, кандидат фізико математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних наук*

# БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИБОРУ ВОГНЕВИХ ПОЗИЦІЙ АРТИЛЕРІЇ НА ОСНОВІ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

У сучасних умовах ведення бойових дій, що характеризуються високою динамічністю, невизначеністю, інформаційним перевантаженням та жорсткими часовими обмеженнями, особливого значення набувають методи багатокритеріального аналізу. Сучасний військовослужбовець, зокрема командир підрозділу, змушений приймати рішення в умовах неповної або суперечливої інформації, постійної зміни обстановки та впливу численних факторів, які часто мають різну природу та ступінь важливості. У таких умовах інтуїтивні підходи до вибору рішень, хоча й залишаються важливими, потребують підсилення формалізованими методами, що дозволяють структурувати процес прийняття рішень і мінімізувати вплив суб'єктивних помилок.

Одним із найбільш ефективних інструментів підтримки прийняття рішень є метод аналізу ієрархій, який дозволяє формалізувати процес вибору оптимальної альтернативи за наявності декількох критеріїв. Його сутність полягає у декомпозиції складної задачі на ієрархічні рівні, що включають мету, критерії та альтернативи, а також у використанні попарних порівнянь для визначення відносної важливості елементів. Такий підхід є особливо цінним у військовій діяльності, оскільки дозволяє врахувати як кількісні, так і якісні характеристики обстановки, включаючи фактори ризику, живучості, маневреності та ефективності застосування озброєння.

Актуальність застосування методу аналізу ієрархій для військовослужбовців обумовлена також переходом до мережево-центричних принципів ведення бойових дій, де рішення приймаються на основі інтеграції даних із різних джерел, зокрема розвідки, безпілотних систем та геоінформаційних комплексів. У таких умовах командир повинен не лише швидко обробляти інформацію, але й обґрунтовувати свої рішення з урахуванням багатьох взаємопов'язаних факторів. Метод аналізу ієрархій забезпечує можливість кількісного представлення переваг і дозволяє отримати узагальнену оцінку альтернатив, що підвищує об'єктивність прийняття рішень.

Прикладом застосування методу Сааті у військовій практиці є вибір вогневих позицій для артилерійських підрозділів. Розглянемо задачу вибору оптимальної вогневої позиції серед трьох альтернатив: $A_1$ – позиція на висоті, $A_2$ – позиція в лісовій місцевості, $A_3$ – позиція поблизу населеного пункту. Оцінювання здійснюється за трьома критеріями: $K_1$ – маскування, $K_2$ – сектор обстрілу, $K_3$ – захищеність. Задача формалізується у вигляді ієрархічної структури, де на верхньому рівні знаходиться мета – вибір оптимальної позиції, на середньому – критерії $K_1$, $K_2$, $K_3$, а на нижньому – альтернативи $A_1$, $A_2$, $A_3$.

На першому етапі формується матриця попарних порівнянь критеріїв:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для визначення ваг критеріїв використано метод середнього геометричного, згідно з яким для кожного рядка обчислюється величина

$$g_i = \left( \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{1/n}.$$

У результаті отримано:

$$\nu_1 \approx 1{,}145, \quad \nu_2 \approx 0{,}440, \quad \nu_3 = 2.$$

Після нормалізації:

$$w_K = \left(0{,}319;\, 0{,}123;\, 0{,}558\right)^T.$$

Отже, найбільш вагомим є критерій захищеності, що відповідає реальним умовам ведення бойових дій.

Аналогічно побудовано матриці попарних порівнянь альтернатив за кожним критерієм та визначено локальні пріоритети. Для критерію маскування отримано:

$$w_{K_1} = (0{,}104;\, 0{,}637;\, 0{,}259)^T$$

для сектору обстрілу:

$$w_{K_2} = (0{,}625;\, 0{,}137;\, 0{,}238)^T$$

для захищеності:

$$w_{K_3} = (0{,}109;\, 0{,}309;\, 0{,}582)^T.$$

Глобальні пріоритети альтернатив визначаються як зважена сума локальних оцінок:

$$W_i = \sum_{k=1}^{3} w_k \cdot w_{ik}.$$

У результаті розрахунків отримано:

$$W_1 \approx 0{,}171; \quad W_2 \approx 0{,}392; \quad W_3 \approx 0{,}437.$$

Отже, остаточне ранжування альтернатив має вигляд:

$$A_3 \succ A_2 \succ A_1.$$

Отриманий результат свідчить, що оптимальною є позиція поблизу населеного пункту, що пояснюється її високими показниками за критерієм захищеності, який має найбільшу вагу. З практичної точки зору це відповідає умовам сучасного бою, де виживання підрозділу є визначальним фактором.

Таким чином, застосування методу аналізу ієрархій із використанням середнього геометричного дозволяє отримати обґрунтоване рішення та перевірити його на узгодженість. Це забезпечує підвищення якості прийняття рішень та формує у майбутніх офіцерів навички використання сучасних математичних методів у військовій діяльності.

***В. Ю. Орлянська***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Х. І. Ліщинська****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСОВИХ ВІКОН РАДІОЗВ'ЯЗКУ В УМОВАХ СКЛАДНОГО РЕЛЬЄФУ

У сучасній військовій справі математика перестає бути абстрактною дисципліною, перетворюючись на інструмент виживання особового складу та прийняття управлінських рішень. Так, одним із критичних аспектів діяльності командира є планування радіозв'язку в умовах динамічного переміщення підрозділів. Задача визначення інтервалу доступності сигналу між рухомою колоною та ретранслятором є класичним прикладом того, як область визначення функції та геометричні обмеження формують тактичне рішення командира.

Розглянемо процес встановлення радіозв'язку в ультракороткохвильовому (УКХ) діапазоні, де розповсюдження хвиль обмежене прямою видимістю та кривизною земної поверхні. В такій задачі кожен математичний елемент має свій реальний бойовий прототип: обмеження дальності відповідає технічним характеристикам радіостанцій, а розриви в графіках функцій сигналізують про вхід у «мертві зони» або зони радіотіні.

Для математичної формалізації процесу розглянемо рух колони, що стартує з точки $A(-20;0)$ у локальній системі координат і просувається на схід (вздовж додатного напрямку осі $Ox$) зі сталою швидкістю $V=30$ км/год. Положення ретранслятора зафіксовано в точці $P(0;0)$ із радіусом стійкого зв'язку $R=15$ км. Між колоною та ретранслятором на відстані $d_1=8$ км від нього знаходиться гора висотою $H=150$ м, яка створює радіотінь.

Відстань від колони до ретранслятора змінюється за законом $d(t)=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}=\sqrt{(-20+30t)^2}=-20+30t$. Тоді умова забезпечення радіозв'язку набуває вигляду $|-20+30t|\le 15$. Розв'язок цієї нерівності визначає теоретичне часове вікно перебування об'єкта в зоні досяжності сигналу: від 10-ї до 70-ї хвилини від моменту початку руху. Але це часове вікно є ідеалізованим, оскільки реальна фізика розповсюдження радіохвиль у діапазоні прямої видимості вносить суттєві корективи, пов'язані з рельєфом місцевості та кривизною земної поверхні.

Важливим етапом дослідження є врахування дальності прямої видимості між антенами з урахуванням кривизни Землі, яка для антен заввишки $h_1=2,5$ м (на машині) та $h_2=10$ м (на ретрансляторі) обчислюється за формулою $d_{горизонт}\approx 4,12\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)$ і становить $d_{горизонт}\approx 19,54$ км. Оскільки це значення є

більше за $R=15$ км, то основним обмежувальним чинником залишається технічний радіус дії ретранслятора.

Проте реальна перешкода у вигляді гори заввишки $H$ м, розташованої на відстані $d_1$ км від ретранслятора, докорінно змінює ситуацію. Для перевірки затінення проведемо розрахунок висоти променя за формулою $h_{променя}(d_1)=h_1+\frac{d_1}{d}(h_2-h_1)-\frac{d_1(d-d_1)}{2R_{Землі}}$, де $d$ – відстань між антенами. Провівши обчислення для значення $d=15$ км визначимо, що $h_{променя}(8)\approx 2{,}1$ м. Це доводить, що об'єкт висотою 150 м повністю перекриває зону прямої видимості. Отже, маємо появу фізичної радіотіні: гора блокує пряму видимість, коли колона знаходиться за горою. Умова перебування в радіотіні: $x(t)>8$ км. Визначимо час, коли колона проходить повз гору: $x(t)=-20+30t=8$. Звідки $t=56$ хв. Математично це призводить до звуження області визначення функції зв'язку: замість початкових 60 хвилин доступності, командир має лише 46-хвилинне вікно (з 10-ї по 56-ту хвилину), оскільки після перетину позначки $x=8$ км сигнал блокується рельєфом. Слід зауважити, що розв'язок задачі вказаний без урахування дифракції. В протилежному випадку виникла б незначна похибка в 1 хв і $t=57$ хв.

Такий аналіз безпосередньо вимагає навичок критичного мислення, які є обов'язковими для сучасного офіцера. Математика вчить не довіряти лише «номінальним» характеристикам техніки, а враховувати динаміку середовища та ризики. Командир, бачачи такий розрахунок, змушений приймати обґрунтоване управлінське рішення: або змінювати маршрут в обхід перешкоди, або планувати сеанс зв'язку суворо до 56-ї хвилини, або задіювати додаткові засоби, наприклад, БПЛА-ретранслятори, для подолання «ефекту тіні».

## Література

1. Організація військового зв'язку : навч. посіб. / В. Г. Шолудько та ін. Київ : Вид. дім «СКІФ», 2023. 280 с.

***В. Ю. Орлянська***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного*
*Науковий керівник* ***Х. І. Ліщинська.****, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ВОГНЕВИХ РЕСУРСІВ У ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ РОЄМ БПЛА

У сучасних військових конфліктах математика відіграє важливу роль не лише як теоретична дисципліна, але й як практичний інструмент підтримки прийняття рішень. Однією з актуальних задач, що поєднує методи нелінійної оптимізації, теорії ймовірностей і ризикології, є задача оптимального розподілу вогневих засобів (Weapon Target Assignment Problem, WTA).

У випадку застосування рою безпілотних літальних апаратів ця задача зводиться до побудови математичної моделі, яка в реальному часі та за обмежених ресурсів дозволяє завдати противнику максимально можливих втрат. Математичний апарат дає змогу оперативно перетворювати координати та пріоритети цілей у раціональний план застосування сил, де кожне рішення має ймовірнісне обґрунтування.

Теоретична основа дослідження враховує ймовірнісну природу бойового зіткнення. На відміну від простих лінійних моделей, у яких результат визначається прямим порівнянням сил, задача розподілу рою дронів є нелінійною та дискретною. Її цільова функція спрямована на мінімізацію очікуваної сумарної вартості цілей, що можуть залишитися неураженими.

Нехай задано множину цілей $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ з відповідними вагами $v_j$ та рій дронів $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$. Тоді математичне сподівання вцілілої вартості $J$ описується нелінійною функцією:

$$J = \sum_{j=1}^{n} v_j \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij}\right)^{x_{ij}},$$

де $p_{ij}$ – ймовірність ураження цілі $j$ дроном $i$, $x_{ij}$ : – змінна, $x_{ij} = 1$, якщо дрон $i$ спрямований на ціль $j$, і $x_{ij} = 0$ – в іншому випадку. Нелінійність цієї функції ускладнює обчислення та потребує використання методів динамічного програмування.

Розглянемо випадок, коли підрозділ застосовує 10 дронів-камікадзе проти групи з трьох цілей: зенітно-ракетного комплексу ($T_1$, $v_1 = 100$), радару ($T_2$, $v_2 = 80$) та складу боєприпасів ($T_3$, $v_3 = 50$). Припустимо, що середні ймовірності ураження для одного дрона становлять: $p_1 = 0{,}5$ (для $T_1$), $p_2 = 0{,}6$ (для $T_2$) та $p_3 = 0{,}8$ (для $T_3$). Використання «жадібного» алгоритму на основі граничного аналізу дозволяє послідовно визначати, куди доцільно спрямувати кожен наступний дрон. На першому кроці дрон спрямований на ціль $T_1$, оскільки

саме там очікуване зниження вартості є максимальним: $100 \cdot 0,5 = 50$. На другому кроці аналізується потенційний приріст ефекту для кожної цілі: для $T_1$ він становить уже $25(50 \cdot 0,5)$, для $T_2$ – $48(80 \cdot 0,6)$, а для $T_3$ – $40(50 \cdot 0,8)$. Таким чином другий дрон спрямовується на $T_2$, а третій – на $T_3$.

Продовжуючи ітераційний процес для всіх десяти дронів, отримуємо раціональний розподіл: 4 дрони на $T_1$, 3 дрони на $T_2$ та 3 дрони на $T_3$. Розрахуємо очікувану залишкову вартість цілей:

$$100 \cdot (0,5)^4 + 80 \cdot (0,4)^3 + 50 \cdot (0,2)^3 = 11,77 \text{ ум. од.}$$

Порівнюючи цей результат із початковою сумарною вартістю у $100 + 80 + 50 = 230$ од., такий підхід демонструє високу ефективність математичного моделювання. Особливу увагу необхідно звернути на ефект «спадної віддачі»: якщо перший дрон знижує ризик на 50 одиниць, то четвертий дрон, спрямований на ту саму ціль, лише на 6,25. Це математичне підтвердження принципу достатності вогневого ураження, який вчить офіцера уникати надмірності та раціонально використовувати ресурси.

Зауважимо, що у ситуації реального бою значення $p_{ij}$ є динамічними та можуть різко змінюватися під впливом засобів РЕБ або погодних умов. Ризикологічний аспект полягає в аналізі чутливості моделі: якщо реальна ймовірність ураження $T_1$ зменшиться з 0,5 до 0,25, то обрана стратегія може не залишитися ефективною. Математика вчить не лише рахувати, а й сумніватися, вимагаючи від майбутнього офіцера перевірки альтернативних сценаріїв та готовності до коригування алгоритмів у разі виявлення аномалій у розвідданих.

Використання методу нелінійної оптимізації для керування роєм БПЛА є прикладом того, що математика була і залишається універсальним інструментом аналізу складних систем та ефективної дії в умовах безперервної інформаційної та фізичної боротьби. Інтеграція подібних задач у навчальний процес військових закладів освіти сприяє формуванню наукового підходу до ведення бойових дій. Адже перевага в сучасному бою визначається не лише вогневою потужністю, а й швидкістю та обґрунтованістю прийняття рішень, що підкреслює стратегічну роль фундаментальної математичної підготовки.

***Є. О. Сліпець***
*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного*
*Науковий керівник:* ***М. І. Сорокатий****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних наук*

# РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ ЯК МАТЕМАТИЧНА ОСНОВА НАВІГАЦІЇ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Бойові дії в Україні демонструють, що тактичні БПЛА стали використовуватися як повноцінний засіб збройної боротьби на всіх рівнях – від взводу до бригади. За здавалося б простим підходом до управління дронами стоять більш складні математичні системи навігації та маршрутизації, створені з застосуванням аналітичної геометрії. Зокрема, рівняння площини в просторі дозволяє описати пристрій орієнтування, обчислити кути та відстані в тривимірному просторі та створити геометричні моделі зон впливу. Основні форми рівнянь площини - загальне рівняння, рівняння площини, що проходить через три точки, нормальне рівняння та рівняння в відрізках на осях - мають різну зручність залежно від наявних вхідних даних.

В навігаційних задачах найчастіше використовуються формули для визначення кута між площинами та відстані від точки до площини. Це ті параметри, які обираються для використання при плануванні маршруту та здійснення атаки. Пряма лінія будь-якого конкретного маршруту (точками маршруту) лежить у площині в просторі. Для точок A(0;0;100), B(500;200;150), C(1000;0;200), було визначено рівняння площини польоту, і знайдено кут нахилу маршруту, що становить приблизно на 5,7° до горизонталі. Такий кут забезпечує плавний набір висоти БПЛА.

Використовуючи отримане рівнянням, система автопілота може в режимі реального часу контролювати відхилення пристрою від запропонованої площини польоту та коригувати траєкторію польоту за необхідності. Кут між площиною польоту та площиною поверхні місцевості в цільовій зоні є параметром, від якого залежить геометрія огляду розвідувальної камери та кут входу боєприпасу під час нанесення удару. Для згаданого прикладу цей кут становить близько 19,4°. Це, в свою чергу, означає м'який підхід до цілі з відповідною корекцією маневру. Відстань від цільової точки до площини маршруту вказує на те, наскільки пристрій повинен відхилитися, щоб рухатися до цілі. Обчислена відстань ~49,75м переводиться в необхідне вертикальне зниження ~49,5 м, що вводиться в алгоритм корекції висоти системи автопілота.

Ефективна зона впливу може бути визначена як система, що складається з пари граничних площин, які визначають мінімальні та максимальні допустимі кути занурення, а саме 30° та 70°. Якщо координати задовольняють обидві умови одночасно, пристрій знаходиться в зоні ефективного застосування. Така модель дозволяє всім заходам, що плануються перевіряти допустимість того, де має бути розташована позиція, і розпочати маневр без введення оператора.

Запропонований підхід легко застосовується до числових алгоритмічних функцій навігаційного програмного забезпечення, без додаткових спрощень. Це його відрізняє від наближених моделей і гарантує їх точність для обчислень, що є важливим для бойових цілей. Окрім прямого застосування до систем нагляду за БПЛА, отримані результати можуть мати також освітнє застосування. Навігаційні завдання дронів, вирішені за допомогою аналітичної геометрії, є очевидною демонстрацією для курсантів прикладної цінності математики та стимулом для них продовжувати вивчати вищу математику.

Запропонована модель свідчить про необхідність подальших досліджень для її розробки та розширення через завдання синхронізації БПЛА до роїв для встановлення ідеального розміщення засобів радіоелектронної боротьби та засобів протиповітряної оборони.

***М. А. Пилип'як***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук****, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЯК МАТЕМАТИКА ДОЗВОЛЯЄ ДРОНАМ «БАЧИТИ» КРІЗЬ ДИМ

У сучасних рятувальних операціях БПЛА часто стикаються з проблемою «оптичної непрозорості» через дим або туман. Традиційні камери втрачають інформацію, оскільки середовище спричиняє інтенсивне розсіювання світла. Задача спостереження перетворюється на складну обернену задачу математичної фізики: відновлення тривимірної сцени на основі зашумлених сигналів.

Для подолання бар'єра видимості використовуються LiDAR-системи. Відповідно до закону Бугера — Ламберта — Бера, інтенсивність сигналу падає експоненційно:

$$I = I_0 \, e^{-\mu L}$$

Проте основна складність полягає у виникненні «хибних цілей» (backscatter), коли лазерний імпульс відбивається від частинок диму раніше, ніж досягне об'єкта. Для розрізнення таких сигналів критично важливою є висока часова роздільна здатність сенсорів, що забезпечується прецизійною синхронізацією часу на рівні пікосекунд [3].

Сигнали в задимленому середовищі мають стохастичну природу. Реєстрація сигналу моделюється розподілом Пуассона. Для ефективного відновлення зображень використовується концепція нелінійної фільтрації та методи глибокого навчання, зокрема згорткові нейронні мережі (CNN). Дослідження підтверджують, що в умовах значної задимленості стандартні алгоритми обробки хмар точок потребують специфічної фільтрації шуму зворотного розсіювання. Зокрема, для підвищення якості візуалізації об'єктів ефективним є застосування медіанної фільтрації у поєднанні з адаптивними порогами

відсікання фонового сигналу [5].

Ключові математичні інструменти:

- Методи регуляризації для стабілізації розв'язку оберненої задачі.
- Матричні операції для обробки «хмар точок» (point clouds).
- Метод інтенсивнісного аналізу, що дозволяє диференціювати сигнали за амплітудою відбиття від твердих поверхонь та аерозольних часток [5].
- Баєсівський підхід для динамічного оновлення ймовірності знаходження перешкод.

Навіть без прямої видимості дрон повинен орієнтуватися. Це реалізується через алгоритм SLAM (Simultaneous Localization and Mapping). Сучасні підходи до SLAM активно використовують графові нейронні мережі (Graph Neural Networks) для покращення зв'язності карти у просторі [1]. Ключову роль у локалізації відіграють:

- Фільтр Калмана, що забезпечує рекурсивне оцінювання стану системи.
- Методи обчислювальної геометрії для аналізу топології середовища.

Отже «бачення» дрона в диму — це результат роботи складного математичного апарату, який перетворює хаотичні відбиття світла у впорядковану 3D-модель. Поєднання прецизійної електроніки з методами глибокого навчання та стохастичного аналізу дозволяє БПЛА діяти ефективно навіть у середовищах, де людське око повністю втрачає орієнтацію.

**Література**

1. Wu Z., Pan S., Chen F., Long G., Zhang C., Yu P. S. A Comprehensive Survey on Graph Neural Networks. arXiv:2301.06016 [cs.LG]. 2023. URL: https://arxiv.org/abs/2301.06016

2. Kipf T. N., Welling M. Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. arXiv:1609.02001 [cs.LG]. 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1609.02001

3. Automotive LiDAR: Precise Timing for Smarter and Safer Perception: Application Brief. SiTime. URL: https://www.sitime.com/support/resource-library/application-briefs/automotive-lidar

4. Zheng S., Lu J., Zhao H., Zhu X., Luo Z., Wang Y., Fu Y., Feng J., Tao D., Zhang L. Rethinking Semantic Segmentation from a Sequence-to-Sequence Perspective with Transformers. arXiv:1906.06310 [cs.CV]. 2019. URL: https://arxiv.org/abs/1906.06310

5. Кузик О., Придатко О. Покращення зображення з лідара у задимленому середовищі. Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності. 2024. № 30. С. 90-97. URL: https://doi.org/ https://doi.org/10.32447/20784643.30.2024.09

***В. В. Дога***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук,*** *викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАСЛІДКІВ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ В УКРАЇНІ

Зростання кількості та складності надзвичайних ситуацій (НС) природного, техногенного та воєнного характеру вимагає впровадження науково обґрунтованих математичних підходів у діяльність ДСНС. Основні зусилля служби у 2024 році були зосереджені на ліквідації наслідків збройної агресії РФ, гасінні пожеж, розборі завалів та проведенні протимінної діяльності. За статистикою класифікованих НС за 2023 рік загинуло 159 осіб, а поранено 884. У 2024 році ці показники становили відповідно 148 загиблих та 295 поранених.

Одночасно спостерігається зростання кількості НС природного характеру (зокрема, інфекційних захворювань тварин і птиці) та соціальних НС (внаслідок порушення правил безпеки). Ефективність реагування на такі виклики забезпечується застосуванням статистичного аналізу та математичних моделей.

Аналіз інформації, що надійшла від територіальних органів ДСНС за 2 місяці 2026 року, свідчить, що в Україні зареєстровано 9 858 пожеж (-12,0 %). Унаслідок пожеж загинуло 579 осіб (+33,4 %), у т. ч. 13 дітей (-7,1 %); травмовано 509 осіб (+44,2 %), з них 52 дитини (зростання у 2,9 рази). При цьому врятовано 1 105 осіб (зростання у 2,6 рази), у т. ч. 64 дитини (+82,9 %), а матеріальні втрати склали 5 млрд 178 млн 174 тис. грн (+51,7 %). Згідно з аналітичними даними ДСНС, у квітні 2026 року зберігається висока ймовірність виникнення медико-біологічних НС (насамперед отруєнь чадним газом і харчових отруєнь) із найбільшим ризиком у Луганській, Запорізькій, Київській, Одеській, Вінницькій, Дніпропетровській та Чернігівській областях.

Оскільки виникнення НС є рідкісною подією, її дискретний часовий розподіл описується модельним законом Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\left(\lambda^k \cdot e^{-\lambda}\right)}{k!}$$

де $\lambda$ — середня кількість НС за аналогічний період, $k$ — кількість подій.

На основі даних за 2 місяці 2026 року розрахуємо середню добову інтенсивність виникнення пожеж в Україні:

$$\lambda = \frac{9\,858}{60} \approx 164{,}3\ (\text{пожеж/добу})$$

За допомогою моделі Пуассона оцінимо ймовірність того, що в окремо обрану добу кількість пожеж по країні досягне критичної позначки $k = 180$ подій:

$$P(X = 180) = \frac{164{,}3^{180} \cdot e^{-164{,}3}}{180!} \approx 0{,}018\ (1{,}8\ \%)$$

Для прогнозування матеріальних збитків (Y) від метеорологічних чинників (X) застосовується лінійна регресія:

$$Y = a \cdot X + b,$$

параметри якої знаходять за методом найменших квадратів (МНК). За даними динаміки останніх років отримано парне рівняння регресії виду $Y = 0{,}525 \cdot X + 101{,}2$. Коефіцієнт $a = 0{,}525$ свідчить про те, що зростання кількості пожеж на 100 випадків призводить до середнього зростання прямих матеріальних збитків на 52,5 млн грн.

Здійснені розрахунки підтверджують, що застосування математичних моделей дозволяє здійснювати кількісний аналіз та короткострокове прогнозування параметрів надзвичайних ситуацій, що є підґрунтям для прийняття обґрунтованих управлінських рішень щодо розподілу ресурсів і сил ДСНС.

## Література

1. Аналітична довідка про пожежі та їх наслідки в Україні за 2 місяці 2026 року. ДСНС України. URL: https://dsns.gov.ua/upload/2/5/8/1/7/2/5/analiticna-dovidka-pro-pozezi-022026.pdf

2. Звіт про діяльність Державної служби України з надзвичайних ситуацій у 2024 році. Київ : Кабінет Міністрів України, 2025. 48 с. URL: https://www.kmu.gov.ua/storage/app/sites/1/17-civik-2018/zvit_2024/zvit_DSNS_2024.pdf

3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник. Київ : КНЕУ, 2000. Ч. І. 304 с

4. Ross S. M. Introduction to Probability Models. 12th ed. Academic Press, 2019. 842 p.

***А. В. Пастух***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Маланчук****, викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ІМОВІРНІСТЬ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ: ЯК МИ ОЦІНЮЄМО РИЗИКИ

У сфері пожежної безпеки теорія ймовірностей виступає фундаментальним інструментом для кількісної оцінки загроз. З погляду вищої математики, ризик не є суб'єктивним відчуттям, а чітко визначеною мірою, що обчислюється як добуток імовірності настання небажаної події $P(A)$ на величину очікуваних збитків $L$. Математичне сподівання втрат $R=P(A)\cdot L$ дозволяє фахівцю оперувати конкретними величинами, де $P(A)$ — імовірність виникнення пожежі на об'єкті, а $L$ — прогнозована шкода (людські втрати, травмування або матеріальні збитки). Розрахунок індивідуального ризику загибелі при пожежі, який згідно з нормативами не має перевищувати $10^{-6}$ на рік, базується на аксіоматиці Колмогорова та аналізі великих масивів статистичних даних.

Будь-яка небезпечна подія, як-от займання, та подальше спрацювання систем протипожежного захисту розглядаються як послідовність випадкових явищ. Використання формули ймовірності суми сумісних подій дозволяє коректно оцінити загальну небезпеку при поєднанні кількох факторів, наприклад, короткого замикання та одночасної відмови системи димовидалення.

Особливо важливою є формула повної ймовірності, яка використовується для побудови «дерева подій». За її допомогою загальна ймовірність безпечної евакуації людей розраховується як сума ймовірностей за різних гіпотез: стану шляхів евакуації, пожежного навантаження приміщення чи справності автоматичних систем гасіння. Кожна така гіпотеза має свою апріорну ймовірність, що вивчається на основі технічних регламентів та статистики відмов обладнання.

Теорема Байєса відіграє ключову роль у динамічній оцінці ризику під час чергування. Вона дозволяє оперативно переоцінити ймовірність реальної загрози при отриманні нового сигналу від пожежної сигналізації, враховуючи специфіку об'єкта та частоту хибних спрацювань датчиків. Для аналізу рідкісних, але масштабних подій (великих промислових пожеж або вибухів) застосовується розподіл Пуассона. Цей математичний закон дозволяє прогнозувати інтенсивність потоку викликів на підрозділи пожежної охорони та розраховувати необхідну кількість сил і засобів для мінімізації часу локалізації вогню.

Окремим аспектом є теорія надійності складних систем протипожежного захисту. Оцінка надійності засобів пожежогасіння, як-от насосних станцій чи спрінклерів, здійснюється за допомогою експоненціального закону. Математика доводить, що дублювання критичних вузлів (резервування пожежної техніки) значно знижує ризик повної відмови системи в критичний момент.

Таким чином, вища математика на першому курсі закладає підґрунтя для розуміння концепції «прийнятного ризику» — принципу, згідно з яким абсолютна безпека є недосяжною, проте ризик може бути знижений до контрольованого рівня за допомогою обґрунтованих математичних розрахунків та інженерних заходів.

**Література**

1. Гнеденко Б. В. Курс теорії ймовірностей: Підручник для вузів. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. — 464 с.
2. Лапін В. М. Безпека життєдіяльності людини. — К.: Знання, 2007. — (Розділ: Оцінка ризику ймовірних небезпек). Комяк В. М.,
3. Комяк В. В. Математичне моделювання процесів в пожежній безпеці: Навчальний посібник. — Харків: НУЦЗУ, 2015. — 180 с.
4. Жидецький В. Ц. Основи охорони праці. — Львів: Афіша, 2005. — (Методи розрахунку імовірності нещасних випадків).
5. Тюрін Ю. Н. та ін. Аналіз даних на комп'ютері. — (Математична статистика в управлінні ризиками). — 2012.

***А. С. Мурженко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПОВСЯКДЕННОСТІ: МОДЕЛЮВАННЯ ПОБУТОВИХ, ФІНАНСОВИХ ТА ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДИНИ

У сучасному постіндустріальному суспільстві, яке характеризується стрімким збільшенням щільності інформаційних потоків та ускладненням соціально-економічних зв'язків, математика трансформується з вузькоспеціалізованої академічної дисципліни на фундаментальний інструмент життєзабезпечення. Повсякденна діяльність людини супроводжується безперервним вирішенням завдань на оптимізацію, прогнозування та аналіз ризиків, навіть якщо ці процеси відбуваються на інтуїтивному рівні й не усвідомлюються суб'єктом як математичні операції. Квантифікація повсякденності проявляється у найпростіших діях: від розподілу сімейного бюджету та розрахунку пропорцій при приготуванні їжі до складного логістичного планування часу, оцінки умов кредитування чи аналізу ймовірності настання побутових ризиків. Актуальність дослідження цього напряму зумовлена необхідністю подолання когнітивного розриву між теоретичною математикою та її прикладним значенням. Формалізація повсякденних алгоритмів дозволяє структурувати поведінкові патерни індивіда, підвищити

раціональність прийняття рішень та мінімізувати деструктивний вплив когнітивних упереджень у щоденному житті.

Однією з найбільш математично містких сфер повсякденного життя людини є управління особистими та сімейними фінансами. Будь-яка комерційна взаємодія - оцінка вигоди від акційних пропозицій, розрахунок відсоткових ставок за депозитами або кредитами, обчислення податкових вирахувань чи планування довгострокових заощаджень - спирається на базові та вищі розділи фінансової математики. Зокрема, оцінка реальної вартості кредиту або капіталізації вкладу базується на формулі складних відсотків, яка демонструє експоненціальне зростання функції грошових коштів у часі. Якщо початковий капітал становить $P$, а річна відсоткова ставка дорівнює $r$ при нарахуванні відсотків $n$ разів на рік протягом $t$ років, то нарощена сума $A(t)$ описується рівнянням:

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Розуміння цієї математичної залежності дозволяє людині тверезо оцінювати довгострокові фінансові зобов'язання (наприклад, іпотеку), уникати прихованих переплат і розраховувати інфляційні втрати. Окрім того, повсякденні покупки у супермаркетах вимагають миттєвого операційного мислення, пов'язаного з теорією пропорцій, дробами та розрахунком питомої вартості одиниці маси чи об'єму продукту для нівелювання маркетингових маніпуляцій з пакуванням.

Не менш важливу роль математичний апарат відіграє в задачах тайм-менеджменту та оптимізації щоденної логістики. Розподіл обмеженого часового ресурсу між різними видами діяльності (робота, побут, відпочинок) є класичним прикладом задачі лінійного програмування, де цільовою функцією є максимізація корисності або продуктивності, а обмеженнями виступають часові ліміти доби та пріоритетність завдань. При плануванні щоденних поїздок, особливо в умовах мегаполісу, людина інтуїтивно розв'язує складні стохастичні задачі на графах (зокрема, варіації задачі комівояжера або пошук найкоротшого шляху на зваженому графі дорожньої мережі). У цьому процесі ребра графа мають динамічні ваги, що залежать від часу доби, щільності транспортного потоку та ймовірності виникнення заторів, які моделюються за допомогою елементів теорії масового обслуговування.

Побутовий простір людини є прямим відображенням законів практичної геометрії, стереометрії та математичного моделювання фізичних процесів. Приготування їжі вимагає точного дотримання рецептурних пропорцій і масопереносу речовин, що часто зводиться до лінійного масштабування компонентів або перерахунку об'ємів циліндричного чи сферичного посуду. Проведення домашнього ремонту, screeding (вирівнювання підлоги бетонною стяжкою) або термомодернізація стін вимагають точного розрахунку площ поверхонь складних геометричних форм, обчислення об'ємів витратних матеріалів та оцінки теплотехнічних параметрів. Наприклад, об'єм необхідного будівельного розчину для підлоги розраховується як інтегральний добуток площі поверхні на товщину шару з урахуванням коефіцієнта усадки матеріалу.

Помилки у таких розрахунках призводять до значних фінансових збитків або порушення конструктивної міцності об'єктів.

Окрім суто чисельних розрахунків, математика формує фундаментальний каркас для прийняття раціональних рішень в умовах невизначеності та ризику. Щоденний вибір (від купівлі страхового поліса до оцінки доцільності парасольки при мінливій хмарності) базується на інтуїтивному аналізі ймовірностей. Математичне моделювання поведінки людини в таких ситуаціях описується теорією ігор та теорією корисності. Обчислення математичного сподівання виграшу або програшу дозволяє суб'єкту мінімізувати ризики. Наприклад, якщо ймовірність настання негативної події дорівнює $p$, а потенційні фінансові збитки становлять $L$, то математичне сподівання збитків $E = p \cdot L$ порівнюється з вартістю запобіжних заходів. Математичне мислення також захищає від поширених логічних помилок, таких як «ошибочність гравця» (gambler's fallacy) або нерозуміння закону великих чисел.

Вплив математики на життя людини виходить далеко за межі утилітарних обчислень - вона є головним архітектором критичного мислення, точності та когнітивної гнучкості індивіда. Математична грамотність дозволяє людині успішно орієнтуватися у сучасному інформаційному суспільстві, яке перенасичене статистичними даними, соціологічними опитуваннями та маніпулятивними графіками в медіа. Здатність критично оцінювати вибірку, розуміти різницю між середнім арифметичним та медіаною, фіксувати помилкові кореляції (spurious correlations) та аналізувати тренди безпосередньо визначає рівень захищеності людини від дезінформації та підвищує загальну якість її життя.

Таким чином, математика у повсякденному житті є універсальним, незамінним і високоефективним інструментом, що забезпечує точність розрахунків, раціоналізацію щоденних дій та оптимізацію обмежених ресурсів. Використання елементів фінансової математики, геометрії, теорії графів, теорії ймовірностей та математичної статистики дозволяє людині успішно вирішувати широкий спектр життєвих завдань: від побутового будівництва та мікроекономічного планування до управління часом та стратегічного прийняття рішень. Подальший розвиток технологічного суспільства демонструє, що математична компетентність стає базовою ознакою функціональної грамотності, необхідною для успішної самореалізації та адаптації індивіда в сучасному динамічному світі.

**Література**

1. Девлін К. Математика: як пояснити світ за допомогою чисел. - К.: Наш Формат, 2019. - 288 с.
2. По П. Скільки коштує час: математика повсякденного життя. - Львів: Видавництво Старого Лева, 2021. - 196 с.
3. Канеман Д. Мислення швидке й повільне. - К.: Наш Формат, 2017. - 480 с.
4. Єршов А. В., Голобородько В. В. Практична математика в задачах і прикладах. - Харків: Гімназія, 2020. - 152 с.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах. - К.: Центр учбової літератури, 2022. - 592 с.

***Д. О. Деркач***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин.****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДАНИХ У СУЧАСНІЙ МЕДИЦИНІ: ВІД ТЕОРІЇ ДО КЛІНІЧНОЇ ПРАКТИКИ

На початкових етапах свого розвитку медицина спиралася переважно на емпіричні спостереження, інтуїцію клініциста та якісний опис патологічних процесів. Проте сучасний етап розвитку охорони здоров'я характеризується стрімкою цифровізацією, накопиченням колосальних масивів біомедичних даних та глобальним переходом до концепції персоніфікованої та доказової медицини. У цих умовах математика виступає не просто допоміжним інструментом для фінальної статистичної обробки результатів експериментів, а фундаментальною основою для розробки принципово нових методів діагностики, прогнозування динаміки захворювань та оптимізації стратегій лікування. Інтеграція математичних методів у медичну науку дозволяє трансформувати складні, нелінійні біологічні закономірності у точні кількісні моделі, що дає змогу виявити приховані зв'язки всередині живих систем. З огляду на це, актуальним завданням є комплексний аналіз ключових напрямів застосування математичного апарату в сучасній медицині, оцінка ефективності математичного моделювання біологічних процесів та визначення перспектив інтеграції методів аналізу даних і комп'ютерного моделювання безпосередньо в клінічну практику для підвищення точності прийняття лікарських рішень.

Одним із найбільш фундаментальних та історично глибоких напрямків є математичне моделювання складних фізіологічних систем організму та біомеханічних процесів. Живий організм - це відкрита термодинамічна система, життєдіяльність якої підпорядкована строгим фізико-математичним законам. Яскравим прикладом є опис динаміки кровотоку (гемодинаміки) у судинному руслі різного калібру. Для моделювання руху крові у великих артеріях застосовують апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема класичні рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої в'язкої рідини. Математична модель, що враховує геометрію судин та реологічні властивості крові, має такий вигляд:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

де $\mathbf{u}$ - вектор швидкості руху крові, $p$ - гідродинамічний тиск, $\rho$ - густина крові, $\mu$ - її динамічна в'язкість, а $\mathbf{f}$ - вектор зовнішніх сил. Завдяки розвитку обчислювальної гідродинаміки (CFD) на основі даних магнітно-резонансної томографії сьогодні вдається будувати індивідуальні тривимірні архітектоніки судин конкретного пацієнта. Це дозволяє нефармакологічним і неінвазивним шляхом розраховувати такий критичний параметр, як напруження зсуву на стінці судини (WSS). Точний математичний розрахунок цих полів дає змогу прогнозувати місця формування атеросклеротичних бляшок, оцінювати ризики

розриву аневризм аорти або головного мозку, а також віртуально симулювати результати кардіохірургічного шунтування чи стентування ще до початку реального оперативного втручання.

Окрім внутрішніх процесів окремого організму, математичний апарат є незамінним для опису масштабних популяційних явищ, що становить основу математичної епідеміології. Динаміка поширення інфекційних та неінфекційних захворювань у людських популяціях описується системами нелінійних диференціальних рівнянь. Базовою та найбільш поширеною є детермінована камерна модель $SIR$ (Susceptible-Infectious-Recovered). Вона розділяє фіксовану популяцію чисельністю $N$ на три групи, що змінюються в часі: сприйнятливі до інфекції ($S$), інфіковані ($I$) та особи, які набули імунітету або померли ($R$). Система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

У цих рівняннях коефіцієнт $\beta$ відображає інтенсивність контактів, що призводять до зараження, а $\gamma$ - швидкість одужання (величина, обернена до тривалості інфекційного періоду). На основі цієї моделі математично виводиться ключовий показник епідеміології - базове репродуктивне число $R_0 = \beta/\gamma$, яке визначає середню кількість осіб, яку заражає один хворий у повністю сприйнятливій популяції. Сучасні модифікації цієї моделі ($SEIR$, $SIRD$) враховують латентний період, безсимптомний перебіг, вікову структуру населення та просторову міграцію. Вони дозволяють аналітичним шляхом розраховувати критичний поріг вакцинації для формування колективного імунітету, прогнозувати піки навантаження на систему охорони здоров'я та оцінювати економічну й медичну ефективність карантинних обмежень.

Окремим тріумфом математичної думки в медицині є сфера візуалізаційної діагностики, зокрема комп’ютерна (КТ), магнітно-резонансна (МРТ) та позитронно-емісійна томографія (ПЕТ). Жоден із цих апаратів не здатний видати готове зображення внутрішніх органів пацієнта напряму. Фізичні датчики фіксують лише сумарні сигнали послаблення рентгенівського випромінювання або радіочастотних імпульсів під різними кутами. Перетворення цих «сирих» одновимірних або двовимірних даних у деталізовану тривимірну анатомічну структуру відбувається виключно завдяки математичним алгоритмам. Математичним фундаментом комп'ютерної томографії є інтегральне перетворення Радона, яке описує сукупність лінійних інтегралів функції. Процес реконструкції зображення зводиться до розв'язання оберненої задачі - знаходження невідомої функції щільності тканин за відомими проєкціями за допомогою операцій зворотного проєктування з фільтрацією (filtered back-projection) або дискретного швидкого перетворення Фур'є (FFT). У МРТ-скануванні математика Фур'є-простору (так званого $k$-простору) визначає швидкість і якість сканування, дозволяючи за допомогою алгоритмів стиснутого зчитування (compressed sensing) відновлювати високоякісні зображення за мінімальної кількості вимірів, що значно скорочує час перебування пацієнта в томографі.

Нову епоху в медицині відкриває біоінформатика, системна біологія та технології штучного інтелекту, які повністю базуються на дискретній математиці, теорії ймовірностей, математичній статистиці та методах оптимізації. Історичний проєкт розшифровки геному людини став можливим лише після розробки складних комбінаторних алгоритмів складання фрагментів ДНК на графах (зокрема, з використанням графів де Брейни). Сьогодні математичні методи аналізу великих даних (Big Data) дозволяють здійснювати пошук генетичних дефектів, асоційованих із мультифакторними захворюваннями, такими як цукровий діабет чи онкологічні патології. Паралельно з цим, у клінічну практику активно впроваджуються штучні нейронні мережі. З математичної точки зору, глибоке навчання - це послідовне виконання надвеликих матричних обчислень, лінійних трансформацій та нелінійних функцій активації, параметри яких оптимізуються через мінімізацію функції втрат за допомогою методу градієнтного спуску. Такі математичні моделі сьогодні здатні класифікувати новоутворення шкіри за дерматоскопічними знімками з точністю, що перевищує точність середньостатистичного лікаря, або автоматично сегментувати вогнища інсульту чи метастазів на КТ-знімках у реальному часі.

Неможливо оминути роль математики у фармакології, де панує математичне моделювання фармакокінетики та фармакодинаміки (PK/PD моделі). Організм пацієнта представляють у вигляді системи взаємопов'язаних резервуарів (камерних моделей), між якими відбувається дифузія та масоперенос лікарської речовини. Швидкість зміни концентрації препарату в крові та тканинах описується системами звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що враховують швидкість введення, константи всмоктування (абсорбції) та виведення (кліренсу). Наприклад, для однокамерної моделі з внутрішньовенним болюсним введенням концентрація $C(t)$ описується експоненціальною функцією:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-k_{el} \cdot t}$$

де $C_0$ - початкова концентрація, а $k_{el}$ - константа елімінації. Завдяки цим рівнянням інженери та клінічні фармакологи розраховують терапевтичні вікна - такі дози та графіки прийому ліків, які забезпечують максимальний лікувальний ефект без досягнення порогу токсичності, що надзвичайно важливо в дитячій онкології, кардіології та анестезіології.

Таким чином, математика на сучасному етапі є потужним архітектором і драйвером розвитку медичної науки та практичної охорони здоров'я. Застосування диференціальних рівнянь, інтегральних перетворень, комбінаторики, теорії ймовірностей та методів штучного інтелекту дозволяє вивести розуміння біологічних процесів на якісно новий, точний рівень. Використання математичних моделей дає змогу мінімізувати вплив людського фактора та лікарських помилок, оптимізувати витрати медичних ресурсів, пришвидшити постановку діагнозів і створювати по-справжньому індивідуальні траєкторії лікування пацієнтів. Подальший прогрес клінічної медицини нерозривно пов'язаний із поглибленням міждисциплінарних зв'язків та

підготовкою нового покоління фахівців, здатних вільно оперувати математичним апаратом для розв'язання складних біомедичних задач.

**Література**

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у біологічних моделях. - К., 2018. - 240 с.
2. Murray J. D. Mathematical Biology: I. An Introduction. - Springer, 2002. - 551 p.
3. Канівець О. В. Математичні методи в медико-біологічних дослідженнях. - Львів: Світ, 2021. - 188 с.
4. Ляшко С. І., Черняк О. І. Математичне моделювання в біології та медицині: сучасний стан та тенденції. // Кібернетика та системний аналіз. - 2023. - №3. - С. 45–58.

***А. В. Гордієнко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. О. Карабин****, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ: ДИЛЕМА СИНЕРГІЇ ТА ЗАМІЩЕННЯ КОГНІТИВНИХ ФУНКЦІЙ

У сучасному постіндустріальному суспільстві конвергенція інформаційних технологій та фундаментальних наук змінює парадигму дослідницької діяльності. Особливе місце у цьому процесі посідає штучний інтелект (ШІ), який трансформувався з інструменту суто прикладної автоматизації в активного учасника інтелектуальних процесів, здатного оперувати великими обсягами неструктурованої інформації та оптимізувати складні обчислювальні алгоритми.

Історично математика виступала виключно як фундамент для побудови архітектур комп'ютерних систем, нейромереж та алгоритмів. Проте сьогодні спостерігається зворотний зв’язок: інтелектуальні агенти починають експансію у простір абстрактного математичного мислення. У зв’язку з цим у науковому середовищі гостро постає епістемологічна дилема: чи спроможні системи ШІ у середньостроковій перспективі повністю замінити людину як творця математичного знання.

Сучасні інтелектуальні системи, засновані на архітектурі трансформерів (*Transformers*) та глибокому навчанні з підкріпленням (*Reinforcement Learning*), демонструють значні успіхи у формалізованих доменах математики. Основними векторами їх ефективного застосування є:

*Символьні та аналітичні обчислення.* На відміну від класичних систем комп'ютерної алгебри (Maple, Mathematica), сучасний ШІ здатний розпізнавати нетривіальні патерни у великих системах диференціальних рівнянь та

знаходити аналітичні розв'язки через механізми семантичного прогнозування структури виразів.

*Автоматичне доведення теорем (Automated Theorem Proving).* Інтеграція великих мовних моделей із формальними мовами перевірки доведень (такими як *Lean* або *Coq*) дозволила автоматизувати пошук логічних ланцюжків. ШІ здатний верифікувати коректність складних математичних конструкцій, мінімізуючи людський фактор.

*Оптимізація та стохастичне моделювання.* Алгоритми нейромережевої оптимізації ефективно долають «прокляття розмірності» у багатофакторних задачах комбінаторики, математичної економіки та криптографічного аналізу.

*Статистичний інференс та предиктивна аналітика.* Обробка терабайтних масивів емпіричних даних дозволяє ШІ формулювати первинні статистичні гіпотези та знаходити приховані нелінійні кореляції, які є неочевидними для класичного візуального чи регресійного аналізу.

З погляду математичної формалізації, діяльність ШІ у цих напрямах можна описати як відображення простору вхідних параметрів $X$ у простір оптимальних рішень $Y$ за допомогою мінімізації цільової функції втрат $L(\theta)$:

$$\arg\min_{\theta} \mathbb{E}_{(x,y)\sim\mathcal{D}} [L(f(x;\theta), y)]$$

де $\theta$ — параметри (ваги) нейромережевої моделі, а $\mathcal{D}$ — розподіл тренувальних даних. Це суттєво скорочує часові витрати на рутинні обчислення, підвищуючи загальну інтенсивність наукового пошуку.

Незважаючи на феноменальну швидкість виконання обчислювальних ітерацій, архітектура сучасного ШІ містить фундаментальні обмеження, що заважають йому стати повноцінним суб'єктом математичної творчості.

По-перше, будь-яка штучна інтелектуальна система функціонує в межах заданого людиною семантичного простору й обчислювальних алгоритмів. Вона неспроможна вийти за межі аксіоматики власної навчальної вибірки (проблема генералізації поза розподілом — *Out-of-Distribution Generalization*). ШІ екстраполює наявні шаблони, але не здатний самостійно ініціювати парадигмальні зрушення, як-от створення неевклідової геометрії Лобачевського чи теорії відносності Ейнштейна.

По-друге, ШІ позбавлений математичної інтуїції та феноменологічного розуміння суті проблеми. Для машини формула — це лише послідовність токенів (символів), що підпорядковані певній синтаксичній імовірності:

$$P(W) = \prod_{i=1}^{n} P\left(w_i \mid w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}\right)$$

У цьому процесі відсутній момент «евристичного осяяння» (*insight*), який у людській свідомості часто базується на міждисциплінарних аналогіях, естетичному сприйнятті симетрії та абстрактному творчому мисленні.

У сучасній методології науки пропонується ієрархічний розподіл праці між дослідником та комп'ютерною системою. Людина виконує вищі когнітивні функції: телеологічну (визначення мети дослідження); аксіологічну (оцінка

наукової та практичної цінності результату); постановку неформалізованих задач та концептуалізацію нових математичних об'єктів. Штучний інтелект натомість бере на себе роль суперпродуктивного обчислювального та синтаксичного асистента. Він забезпечує швидке перебирання варіантів, пошук контрприкладів та технічну рутинну верифікацію. Таким чином, технології виступають інструментом розширення людських можливостей (*Intelligence Amplification*), а не їх замінником.

Найбільш продуктивною парадигмою розвитку математики у XXI столітті є модель когнітивної синергії. Об’єднання гнучкості, абстрактного мислення та інтуїції людини з колосальною обчислювальною швидкістю і безпомилковістю машин відкриває принципово нові горизонти для розв'язання фундаментальних проблем, які століттями залишалися нерозв'язаними (наприклад, проблеми тисячоліття). ШІ бере на себе рутинний пласт роботи (генерація рутинного коду, оптимізація матриць), що дозволяє математику сфокусувати свій когнітивний ресурс виключно на стратегічних та філософських аспектів дослідження, формуванні нових концептуальних систем та інтерпретації абстрактних результатів.

Штучний інтелект не спроможний повністю детермінувати й замінити професійну діяльність математиків, оскільки вища математика за своєю природою є не лише калькулятивною, а й евристично-творчою діяльністю, що вимагає специфічних людських якостей: інтуїції, гнучкості мислення та волі до створення смислів.

Технологічна еволюція радикально реконструює професійний профіль математика. Відбувається зміщення акцентів від операційно-обчислювальних навичок до архітектурно-аналітичних та інтерпретаційних компетенцій.

У довгостроковій перспективі цінність математика як науковця вимірюватиметься не алгоритмічною швидкістю обробки стандартних операцій, а здатністю мислити нестандартно, виходити за рамки наявних систем та продукувати якісно нові знання.

Взаємодія людини та штучного інтелекту є безальтернативним вектором розвитку науки, що дозволяє значно прискорити темпи науково-технічного прогресу та забезпечити ефективне розв'язання глобальних викликів сучасності.

## Література

1. Russell S., Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. — 4th ed. — Hoboken: Pearson, 2020. — 1168 p.

2. AI in Mathematical Physics and Discovery // MIT Technology Review. — 2023. — Vol. 26, No. 3. — P. 45–52.

3. Artificial Intelligence Index Report 2024 / AI Index Steering Committee, Institute for Human-Centered AI. — Stanford: Stanford University, 2024. — 352 p.

4. The Epistemological Value of Mathematics in the Digital Era. — Khan Academy Educational Studies, 2025. — 112 p.

***В. М. Торган***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА В МАРКЕТИНГУ: ЯК БРЕНДИ ПЕРЕДБАЧАЮТЬ ПОВЕДІНКУ ПОКУПЦІВ

Сучасний маркетинг дедалі більше спирається на математику та статистику, щоб передбачати поведінку споживачів. Завдяки цьому бренди можуть не тільки оцінювати ефективність реклами, але й прогнозувати попит на товари, визначати оптимальні ціни та персоналізувати пропозиції. Математичні моделі дозволяють зменшити ризик невдалих маркетингових рішень та підвищити прибутковість бізнесу.

Основою прогнозування є ймовірність та статистика. Наприклад, щоб оцінити ймовірність покупки певного продукту групою споживачів, використовується класична формула ймовірності:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

(Ймовірність події)

де n(A) — кількість споживачів, які здійснили покупку, а n(Ω) — загальна кількість потенційних споживачів.

Ця формула допомагає брендам сегментувати ринок: наприклад, визначити, які групи споживачів частіше купують преміум-продукти, а які — базові.

Для прогнозування обсягів продажів часто використовують лінійну регресію:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

(Лінійна регресія)

де y — очікуваний обсяг продажу, x — маркетинговий фактор (наприклад, витрати на рекламу), β0 та β1 — коефіцієнти, які визначають вплив фактора, ε— випадкова похибка.

На основі цієї моделі бренд може вирішити, наскільки вигідно збільшити рекламний бюджет для підвищення продажів.

Сучасні бренди також застосовують логістичну регресію для прогнозування ймовірності покупки:

$$P(y = 1) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_2 X_3)}}$$

(Логістична регресія)

де Y=1— покупка здійснена, X — характеристики споживача або поведінки (вік, стать, попередні покупки). Ця модель допомагає персоналізувати рекламні повідомлення та підвищувати конверсію.

Щоб визначити залежність між факторами (наприклад, ціною та обсягом продажу), використовують коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

(Коефіцієнт Пірсона)

Якщо r>0, фактори позитивно пов’язані; якщо r<0 — негативно. Це дозволяє брендам робити висновки про чутливість попиту до цінових змін.

Математика дає брендам потужні інструменти для прогнозування поведінки покупців. Від класичної статистики до машинного навчання — всі ці методи допомагають бізнесу приймати обґрунтовані рішення, підвищувати ефективність маркетингових стратегій та краще задовольняти потреби споживачів.

## Література

1. Kotler P., Keller K. L., Brady M., Goodman M., Hansen T. Marketing Management. 4th European Edition. — Harlow: Pearson Education, 2019.

2. Ілляшенко С. М. Маркетинг: підручник. — Суми: Університетська книга, 2023.

3. Крикавський Є. В. Маркетинг: підручник. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2020.

4. Єріна А. М. Статистика: навчальний посібник. — Київ: КНЕУ, 2020.

5. Berka K. Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. — Praha: Academia, 2006.

6. Anderson D. R., Sweeney D. J., Williams T. A. Statistics for Business and Economics. — Boston: Cengage Learning, 2020.

***С. О. Пащук***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ У МЕНЕДЖМЕНТІ

Математика відіграє фундаментальну роль у сучасному менеджменті, адже вона забезпечує точність, об'єктивність і обґрунтованість управлінських рішень. Управлінська діяльність у сучасних організаціях неможлива без кількісного аналізу, прогнозування, планування та контролю, які базуються на математичних методах і моделях.

Математика виступає не лише мовою науки, а й універсальним інструментом моделювання економічних процесів, який дає змогу менеджерам приймати оптимальні рішення в умовах невизначеності та ризику. Наприклад, за допомогою математичних моделей визначають оптимальний обсяг виробництва, розподіл ресурсів, прогнозують попит і пропозицію, аналізують рентабельність підприємства. Такі підходи забезпечують наукове обґрунтування рішень і мінімізують суб'єктивність управлінця.

Одним з найважливіших напрямів використання математики є економіко-математичне моделювання. Як зазначають Кучинський і Погорєлов (2023), економіко-математичні моделі об'єднують складні фактори в логічно послідовну схему, що дозволяє досліджувати альтернативні варіанти функціонування підприємства та наслідки управлінських рішень. Застосування таких моделей особливо актуальне у сфері управління персоналом, фінансами та маркетингом, де необхідно враховувати численні взаємозалежні показники.

До найбільш поширених методів математичного аналізу в менеджменті належать:

- методи оптимізації, що допомагають обирати найкращий варіант серед можливих (наприклад, лінійне програмування для розподілу ресурсів);
- методи прогнозування, які дозволяють передбачити майбутній стан системи на основі статистичних даних;
- методи імітаційного моделювання, що застосовуються для аналізу складних динамічних процесів (виробничих або ринкових).

Застосування математики у менеджменті дозволяє оцінювати ефективність підприємства, прибутковість, витрати та продуктивність. Математичні моделі допомагають визначити рівновагу між попитом і пропозицією, що є основою для управлінських рішень у сфері ціноутворення. Таким чином, математика виступає базовим інструментом для формування стратегії компаній.

Особливе значення мають алгоритми й аналітичні системи, які автоматизують управлінські процеси. Як підкреслюють автори порталу 79000.com.ua, алгоритми стали складовою економічного аналізу, адже вони скорочують час обчислень і підвищують точність прогнозів. Використання математичних методів у менеджменті перетворює підприємства

на системи, орієнтовані на дані (data-driven management), що підсилює конкурентоспроможність.

Не менш важлива роль математики полягає в розвитку аналітичного мислення у керівників. Вивчення математичних дисциплін в економічних університетах формує в майбутніх менеджерів уміння логічно мислити, структурувати інформацію й оцінювати наслідки управлінських рішень. Це знання стає основою для ухвалення стратегічних рішень у реальному бізнесі.

Підсумовуючи, можна зазначити, що застосування математики в менеджменті є невід'ємною частиною ефективного управління підприємствами. Математичні методи забезпечують точне планування, прогнозування й контроль, дозволяють мінімізувати ризики та приймати обґрунтовані рішення. Таким чином, математика виступає не лише інструментом розрахунків, а й ключовим чинником інноваційного розвитку управлінських систем.

**Література**

1. Кучинський В., Погорєлов С. Використання економіко-математичних моделей для прийняття ефективних рішень в сфері управління персоналом // *Вісник НТУ «ХПІ» (економічні науки)*, № 2, 2023. es.khpi.edu.ua
2. Ефективність економіко-математичних методів та моделей у сучасному бізнес-аналізі // 79000.com.ua

***О. В. Галайко***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИКА В АЛГОРИТМАХ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ: СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Сьогодні соціальні мережі та стрімінгові платформи - це не просто розважальні сервіси, а гігантські обчислювальні лабораторії. Кожного разу, коли ми розблоковуємо телефон і бачимо ідеальну підбірку постів чи фільмів, ми фактично запускаємо складний математичний механізм. У своїй доповіді я хочу продемонструвати, що за кожною "випадковою" рекомендацією стоять конкретні методи: від теорії ймовірностей до топології графів.

Все починається з того, що алгоритм перетворює нашу поведінку на цифри. Для системи не існує понять "цікаве відео" чи "драматичний фільм" - вона оперує виключно дискретними величинами. Кожна наша дія має свій ваговий коефіцієнт: звичайний лайк може важити одиницю, тоді як повний перегляд відео або його збереження отримують значно вищу вагу. Таким чином, система формує наш числовий портрет, де інтереси представлені у вигляді масивів даних.

Це дозволяє алгоритму працювати не з образами, а з математичними об'єктами, порівнюючи їхню релевантність.

Центральним інструментом персоналізації є обчислення умовної ймовірності. Алгоритм постійно аналізує мільйони попередніх сесій, щоб дати відповідь на питання: "Яка ймовірність того, що користувач взаємодіятиме з новим контентом, спираючись на його попередній досвід". Тут ми звертаємося до класичної теореми Байєса, яка дозволяє оновити ймовірність гіпотези з появою нових даних. Спрощено це можна записати так: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ - це ймовірність того, що вам сподобається фільм (подія $A$), за умови, що ви вже подивилися схожий фільм (подія $B$). Якщо статистика показує високе математичне сподівання успіху, алгоритм пропонує цей контент нам.

Яскравим прикладом такої математики є система Netflix. Вона використовує метод матричного розкладу. Уявіть величезну таблицю (матрицю), де рядки - це користувачі, а стовпці - фільми. Більшість клітинок порожні, бо ми не бачили всіх фільмів. Завдання математики - заповнити ці пустоти, обчисливши кореляцію між вашим профілем та профілями мільйонів інших людей. Так система знаходить ваших "математичних двійників", чиї цифрові відбитки збігаються з вашими на високий відсоток. Це дозволяє застосовувати метод екстраполяції: якщо ваш "двійник" зацікавився новим серіалом, система математично обґрунтовано припускає, що він зацікавить і вас.

Проте найглибший рівень аналізу відкривається нам через теорію графів. Уявімо весь контент платформи як величезний граф, де кожне відео - це вузол, а кожна наша взаємодія - це ребро, що з'єднує ці вузли. Алгоритм прагне побудувати для нас найбільш короткий та ефективний шлях у цьому графі. Але тут ми стикаємося з проблемою "інформаційної бульбашки". Оптимізуючи шлях користувача для максимального залучення, алгоритм замикає нас у межах однієї компоненти зв'язності графа. Математично це означає, що ймовірність переходу до вузлів з іншими тематичними властивостями стає мізерно малою. З погляду математики це описується через високий коефіцієнт кластеризації: користувач замикається всередині щільно пов'язаної групи вузлів (своїх інтересів), що створює ефект "ехо-камери", де нова інформація майже не має шансів пробитись крізь сформовані зв'язки. Ми опиняємося в ізольованому інформаційному просторі, де бачимо лише те, що підтверджує наші існуючі погляди.

Підсумовуючи, хочу зазначити, що алгоритми соціальних мереж - це тріумф прикладної математики. Розуміння цих механізмів дозволяє нам не лише бути свідомими споживачами цифрового контенту, а й бачити, як абстрактні формули та матричні моделі безпосередньо формують нашу сучасну реальність.

**Література**

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Київ : ЦУЛ, 2010. 424 с.

2. Кут В. І. Математичне забезпечення інтелектуальних систем персоналізації контенту. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2019. 196 с.

3. Голубничий Д. Ю., Сікора Ю. В. Методи матричного розкладу в системах рекомендацій. Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки, 2021. Т. 4. С. 45–52.

4. Кравець П. О. Теорія графів та її застосування в інформаційних технологіях : навчальний посібник. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2022. 212 с.

5. Кравець П. О. Теорія графів та її застосування в інформаційних технологіях : навчальний посібник. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2022. 212 с..

6. Висоцька В. А. Методи та засоби моделювання інформаційної діяльності користувача. Вісник Національного університету «Львівська політехніка», 2018. № 896. С. 182–195.

***А. Р. Байдюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*,
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ ДЕФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛЮВАННІ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

У сучасному інформаційному суспільстві соціальні мережі відіграють ключову роль у формуванні громадської думки, поширенні новин та впливі на поведінку людей. Завдяки високій швидкості обміну інформацією навіть незначне повідомлення може набути глобального масштабу за дуже короткий час. Це явище часто описують як "вірусне поширення" інформації. У зв'язку з цим виникає потреба у використанні математичних методів для дослідження закономірностей поширення інформації, серед яких особливе місце займають диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння дозволяють описати зміну певних величин у часі, що робить їх ефективним інструментом для моделювання динамічних процесів. У контексті соціальних мереж вони застосовуються для аналізу зміни кількості користувачів, які взаємодіють з інформацією, поширюють її або ігнорують. Формально такі процеси описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, які враховують швидкість зміни станів користувачів у часі. Це дає можливість не лише описати процес, а й прогнозувати його подальший розвиток, знаходити рівноважні стани та оцінювати стабільність системи.

Однією з найпоширеніших моделей є SIR-модель, запозичена з епідеміології. У межах цієї моделі користувачі поділяються на три категорії: сприйнятливі (S), активні (I) та неактивні (R).

Окрім класичної SIR-моделі, використовуються також її розширення, такі як SEIR (з урахуванням "прихованої" стадії) або моделі з повторним зараженням (SIS), які краще відображають поведінку користувачів у соціальних мережах. Наприклад, користувач може знову почати поширювати інформацію після повторного контакту з нею.

Сучасні дослідження також враховують психологічні та поведінкові фактори. Наприклад, рівень довіри до джерела інформації, емоційне забарвлення контенту та когнітивні упередження користувачів. Негативна або сенсаційна інформація, як правило, поширюється швидше, що може бути відображено через зміну параметрів моделі або введення додаткових змінних.

Ще одним важливим аспектом є стохастичний характер поширення інформації. У реальних мережах процеси не є повністю детермінованими, тому поряд із диференціальними рівняннями використовуються стохастичні моделі та методи Монте-Карло. Це дозволяє врахувати випадковість поведінки користувачів та більш точно описати реальні процеси.

Практичне застосування таких моделей є надзвичайно широким. Вони використовуються:

у маркетингу — для оптимізації рекламних кампаній і прогнозування вірусності контенту;

у політиці — для аналізу інформаційного впливу та поширення пропаганди;

у кібербезпеці — для виявлення та стримування дезінформації;

у кризовому менеджменті — для управління інформаційними потоками під час надзвичайних ситуацій.

Таким чином, диференціальні рівняння є потужним інструментом дослідження процесів поширення інформації в соціальних мережах. Вони дозволяють не лише описати складні соціальні явища, але й здійснювати їх кількісний аналіз, прогнозування та оптимізацію, що є особливо актуальним в умовах стрімкого розвитку цифрових технологій та інформаційного простору.

**Література**

1. Daley D.J., Kendall D.G. Epidemics and Rumours // Nature, 1965.
2. Pastor-Satorras R., Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks // Physical Review Letters, 2001.
3. Rogers E.M. Diffusion of Innovations. — Free Press, 2003.
4. Newman M. Networks: An Introduction. — Oxford University Press, 2010.
5. Кульчицький І.М. Основи математичного моделювання соціальних процесів. — Львів, 2015.
6. Barabási A.-L. Network Science. — Cambridge University Press, 2016.

***М. О. Мудра***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## АЛГЕБРА ТА ЙМОВІРНОСТІ ЯК ОСНОВА СУЧАСНИХ АЛГОРИТМІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Штучний інтелект (AI) сьогодні є одним із ключових напрямів розвитку цифрових технологій. Інтелектуальні системи використовуються у сфері безпеки, медицини, фінансів, логістики, комп'ютерного зору та обробки природної мови. Однак за складними програмними реалізаціями стоїть чіткий математичний фундамент. Саме розділи вищої математики лінійна алгебра, математичний аналіз та теорія ймовірностей формують основу сучасних алгоритмів штучного інтелекту.

Лінійна алгебра визначає структуру більшості моделей AI. Дані, з якими працює система, подаються у вигляді багатовимірних векторів, а параметри моделі - у вигляді матриць. Процес обробки інформації фактично зводиться до послідовності лінійних перетворень у багатовимірному просторі. Саме завдяки алгебраїчному апарату стає можливим працювати з великими масивами даних та будувати моделі з мільйонами параметрів. Методи зменшення розмірності, аналіз власних значень, розклади матриць - усе це дозволяє оптимізувати обчислення та підвищувати ефективність алгоритмів.

Математичний аналіз забезпечує механізм навчання моделей. Будь-яка система штучного інтелекту навчається шляхом мінімізації помилки між прогнозом і реальними даними. Для цього використовуються методи оптимізації, які базуються на поняттях похідної, градієнта, збіжності та екстремуму функції. Саме аналіз дозволяє дослідити, чи буде процес навчання стабільним, чи досягне він мінімуму та наскільки швидко це відбудеться. Без апарату диференціального числення неможливо уявити сучасні алгоритми глибокого навчання.

Теорія ймовірностей відіграє фундаментальну роль у роботі AI через невизначеність реальних даних. Будь-яке передбачення моделі є не абсолютною істиною, а оцінкою ймовірності певного результату. Саме тому штучний інтелект працює з розподілами, статистичними закономірностями та оцінками ризику. Ймовірнісні підходи дозволяють моделі адаптуватися до нової інформації, враховувати шум у даних та узагальнювати знання. Статистичні методи забезпечують перевірку якості моделі та оцінку її точності.

Показовим прикладом реалізації цих принципів є мовна модель ChatGPT, розроблена компанією OpenAI. Її робота базується на нейронній архітектурі Transformer, яка здійснює багатовимірні лінійні перетворення та аналіз залежностей між елементами тексту. Модель прогнозує наступне слово на основі статистичних закономірностей у величезних обсягах даних. Таким чином, навіть складна генерація тексту зводиться до поєднання алгебраїчних операцій і ймовірнісних оцінок.

Окремою характеристикою сучасних AI-систем є їх масштабність. Моделі можуть містити мільярди параметрів, що створює високі вимоги до ефективності обчислень. Оптимізація таких систем неможлива без глибокого розуміння математичних принципів. Крім того, важливим є питання узагальнення - здатності моделі коректно працювати з новими даними. Ця властивість безпосередньо пов'язана зі статистичними законами та теорією ризику.

Слід підкреслити, що вища математика є не лише інструментом для розрахунків, а й концептуальною основою штучного інтелекту. Вона дозволяє формалізувати процес мислення системи, досліджувати її стабільність, передбачуваність та межі застосування. Глибоке розуміння математичних основ дає можливість не лише використовувати готові алгоритми, а й створювати нові підходи до побудови інтелектуальних систем.

Отже, алгебра та ймовірності формують теоретичний фундамент сучасного AI. Саме завдяки їх поєднанню штучний інтелект перетворюється з набору програмних інструкцій на складну адаптивну систему, здатну до аналізу, прогнозування та генерації нової інформації. Подальший розвиток AI безпосередньо залежить від поглиблення математичних досліджень у цій сфері.

**Література**

1. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. – Cambridge: MIT Press, 2016.
2. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. – New York: Springer, 2006.
3. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. – New York: Springer, 2009.
4. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. – Київ: BHV, 2007.
5. Кузьменко О. В., Кравчук І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015.
6. Ляшенко О. І., Савченко В. А. Методи машинного навчання та аналізу даних. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020.

***М. С. Костомарова***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАКОН МАЛИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ВПЛИВ НА СОЦІАЛЬНІ ПРОЦЕСИ

У сучасному інформаційному суспільстві обсяг даних, з якими стикається людина, стрімко зростає, однак здатність правильно їх інтерпретувати залишається обмеженою. Одним із найпоширеніших джерел помилок у оцінюванні інформації є закон малих чисел, також відомий як поспішне узагальнення — статистичне упередження, за якого люди схильні робити надмірно узагальнені висновки на основі недостатньої кількості спостережень. Це явище веде до хибних суджень, неправильних рішень та викривлення реальної картини подій у різних сферах суспільного життя.

Беннетт коротко описав поспішне узагальнення. Він вважає, що це виведення висновку на основі невеликої вибірки, а не розгляд статистики, яка набагато більше відповідає типовій або середньостатистичній ситуації [1]. Як приклад він наводить поширену рекламу зубної пасти *Happy Glossy Smiley*, при якій 4 з 5 стоматологів її рекомендують. Проте виявляється, що насправді опитали лише п'ятьох стоматологів. Коли було опитано випадкову вибірку з 1000 стоматологів, лише 20% насправді рекомендували цей бренд.

Зі сказаного випливає, що закон малих чисел призводить до того, що люди роблять надмірно узагальнені висновки на основі обмеженої кількості спостережень. Це явище впливає на формування громадської думки, оскільки окремі події або поодинокі випадки сприймаються як репрезентативні для всієї групи. У медіапросторі та соціальних мережах закон малих чисел сприяє поширенню стереотипів і хибних уявлень про реальність. Крім того, він може спотворювати економічні та освітні оцінки, призводячи до необґрунтованих рішень і політик.

Закон малих чисел суттєво впливає на те, як люди сприймають випадковість у повсякденному житті. Ми часто очікуємо, що малі вибірки будуть точним відображенням загальної картини, тому робимо висновки на основі дуже обмежених даних. Це проявляється у побутових ситуаціях: наприклад, люди схильні вважати, що кілька випадкових подій поспіль утворюють закономірність, або що невеликий особистий досвід є достатнім, щоб судити про цілі явища чи групи людей. У результаті формується хибна впевненість у власних інтуїціях і переоцінка рідкісних або випадкових подій [2].

У соціальних процесах закон малих чисел зумовлює появу стереотипів та упереджених суджень. Люди приписують великим групам властивості, які вони спостерегли в одному чи кількох окремих випадках. Наприклад, поодинока взаємодія з представником певної професії, нації чи політичної позиції може спричинити узагальнення на всю групу. Цей же механізм лежить в основі багатьох соціальних міфів і помилкових переконань: від страху перед рідкісними

подіями, які широко висвітлюються у медіа, до формування хибної громадської думки через недостатньо репрезентативні опитування [3].

У науці, бізнесі та медицини закон малих чисел може призводити до неправильних рішень та хибних прогнозів. Дослідники часто переоцінюють значущість результатів, отриманих у малих вибірках, що веде до передчасних висновків або публікації нестійких даних. Наприклад, припустімо, що психолог досліджує, яку з двох іграшок немовлята віддають перевагу. Із перших п'яти обстежених дітей четверо обрали ту саму іграшку. Багато психологів на цьому етапі відчули б певну впевненість у тому, що нульова гіпотеза про відсутність переваги є хибною. Провівши швидкі розрахунки, психолог з'ясує, що ймовірність отримання настільки ж екстремального результату становить аж 3/8 за умови істинності нульової гіпотези [2].

У бізнесі менеджери можуть будувати стратегії на основі короткострокових трендів, а не реальних тенденцій ринку. У медицині лікарі чи пацієнти можуть вважати новий препарат ефективним або небезпечним лише через кілька спостережень, не враховуючи статистичної надійності. Таким чином, ігнорування законів великої вибірки створює ризики для аналітики, управління та наукової достовірності [4].

Закон малих чисел демонструє, наскільки глибоко людське мислення піддається когнітивним упередженням у ситуаціях, що потребують статистичної оцінки. Сприймаючи малі вибірки як повністю репрезентативні, люди формують передчасні висновки, хибно інтерпретують випадковість і переоцінюють достовірність обмежених даних. Це упередження проявляється у побуті, соціальних процесах, наукових дослідженнях та прийнятті управлінських рішень, нерідко призводячи до помилок і викривленої картини реальності. Усвідомлення обмежень малої вибірки та опора на коректні статистичні методи є необхідними умовами для підвищення якості аналітичних висновків і формування більш об'єктивного розуміння складних явищ.

**Література**

1. HastyGeneralization. LogicallyFallacious. URL: https://www.logicallyfallacious.com/logicalfallacies/Hasty-Generalization
2. Tversky & D. Kahneman (1971): Belief in the Law of Small Numbers. *Psychological Bulletin* 1971, Vol. 76, No. 2, 105-110
3. Taleb, N. N. Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and in the Markets. — New York: Random House, 2001. — 272 p.
4. Кульчицький І. М. Вибір розміру вибірки для статистичних опрацювань текстів / І. М. Кульчицький // Вісник Національного університету "Львівська політехніка Серія: Інформаційні системи та мережі : збірник наукових праць. – 2015. – № 814. – С. 293–299.

***Є. І. Куприч***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***І. М. Сов'як****, старший викладач кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Математичне моделювання є одним із найважливіших методів наукового пізнання, який широко застосовується для дослідження реальних процесів у природі, техніці, економіці та суспільстві. Його сутність полягає у створенні спрощеного формалізованого образу об'єкта, явища або процесу за допомогою математичних символів, формул, рівнянь, функцій і графіків. Саме це дає змогу досліднику глибше зрозуміти властивості системи, простежити закономірності її розвитку та передбачити можливі результати її функціонування.

Актуальність математичного моделювання зумовлена тим, що в багатьох випадках безпосереднє дослідження реального об'єкта є складним, дорогим або навіть небезпечним. Під час аналізу природних катастроф, економічних криз, технічних аварій чи складних виробничих процесів набагато ефективніше спершу побудувати математичну модель, а вже потім на її основі оцінювати можливі наслідки та шляхи вирішення проблеми. Таким чином, математичне моделювання виступає не лише теоретичним, а й практичним інструментом дослідження.

Процес створення математичної моделі включає кілька основних етапів. Спочатку формулюється проблема та визначається мета дослідження. Далі виділяються найбільш суттєві характеристики об'єкта, між якими встановлюються математичні залежності. Після побудови моделі проводиться її дослідження за допомогою відповідних математичних методів, а отримані результати порівнюються з реальними даними. Якщо модель достатньо точно відображає поведінку об'єкта, її можна використовувати для прогнозування та прийняття рішень.

Сучасним прикладом адекватної математичної моделі є цифровий двійник міста Львова. Така модель дає змогу поєднати реальні дані про транспортні потоки, швидкість руху, затримки та завантаженість доріг із математичними залежностями, що описують функціонування міської транспортної системи. Її адекватність виявляється в тому, що вона не відтворює реальність повністю, а відображає лише ті параметри, які є суттєвими для поставленої мети — прогнозування заторів, аналізу змін у дорожній мережі та вибору ефективних управлінських рішень. Саме тому цифровий двійник міста можна вважати переконливим сучасним прикладом практичного застосування математичного моделювання, яке поєднує точність математичного апарату з потребами реального управління.

Отже, математичне моделювання є універсальним і ефективним засобом дослідження реальних процесів. Воно поєднує точність математичного апарату з

практичними потребами сучасної науки, техніки та управління. Завдяки моделюванню можна не лише пояснювати складні явища, а й передбачати їх розвиток, що робить цей метод особливо важливим у сучасному світі.

**Література**

1. Кремер Н. Ш. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ : Центр учбової літератури, 2010. 576 с.
2. Гмурман В. Є. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ : Вища школа, 2004. 479 с.
3. Моисеєв Н. Н. Математичне моделювання систем. Київ : Наукова думка, 1984. 304 с.

***Є. Цітковський***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***О. Ю. Чмир,*** *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

У процесі керування виробництвом найчастіше виникають задачі про призначення виконавців на різні види робіт, наприклад: підбір кадрів і призначення кандидатів на вакантні посади, розподіл джерел капітальних вкладень між різними проєктами науково-технічного розвитку, розподіл екіпажів літаків між авіалініями.

Задачі про призначення можна сформулювати в такий спосіб. Необхідно виконати $N$ різних робіт. Для їхнього виконання можна залучити $N$ робітників. Кожний робітник готовий виконати будь-яку роботу, але виконання будь-якої роботи проводиться лише одним робітником. Потрібно так розподілити роботи між робітниками, щоб загальні витрати на виконання всіх робіт були мінімальними.

Побудуємо розв'язок задачі про призначення у пакеті Maple, у якому вбудовано пакет Optimization, який використовує методи оптимізації.

*Задача*. Фірма одержала замовлення на розробку семи програмних продуктів. Для виконання цих замовлень вирішено залучити сім найбільш досвідчених програмістів. Кожний з них повинен написати одну програму. У наступній таблиці наведені оцінки часу (у днях), необхідного програмістам для виконання кожної із цих робіт:

| Номер програми / Номер програміста | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 46 | 59 | 24 | 62 | 67 | 34 | 56 |
| 2 | 47 | 56 | 32 | 55 | 70 | 32 | 51 |
| 3 | 44 | 52 | 19 | 61 | 60 | 27 | 48 |
| 4 | 47 | 59 | 17 | 64 | 73 | 29 | 45 |
| 5 | 43 | 65 | 20 | 60 | 75 | 35 | 55 |
| 6 | 41 | 53 | 31 | 59 | 65 | 23 | 49 |
| 7 | 48 | 57 | 23 | 63 | 74 | 28 | 50 |

Оцінки були дані самими програмістами, і у фірми немає підстави їм не довіряти. Треба розподілити роботи між програмістами, щоб загальна кількість людино-днів, витрачена на виконання всіх семи замовлень, було мінімальним. Яка мінімальна кількість людино-днів необхідна для виконання всіх семи замовлень?

Використовуючи програму Maple, розв'язуємо цю задачу [1].

```
> restart; with(Optimization) :
> c := [[46,59,24,62,67,34,56],[47,56,32,55,70,32,51],[44,52,19,61,60,27,48],[47,59,17,64,73,29,45],[43,65,20,60,75,35,55],[41,53,31,59,65,23,49],[48,57,23,63,74,28,50]] : x := matrix(7,7,[m[1,1],m[1,2],m[1,3],m[1,4],m[1,5],m[1,6],m[1,7],m[2,1],m[2,2],m[2,3],m[2,4],m[2,5],m[2,6],m[2,7],m[3,1],m[3,2],m[3,3],m[3,4],m[3,5],m[3,6],m[3,7],m[4,1],m[4,2],m[4,3],m[4,4],m[4,5],m[4,6],m[4,7],m[5,1],m[5,2],m[5,3],m[5,4],m[5,5],m[5,6],m[5,7],m[6,1],m[6,2],m[6,3],m[6,4],m[6,5],m[6,6],m[6,7],m[7,1],m[7,2],m[7,3],m[7,4],m[7,5],m[7,6],m[7,7]]) :
> F := sum('sum'("c"[i,j]*"x"[i,j], j=1..7), i=1..7) :
> obmez := {sum('x'[i,1], i=1..7)=1, sum('x'[i,2], i=1..7)=1, sum('x'[i,3], i=1..7)=1, sum('x'[i,4], i=1..7)=1, sum('x'[i,5], i=1..7)=1, sum('x'[i,6], i=1..7)=1, sum('x'[i,7], i=1..7)=1, sum('x'[1,j], j=1..7)=1, sum('x'[2,j], j=1..7)=1, sum('x'[3,j], j=1..7)=1, sum('x'[4,j], j=1..7)=1, sum('x'[5,j], j=1..7)=1, sum('x'[6,j], j=1..7)=1, sum('x'[7,j], j=1..7)=1} :
> S := LPSolve(F, obmez, assume=binary);
```

$$S := [306, [m_{1,1}=1, m_{1,2}=0, m_{1,3}=0, m_{1,4}=0, m_{1,5}=0, m_{1,6}=0, m_{1,7}=0, m_{2,1}=0, m_{2,2}=0, m_{2,3}=0, m_{2,4}=1, m_{2,5}=0, m_{2,6}=0, m_{2,7}=0, m_{3,1}=0, m_{3,2}=0, m_{3,3}=0, m_{3,4}=0, m_{3,5}=1, m_{3,6}=0, m_{3,7}=0, m_{4,1}=0, m_{4,2}=0, m_{4,3}=0, m_{4,4}=0, m_{4,5}=0, m_{4,6}=0, m_{4,7}=1, m_{5,1}=0, m_{5,2}=0, m_{5,3}=1, m_{5,4}=0, m_{5,5}=0, m_{5,6}=0, m_{5,7}=0, m_{6,1}=0, m_{6,2}=0, m_{6,3}=0, m_{6,4}=0, m_{6,5}=0, m_{6,6}=1, m_{6,7}=0, m_{7,1}=0, m_{7,2}=1, m_{7,3}=0, m_{7,4}=0, m_{7,5}=0, m_{7,6}=0, m_{7,7}=0]]$$

Отриманий результат у вигляді таблиці

```
> assign(S[2]);
> 'x'=x;'F'=F;
```

$$x = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$F = 306$$

Розв'язання цієї задачі привело до висновку, що мінімальна кількість людино-днів, витрачена на виконання всіх семи замовлень становить $F = 306$ (дн.). При цьому

1- ий програміст буде розробляти програмний продукт A,
2-ий програміст – програмний продукт D,
3-ій програміст – програмний продукт E,
4-ий програміст – програмний продукт G,
5-ий програміст – програмний продукт C,
6-ий програміст – програмний продукт F,
7-ий програміст – програмний продукт B.

**Література**

1. *Махней О.В., Гой Т.П.* (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.

***С. Маруся́к***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,*
*Науковий керівник* ***О. Ю. Чмир****, кандидат фізико-математичних наук, доцент,*
*Доцент кафедри прикладної математики і механіки*

## АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРИ У ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Нехай заданий орієнтований граф з $n$+1 вершинами, у якому виділені дві вершини – вхід (нульова вершина) і вихід (вершина з номером $n$). Такі графи часто у літературі називають сітьовими графіками. Нехай для кожної дуги задане число $l_{ij}$ (довжина або вага дуги). Граф, для якого задано довжини дуг називають зваженим. Тоді довжиною шляху вважають суму довжин вхідних у нього дуг. Якщо довжини дуг не задані, то довжина шляху визначається як число вхідних у нього дуг. Завдання полягає в пошуку найкоротшого шляху (шляху мінімальної довжини) від початкової до кінцевої вершини.

Припустимо, що в сітьовому графіку можна пронумерувати вершини таким чином, що для будь-якої дуги ($i$, $j$) має місце $j > i$. Така нумерація називається правильною.

Найкоротший шлях у сітьовому графіку, що має правильну нумерацію, визначається алгоритмом Дейкстри:

Крок 0: Позначаємо нульову вершину індексом $\lambda_0 = 0$;

Крок $k$: Позначаємо вершину $k$ індексом $\lambda_k = \min_{i<k}(\lambda_i + l_{ik})$.

Індекс виходу $\lambda_n$ буде дорівнювати довжині найкоротшого шляху.

Коли індекси установляться, найкоротший шлях визначається методом зворотного ходу від виходу до входу.

Описаний алгоритм дозволяє знайти найкоротший шлях від нульової вершини до всіх інших. Цей алгоритм можна застосовувати лише для дуг невід'ємної довжини.

Продемонструємо цей алгоритм на прикладі.

Нехай задано мережу перевезення деякого товару з пункту 1 до пункту 8 (рис. 1). Для кожної дуги задане число – це кількість днів на перевезення товару через дугу. Знайти найкоротший шлях між першою вершиною та вершиною з найбільшим номером.

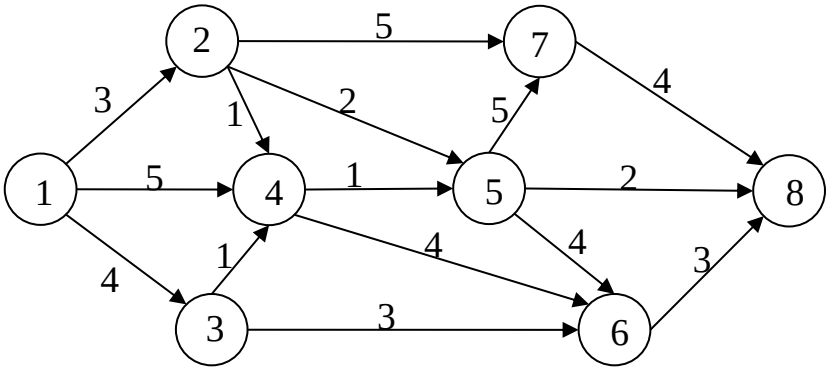



**Рисунок 1** – Мережа по перевезенню деякого товару з пункту 1 до пункту 8

На рис. 2. наведено застосування алгоритму Дейкстри для визначення найкоротшого шляху (числа біля дуг дорівнюють довжинам дуг, індекси вершин поміщені у квадратні дужки, найкоротший шлях виділений жирними червоними лініями).

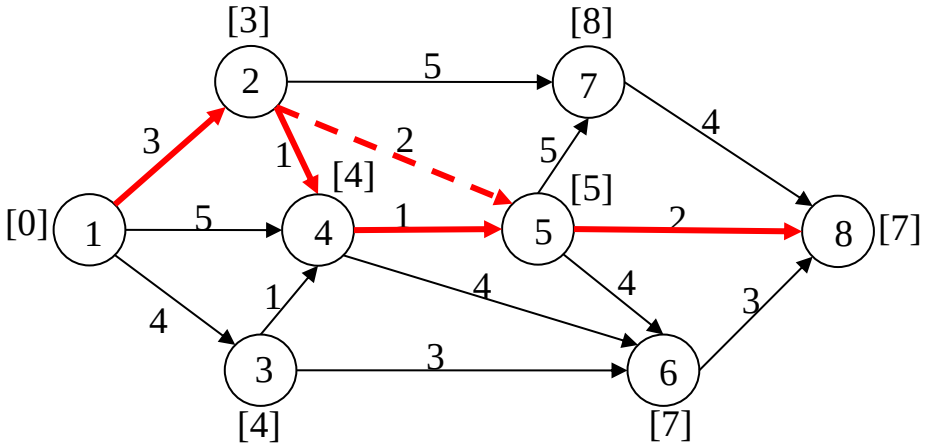



**Рисунок 2** – Розв'язок задачі

Отже, використавши алгоритм Дейкстри, товар з пункту 1 до пункту 8 буде перевезено за 7 днів, причому, шлях треба вибрати таким: $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 8$ або $1 \to 2 \to 5 \to 8$.

## Література

1. *Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М.* (2016). Дискретна математика. – Л.: "Магнолія – 2006", 2016. – 432 с.

***А. Ю. Басюк***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

## ФРАКТАЛИ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНА ПРИРОДА

Фрактал — це складна геометрична фігура, що має властивість самоподібності: її частини подібні до цілого, а структура зберігається при будь-якому збільшенні.

Основними математичними властивостями фракталів є: самоподібність (структура об'єкта повторюється на різних масштабах), нескінченна деталізація (незалежно від рівня збільшення, фрактал зберігає складну структуру. Це означає, що його межі можуть мати нескінченну довжину при обмеженій площі), дробова розмірність (числова характеристика, що відображає ступінь заповнення простору самоподібним об'єктом та його складність при зміні масштабу).

Фрактальна геометрія відіграє важливу роль у сучасній науці, оскільки дозволяє ефективно моделювати складні природні процеси та об’єкти, які не можуть бути адекватно описані засобами класичної евклідової геометрії. У біології та медицині фрактальна геометрія дозволяє аналізувати складні внутрішні структури організмів. Фрактальний аналіз також застосовується для дослідження поверхні клітин і тканин, а в медицині — для виявлення патологій, наприклад, змін у структурі судин при серцево-судинних захворюваннях або аналізу пухлинних утворень. У фізиці фрактали використовуються для опису хаотичних процесів і складних систем. У сучасних технологіях фрактальні принципи використовуються при створенні антен із широким діапазоном частот, а також у комп’ютерній графіці для генерації реалістичних природних ландшафтів.

Мета нашої роботи - показати використання фрактальної геометрії на одному з найвідоміших і практично важливих прикладів — це проєктування фрактальних антен**.**

Фрактальні антени мають форму, побудовану за принципом самоподібності (наприклад, за зразком кривої Коха або трикутника Серпінського). Завдяки такій геометрії одна антена може ефективно працювати на різних частотах одночасно. Це пояснюється тим, що різні масштаби фрактальної структури взаємодіють із хвилями різної довжини.

Фрактальні антени використовуються в мобільних телефонах і бездротових пристроях (Wi-Fi, GPS), де необхідно забезпечити роботу в кількох діапазонах частот при мінімальних розмірах антени. Завдяки фрактальній формі вдається зменшити габарити пристрою без втрати якості сигналу.

Найбільш поширеним прикладом є антена на основі трикутника Серпінського, яка складається з повторюваних геометричних елементів різного масштабу. Ця структура ідеально підходить для створення багатодіапазонних антен. Кожен трикутник меншого розміру в структурі є масштабованою копією цілого.

**Формула резонансних частот.** Оскільки структура самоподібна з коефіцієнтом масштабування 1/2, резонансні частоти такої антени утворюють геометричну прогресію: $f_n = f_0\ \delta^n$, де: $f_0$ — основна (найнижча) резонансна частота, δ — коефіцієнт масштабування (для класичного трикутника Серпінського δ = 2), $n$ — номер гармоніки або ітерації.

Для проектування важливо знати, наскільки ефективно фрактал заповнює простір. Це визначається за допомогою розмірності Хаусдорфа:

$$D = \frac{\lg(N)}{\lg(1/s)},$$

де N — кількість самоподібних частин, s — коефіцієнт масштабування.

Для розробника антен ця цифра D показує "ефективність" заповнення простору:

Якщо D = 1, антена поводиться як звичайна лінія (вузькосмугова).

Якщо D наближається до 2, антена починає набувати властивостей площини (стає широкосмуговою).

При проєктуванні фрактальних антен саме логарифмічне співвідношення між ітераціями визначає, наскільки компактною буде конструкція порівняно з її класичним аналогом.

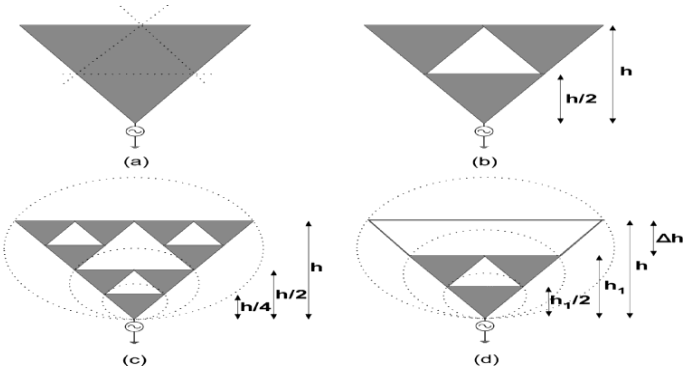



**Рисунок 1**

На рисунку ми бачимо:

1. Процес ітерацій: як з одного суцільного рівностороннього трикутника шляхом видалення центральних частин утворюється складна мереживна структура.
2. Геометричну самоподібність: кожен малий трикутник є точною копією всього великого трикутника, тільки у меншому масштабі.
3. Інженерне втілення: на фото антени видно, як мідне напилення на діелектричній підкладці повторює цей математичний візерунок.

Завдяки такій структурі, антена має кілька резонансних частот. Найбільший трикутник відповідає за найнижчу частоту, а менші внутрішні трикутники — за вищі частоти. Це і робить її "багатодіапазонною".

Отже, фрактальний підхід дозволяє створювати компактні, високоефективні та універсальні пристрої зв'язку, що було б неможливо в межах класичної евклідової геометрії.

**Література**

1. Євгенія П. Ігри Хаосу. Трикутник Серпінського. Фрактали. *Механіко-математичний факультет Львівського національного університету імені Івана Франка*. URL:http://mmf.lnu.edu.ua/le/ta/1966

2. Кривобочек, Корнійчук. Фрактальна геометрія у розвитку сучасних технологій та прикладної математики. *Збірник доповідей учасників III студентської науково-технічної конференції інженерно-технічного факультету ЖНАЕУ*: науково-техн. конф., м. Житомир, 25груд. 2023р.

***В. В. Варивода***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

## МАТЕМАТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ БЕЗПЕЧНОЇ ЕВАКУАЦІЇ З НАВЧАЛЬНИХ КОРПУСІВ: ВІД РОЗРАХУНКУ ДО ПРАКТИКИ

В умовах сьогодення, актуальною є проблема евакуації людей з різного типу будівель, приміщень. Надзвичайні ситуації вимагають швидких, чітких і ефективних дій, де кожна секунда впливає на збереження життя та здоров'я людей. Саме тому питання математичного моделювання процесів евакуації є ключовим інструментом для прогнозування поведінки потоків людей, визначення вузьких місць при плануванні будівель та оптимізації шляхів виходу. Забезпечення безпеки в навчальних закладах є пріоритетним завданням, де критичним показником є час.

Метою даної роботи є аналіз математичних методів розрахунку евакуації та їх практичного застосування для підвищення ефективності заходів безпеки в освітніх установах. Розглянемо приклад евакуації студентів з аудиторії на другому поверсі до виходу на вулицю.

Вихідні дані для розрахунку:

- ✓ приміщення: аудиторія на 30 осіб.
- ✓ маршрут: аудиторія → двері → коридор (20 м) →сходи вниз (1 марш, 5 м) → вихід.
- ✓ ширина дверей: 0.9 м.
- ✓ ширина коридору: 2.2 м.
- ✓ ширина сходів: 1.5 м.

**1**. Розрахуємо час виходу з аудиторії ($t_1$).

Застосуємо формулу розрахунку пропускної спроможності дверей: $t_1=N/(q\cdot b)$, де N — кількість людей (30 осіб), b — ширина дверей (0.9 м), q — розрахункова інтенсивність руху (для дверей при середній щільності приймаємо ≈50 осіб/(м·хв)). Отже, $t_1=30/(50\cdot 0.9)\approx 0.67$ хвилини (40 секунд).

**2**. Розрахуємо час руху по коридору ($t_2$).

Визначаємо щільність потоку (D). Оскільки люди виходять з однієї аудиторії:

D=(f·N)/(b·L), де f — площа горизонтальної проєкції людини (≈0.1 м²).
Припустимо, потік розтягнувся на 5 метрів коридору (L): D=(0.1·30)/(2.2·5)=0.27
При такій щільності швидкість руху (V) становить приблизно 80 м/хв.
$t_2$=довжина коридору/V=20/80=0.25 хвилини (15 секунд).

**3.** Рух по сходах ($t_3$).

Швидкість руху вниз по сходах зазвичай на 10−15% нижча, ніж по коридору. Приймаємо Vсходи =70 м/хв. $t_3$=5/70≈0.07 хвилини (~5 секунд).
Отже, загальний час (T): $T=t_1+t_2+t_3$=40с+15с+5с=60секундт(1хвилина).
Порівняє цей час з критичним часом ($t_{кр.}$).
Для навчальних корпусів без автоматичних систем димовидалення критичний час за умовою задимлення може становити 1.5 – 2 хвилини. Оскільки наш результат (1 хв) < 2 хв, дана схема евакуації є математично безпечною.
Але, якщо ми врахуємо реальні обставини, то що зміниться на практиці?

Якщо в коридор одночасно вийдуть студенти з 5-ти аудиторій, то

- ✓ щільність (D) зросте до 0.8–0.9;
- ✓ швидкість (V) зменшиться до 15 м/хв;
- ✓ час $t_2$ зросте з 15 секунд до 1.3 хвилини;
- ✓ загальний час перевищить критичну межу.

Все це означає, що ми можемо побачити "затор" ще до того, як сталася реальна пожежа. Тому ми повинні прийняти рішення щоб розширити виходи або змінити графік евакуації.

**Висновок.** Математичне моделювання — це не просто цифри, а інструмент, що дозволяє спрогнозувати поведінку системи «людина — будівля — небезпека». Впровадження розрахункових моделей у практику дозволяє замінити формальні плани евакуації на дієві алгоритми порятунку життя.

## Література

1. ДСТУ 8828:2019. Пожежна безпека. Загальні положення. (Базовий стандарт України для розрахунків).
2. ДБН В.1.1-7:2016. Пожежна безпека об’єктів будівництва. (Норми щодо ширини та довжини евакуаційних шляхів).
3. ДБН В.2.2-3:2018. Будинки і споруди. Заклади освіти. (Технічні вимоги до навчальних корпусів).
4. ISO 20414:2020. Fire safety engineering — Verification and validation of protocol for crowd evacuation models. (Міжнародний стандарт моделювання евакуації).
5. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 2000. (Фундаментальне дослідження заторів та «ефекту паніки»).
6. Still K. G. Introduction to Crowd Science. *CRC Press*, 2014. (Аналіз динаміки натовпу та математичне прогнозування ризиків).
7. Proulx G. Movement of People: The Evacuation Timing. *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering*, 2016. (Розрахунок часових параметрів виходу з приміщень).

***В. Татулич***
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
*Науковий керівник* ***М. І. Кусій,*** *кандидат педагогічних наук, доцент, завідувачка кафедри прикладної математики і механіки*

## ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ПЕРКОЛЯЦІЙНІ МОДЕЛІ В ПРОГНОЗУВАННІ ДИНАМІКИ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

Забезпечення безпеки життєдіяльності та збереження природних екосистем потребує розробки високоточних методів прогнозування надзвичайних ситуацій. Традиційні детерміновані моделі поширення вогню часто виявляються малоефективними, оскільки не враховують стохастичну (випадкову) природу горіння в неоднорідному середовищі. Використання методів фрактальної геометрії та теорії перколяції дозволяє математично описати перехід локального займання у масштабну катастрофу як фазовий перехід у складній системі.

Лісова пожежа є класичним прикладом природного фракталу. Її поширення базується на принципі самоподібності: морфологія вогню на рівні окремих гілок подібна до структури фронту на рівні гектарів лісу.

Для опису складності межі пожежі використовується розмірність Хаусдорфа (D). На відміну від ідеальної лінії (D=1) або площини (D=2), реальний фронт пожежі має дробову розмірність ($1.3 < D < 1.7$). Це свідчить про високий ступінь «порізаності» краю вогню. Математично це означає, що периметр пожежі зростає значно швидше, ніж її радіус, що призводить до: збільшення площі теплового випромінювання на невигорілі ділянки; формування турбулентних потоків повітря, що підсилюють приплив кисню; виникнення «плямистих» осередків попереду основного фронту.

Лісовий масив представляється у вигляді двовимірної решітки (2D-grid), де кожна клітина (ділянка лісу) може перебувати у двох станах: «горючий матеріал» або «порожнеча/вигоріла зона». Ключовим параметром є імовірність зв’язку (p), що залежить від густини дерев, вологості та швидкості вітру. Згідно з теорією, існує критичний поріг ($p_c$):

- Якщо $p < p_c$, вогонь поширюється локально і згасає, утворюючи ізольовані кластери.
- Якщо $p > p_c$, виникає «нескінченний кластер», і пожежа охоплює весь масив.

Для квадратної решітки теоретичне значення $p_c \approx 0.5927$. Це означає, що при заповненості лісу горючими матеріалами понад 60%, ризик неконтрольованого поширення зростає експоненціально. Це дозволяє науково обґрунтувати ширину мінералізованих смуг. Вони мають бути не просто бар'єрами, а інструментом зміни топології лісу, щоб ефективна ймовірність зв'язку між ділянками гарантовано падала нижче порога $p_c$.

Динаміка температури в зоні пожежі демонструє характерні фази, що відповідають станам складної системи:

1. Фаза інкубації (тління): повільна самоорганізація системи.
2. Точка займання: перехід від прихованого горіння до відкритого полум'я.
3. Критичний спалах (Flashover): точка фазового переходу, де за рахунок накопиченої енергії крива температури різко йде вгору. Математично це описується рівнянням Арреніуса:

$$\frac{dT}{dt} = A \cdot e^{-\frac{E_\alpha}{RT}}, \text{ де}$$

A - передекспоненціальний множник (фактор частоти), що враховує частоту зіткнень молекул.

$E_\alpha$ - енергія активації (мінімальна енергія, необхідна для реакції).

R - універсальна газова стала ().

T- абсолютна температура в Кельвінах .

Коли система досягає критичної температури, швидкість хімічної реакції окислення починає зростати експоненціально, що на графіку відображається як майже вертикальний підйом кривої. Це відповідає моменту, коли фрактальні гілки вогню зливаються в єдиний потужний фронт. Фрактальна модель доводить, що шлях фронту ($S = vt$) не є сталою величиною, а залежить від топологічної структури лісу. Використання мінералізованих смуг як геометричних розривів дозволяє переводити систему в стан, де самопідтримуване горіння стає неможливим. Це відкриває нові можливості для автоматизованих систем моніторингу та прийняття рішень під час гасіння лісових пожеж.

**Висновки.** Фрактальний та перколяційний підходи дозволяють відійти від лінійних розрахунків на користь імовірнісного аналізу. Це дає можливість не лише прогнозувати напрямок вогню, а й розраховувати необхідну глибину превентивних заходів, перетворюючи хаотичну стихію на систему з прогнозованими критичними точками.

## Література

1. Мандельброт Б. *Фрактальна геометрія природи*. — К.: Ніка-Центр, 2002. — 448 с.

2. Stauffer D., Aharony A. *Introduction to Percolation Theory*. — Taylor & Francis, 2018. (Сучасний погляд на критичні пороги в решітках). Zohdi, T. I. *Modeling and Simulation of Wildfire Propagation*. — Springer Nature, 2022.

3. Mohazzabi P. High-altitude free fall. *American Journal of Physics*. 2011. Vol. 79. P. 1115–1121.

# ЗМІСТ

**СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....** 3

***У.Р. Квасниця, Б.М. Мулярчик***
ГЕЙМІФІКАЦІЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ НАВЧАННЯ ПРАВИЛАМ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ..... 3

***В. Дузенко***
МАТЕМАТИКА У СПОРТІ..... 5

***А. Сем'янів***
ПОХІДНА ДЛЯ ПІДПРИЄМНИЦТВА:ЯК ПОХІДНА ДОПОМАГАЄ БІЗНЕСУ..... 7

***Д. Разумовський***
АНАЛІЗ ДНК МАТЕМАТИЧНИМИ МЕТОДАМИ..... 9

***А. Бусел***
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ У СЕЙСМОГРАФІЇ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЗЕМЛЕТРУСІВ..... 11

***К. О. Задорожна***
МАТЕМАТИКА ЦІН: ДОСЛІДЖЕННЯ СПРИЙНЯТТЯ ЧИСЕЛ ТА «ЕФЕКТУ ЛІВОЇ ЦИФРИ» В ІСПАНСЬКИХ МЕРЕЖАХ СУПЕРМАРКЕТАХ MERCADONA ТА CARREFOUR..... 13

***А. А. Ковальський***
ЙМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕГРАДАЦІЇ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ..... 16

***В. О. Кошелєв***
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ЯК ОСНОВА АВТОНОМНОЇ НАВІГАЦІЇ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ ТА РОБОТІВ..... 18

***В. А. Сусло***
МАТРИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МЕХАТРОННИХ ТА РОБОТОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ..... 22

***М. Сеньків, І. Коваль***
ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ПОШИРЕННЯ ТОКСИЧНИХ ПРОДУКТІВ ГОРІННЯ ТА ЇХ ВПЛИВУ НА БЕЗПЕЧНУ ЕВАКУАЦІЮ У САНАТОРІЯХ-ПРОФІЛАКТОРІЯХ ТА РЕАБІЛІТАЦІЙНИХ ЦЕНТРАХ..... 24

***В. А. Філіппова, Р. А. Торський***
МАТЕМАТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ РОЗМІЩЕННЯ АКУСТИЧНИХ СИСТЕМ ОПОВІЩЕННЯ В НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ..... 26

***А. С.Бучила***
ОПТИМАЛЬНІ МАРШРУТИ ДЛЯ РЯТУВАЛЬНИКІВ..... 28

***М. М. Чередниченко***
РОЛЬ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ..... 30

***О. С. Танасков***
ХАКЕРСЬКА МАТЕМАТИКА: КОМБІНАТОРНІ ТА ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ В АЛГОРИТМАХ АТАКИ Й ЗАХИСТУ АВТЕНТИФІКАЦІЙНИХ ДАНИХ..... 32

***П. О. Марусов***
КРИВА ПЕРЕСЛІДУВАННЯ..... 35

***А. В. Гончарук***
МАТЕМАТИКА ПОЗА ПІДРУЧНИКОМ АБО ЯК ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ КЕРУЮТЬ СУЧАСНИМ СВІТОМ..... 38

***В. О. Греков***
ЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ЗАДАЧАХ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛІННЯ БЕЗПІЛОТНИМИ ЛІТАЛЬНИМИ АПАРАТАМИ..... 40

***Є. В. Добрянський***
ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ У ВІЙСЬКОВІЙ СПРАВІ..... 41

***П. Кушнір***
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ТРИМАЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ ПЕРЕНОСНИХ ПОЖЕЖНИХ ДРАБИН..... 43

***Д. Кондратенко***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КАВІТАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПОЖЕЖНИХ НАСОСАХ ПІД ЧАС ЗАБОРУ ВОДИ З ВІДКРИТИХ ВОДОЙМ..... 45

***М. А. Каптованець***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПСИХОЕМОЦІЙНОЇ РЕАБІЛІТАЦІЇ ФАХІВЦІВ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ПРОФЕСІЙ У ПІСЛЯКРИЗОВИЙ ПЕРІОД..... 47

***Н. В. Кравс***
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО І СИЛОВОГО АНАЛІЗУ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ..... 50

***В. М. Місюк***
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ ЗУБЧАСТИХ І КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ..... 52

***Х. Ю. Кучма***
МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТА ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬЦЕВИХ ПІДПИСІВ НА ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ..... 54

***О. Р. Юхим***
МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ВІДІГРАЛИ КЛЮЧОВУ РОЛЬ У РОЗВИТКУ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ..... 56

***В.-І. Копач***
ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ШИФРУВАННЯ У СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ БПЛА..... 57

***Л. С. Товкач***
ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СТРИЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ВІЙСЬКОВОГО ПРИЗНАЧЕННЯ..... 60

***О. І. Черкаський, М. О. Назаров***
ЗАСТОСУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР У ЗАДАЧАХ УРАЖЕННЯ ЦІЛЕЙ ПРОТИВНИКА..... 61

***С. О. Шкурат***
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ОЦІНКИ ЛІНІЇ ВІЗУВАННЯ В АРТИЛЕРІЙСЬКИХ РОЗРАХУНКАХ..... 63

***Н. П. Юрко***
ДИЗ'ЮНКТИВНІ ТА КОН'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ У ВІЙСЬКОВО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ..... 65

***В. Ю. Бабійчук***
МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЗАКОНУ БУГЕРА − ЛАМБЕРТА – БЕРА..... 67

***М.Р. Лапігуска***
ВЕКТОРНО-МАТРИЧНИЙ ДОБУТОК НА ОСНОВІ ФАКТОРИЗАЦІЇ ТА ОПТИМАЛЬНОГО БЛОЧНОГО РОЗБИТТЯ..... 69

***Н.В. Лоїк***
МАТЕМАТИЧНЕ ЯДРО ПРОГРАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО АНАЛІЗУ НАУКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ З ЦИВІЛЬНОЇ БЕЗПЕКИ..... 71

***У.І. Гавілей***
ОПТИМАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ПРОЦЕДУРИ ДЛЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ..... 73

***Д. Р. Терлецька, О.П. Грищенко***
ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ У МЕХАНІЦІ..... 75

***А. Ю. Дроботя***
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ РУХУ ШАТУНА, ОТРИМАНЕ НА ПІДСТАВІ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ІІ РОДУ..... 77

***Д. О. Киця***
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІГНУТОЇ ОСІ БАЛКИ НА ДВОХ ОПОРАХ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ..... 80

***А. П. Уманський***
СИСТЕМИ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ..... 82

***В. П. Мулик***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ СТАЛЕВИХ СТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ЧАС ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВАННЯ..... 84

***М. Беззубка***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВУЗЛІВ РЯТУВАЛЬНОГО ІНСТРУМЕНТУ..... 87

***К. Радзіонов***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТРАТИ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ВНАСЛІДОК ТЕРМІЧНОГО РОЗШИРЕННЯ ВІД ДІЇ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ..... 89

***Д. Гніздюх***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ВИСУВНИХ ПОЖЕЖНИХ АВТОДРАБИН..... 91

**СЕКЦІЯ 2.**
**МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ, ЩО ЗМІНИЛИ СВІТ1**..... 94

***Р. І. Баб'як, Н. Р. Лазірко***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ВУГЛЕКИСЛОГО ГАЗУ В ПРИМІЩЕННЯХ ТА ТЕХНІЧНИЙ КОНТРОЛЬ.....

***С. В. Найдич***
ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ У ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ..... 96

***К. М. Ткачук***
ТЕОРЕМА ПІФАГОРА: МІЖДИСЦИПЛІНАРНІ АСПЕКТИ АНАЛІЗУ ТА МЕХАНІКИ..... 98

***О. Ю.Кондера***
АНАЛІЗ ВІДКРИТИХ ПРОБЛЕМ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ: МАГІЧНІ КВАДРАТИ ТА ГІПОТЕЗА КОЛЛАТЦА..... 100

***А. В. Данило***
ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ ТА СУЧАСНИХ ІТ-ТЕХНОЛОГІЯХ..... 102

***А. А. Серафин***
КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ ЩІЛЬНИХ ЛАНЦЮГІВ ДІЛЬНИКІВ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА..... 104

***Х. Ю. Кучма***
РЕЗУЛЬТАНТ ТА ДИСКРИМІНАНТ ПОЛІНОМІВ..... 106

***А. Безус***
ЗАГАДКА ТЕОРЕМИ КОШІ..... 108

***А. В. Гецко***
МАТЕМАТИЧНА СТРОГІСТЬ ТА ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ: ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГІПОТЕЗИ РІМАНА..... 110

***В. А. Дубенков***
УЯВНІ ЧИСЛА ЯК МАТЕМАТИЧНА ІЛЮЗІЯ У РЕАЛЬНОМУ СВІТІ.... 111

***М. А. Корчук***
ВПЛИВ НЕВИРІШЕНИХ ПИТАНЬ МАТЕМАТИКИ НА МАЙБУТНЄ ЦИВІЛІЗАЦІЇ..... 113

***Ю. С. Бурдейна***
МАТЕМАТИКА АЗАРТУ: ЧОМУ КАЗИНО ЗАВЖДИ ВИГРАЄ І ЧИ МОЖНА ОБІГРАТИ СИСТЕМУ..... 115

***Х. В. Гула***
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ: МАТЕМАТИКА НА СЛУЖБІ ПОРЯТУНКУ..... 118

***М. В. Литвин***
РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОГО МИСЛЕННЯ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ТА ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ..... 119

***В. Г. Швець***
МАТЕМАТИКА В КРИПТОГРАФІЇ: ФУНДАМЕНТ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ..... 121

***Р. В. Романик***
РОЗРАХУНОК ЧАСУ ЕВАКУАЦІЇ: МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ..... 123

***О. П. Микитка, Я.Ю. Шифер***
МАТЕМАТИЧНІ ВІДКРИТТЯ У КОНТЕКСТІ СУЧАСНОЇ ВІЙНИ В УКРАЇНІ..... 125

***А. В. Горностай***
ПОХІДНА: ВІД ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ ДО ЗАСТОСУВАНЬ У ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТ..... 127

***М. Я. Реган***
СТРАТЕГІЯ ТА ТЕОРІЯ ІГОР В МАТЕМАТИЦІ..... 128

***А. В. Гринюк***
ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У ВІДКРИТТІ НОВИХ АЛГОРИТМІВ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ: ПРИКЛАД ALPHATENSOR..... 130

***М. А. Крачковський***
МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РОБОТИ РЯТУВАЛЬНИХ ДРОНІВ
У СИСТЕМІ ДСНС..... 132

***М. В. Бобик***
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КРИПТОГРАФІЇ ТА ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ..... 134

***І. А. Тітієвський***
МАТЕМАТИКА У ВИНАХОДІ ДВИГУНА
ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ: ОБ'ЄМ, ТИСК ТА ТЕРМІЧНИЙ ККД..... 135

***В. О. Загура***
ЦИФРА, ЩО ЗМІНИЛА ВСЕ: ЕВОЛЮЦІЯ ПОРОЖНЕЧІ..... 138

***М. А. Сеньків***
ЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У СУЧАСНІЙ МЕДИЦИНІ.. 139

***М. В. Мартинюк***
МАТЕМАТИКА «ЦИФРОВОГО БЕЗСМЕРТЯ»:
ЯК ПРАЦЮЮТЬ НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ..... 141

***М. А.Котов***
ІНТЕГРАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПІДХОДІВ У ПРОГРАМУВАННІ..... 142

***Д. А. Вненкевич***
ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В
РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ..... 144

***В. В. Мищишин***
КОМБІНАТОРИКА ЯК ОСНОВА
СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА КІБЕРБЕЗПЕКИ..... 146

***А. М. Голиш, А. А. Мацко***
СТІЙКІСТЬ ФУНКЦІЙ ДО МАЛИХ ВОРУШІНЬ..... 148

***В. А. Твердий, А. І. Шара***
МЕТОД ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ..... 150

***М. О. Ігнатович***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ЗАПИТІВ У СИСТЕМАХ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ..... 152

***А. І. Кудик***
ЯК ВИПАДКОВІСТЬ І ЙМОВІРНІСТЬ ВПЛИВАЮТЬ
НА ПОВСЯКДЕННЕ ЖИТТЯ..... 154

***О. Я. Лошній***
ЧАСОВІ ЕВОЛЮЦІЙНІ ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ..... 156

***О. С. Лукавський***
ЙМОВІРНІСТЬ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ..... 157

***О. В.Рогатинюк***
ЧИ ІСНУЄ ВИПАДКОВІСТЬ? МАТЕМАТИЧНИЙ ПОГЛЯД НА ПОВСЯКДЕННІ ПОДІЇ..... 159

***Б. Лук'янчук***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ВІЛЬНОГО ТА СТАБІЛІЗОВАНОГО ПАДІННЯ ПАРАШУТИСТА..... 161

***А. Харчук***
СТОХАСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОФЕСІЙНИХ РИЗИКІВ:
ВІД СТАТИСТИКИ ДО ПРОГНОЗУ..... 163

***П. Кусій***
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ТОПОЛОГІЯ ТА ГЕОМЕТРІЯ ЗАНУРЕНЬ:
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФЕНОМЕНУ ВИВОРОТУ СФЕРИ..... 165

***С. Матяшовська***
МАТЕМАТИКА ВИПАДКОВОСТЕЙ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ..... 167

***П. Сидор***
МАТЕМАТИКА, ЩО РЯТУЄ ЖИТТЯ..... 169

***М. Бовда***
МАТЕМАТИКА В КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ:
ФУНДАМЕНТ ЦИФРОВОГО СВІТУ..... 171

***Д. Ятчук***
ГЕОМЕТРІЯ, ЩО СТВОРЮЄ ГАРМОНІЮ ВСЕСВІТУ..... 173

**СЕКЦІЯ 3. ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ..... 175**

***А. В. Сікачовська***
ЗНАМЕНИТІ КОНСТАНТИ ТА ЇХНЯ ІСТОРІЯ І РОЛЬ
В МАТЕМАТИЦІ..... 175

***Ю. Ю. Сарахман***
ЛОГІЧНЕ ТА ГЕОМЕТРИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ
ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ ЧИСЛА..... 177

***Б. І.Чепак***
МЕЖІ МОЖЛИВОГО: АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ АНОМАЛІЙ
ТА ПРИРОДИ НЕСКІНЧЕННОСТІ..... 179

***Л. Р. Джуджук***
ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЦІЛОЮ ТА ДРОБОВОЮ ЧАСТИНАМИ ЧИСЛА..... 181

***М. С. Оратівський***
МЕТОДИКА ТА АЛГОРИТМИ РУЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ
СКЛАДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ..... 183

***А. А. Лазурак***
ГІПОТЕЗА РІМАНА: НАЙДОРОЖЧА ЗАГАДКА ПРО ПРОСТІ ЧИСЛА..... 184

***О. Кротінов***
СПІРАЛЬ ФІБОНАЧЧІ..... 186

***Н.-П. Лісний***
НЕСКІНЧЕННІСТЬ, ЯКА ЗАКІНЧУЄТЬСЯ: ПАРАДОКС ЗЕНОНА..... 188

***А. Романюк***
НЬЮТОН, КОМЕТА ТА ВИНАХІД ПОХІДНОЇ..... 190

***В. В. Іванський***
ЕММІ НЕТЕР: АРХІТЕКТОР СУЧАСНОЇ АЛГЕБРИ..... 192

***Ю. Л. Мастеров***
ЕДМУНД ЛАНДАУ: ВНЕСОК У РОЗВИТОК АНАЛІТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЯК ОСНОВИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ..... 195

***В.В. Попов***
ЕМАНУЇЛ ЛАСКЕР – УНІВЕРСАЛЬНИЙ ГЕНІЙ ТА БАГАТОГРАННА ОСОБИСТІСТЬ..... 197

***Б.С. Цибань***
ВНЕСОК КАРЛА РУНГЕ У РОЗВИТОК ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... 200

***І.С. Недодаєв***
ВНЕСОК ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО У РОЗВИТОК СУЧАСНОЇ НАУКИ..... 202

***Д.Г. Мішина***
ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛІ..... 204

***Х. М. Петрушка***
АЛГОРИТМ ЕВКЛІДА ТА ЙОГО РОЛЬ У СУЧАСНІЙ КРИПТОГРАФІЇ..... 206

***Д. О. Батюк***
ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ: ВІД НЬЮТОНА ДО СУЧАСНОСТІ..... 208

***Д. Р. Рівняк***
МАТЕМАТИЧНИЙ КОД ВЕЛИКОДНЯ: ЯК ГАУСС ПРИБОРКАВ ЧАС 210

***Ю. В. Галайко***
НАЙВАЖЛИВІШІ ВІДКРИТТЯ В ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ..... 212

***Д. Б. Будзан***
СПІРАЛЬ АРХІМЕДА У ВИЩІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ..... 214

***О. П. Садлівська***
ІСТОРІЯ ВІДКРИТТЯ ПОХІДНОЇ: ВІД ІСААКА НЬЮТОНА ДО ГОТФРІДА ЛЕЙБНІЦА..... 215

***А. В. Гордієнко***
ПАРАДОКС МОНТІ-ХОЛА..... 217

***Ю. В. Слободян***
ІСТОРИКО-ЕВОЛЮЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СТАНОВЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЗНАННЯ: ВІД ЕМПІРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ СТАРОДАВНОСТІ ДО АБСТРАКТНИХ СТРУКТУР СУЧАСНОСТІ..... 219

***В. Ю.Зінчук***
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ..... 222

***Н. Р. Науменко***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КВАНТИФІКАЦІЯ ПРИРОДНИЧИХ ПРОЦЕСІВ: ВІД ФІЗИЧНИХ ЗАКОНІВ ДО СИСТЕМНОЇ ЕКОЛОГІЇ..... 225

***О. І. Дацко***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТОХАСТИЧНИЙ АНАЛІЗ У ФІНАНСОВІЙ І БАНКІВСЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ..... 228

***І. В. Карабин***
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ У СУЧАСНІЙ ФІЛОЛОГІЇ: ВІД СТАТИСТИКИ ТЕКСТУ ДО КОМП'ЮТЕРНОЇ ЛІНГВІСТИКИ..... 230

***Ю. Р. Захарко***
МАТЕМАТИКА ЯК МОВА ФІЗИКИ. ЯК ФОРМУЛИ ОПИСУЮТЬ ЗАКОНИ ПРИРОДИ..... 233

***А. В. Геренчук***
ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ЯК МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТ МОДЕЛЮВАННЯ НАВКОЛИШНЬОГО СВІТУ..... 235

**СЕКЦІЯ 4. МАТЕМАТИКА І СУЧАСНІСТЬ.....** 237

***О. Я. Коломієць***
ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БЕЗПІЛОТНИХ СИСТЕМАХ..... 237

***В. О. Юхимчук***
ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ БЕЗПЕЧНИХ ВІДСТАНЕЙ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ..... 239

***І. В. Ганжа***
РОЛЬ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА ТРИГОНОМЕТРІЇ В СУЧАСНІЙ КОМП’ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ..... 241

***А. Д. Гасюк***
МАТРИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ ЯК ФУНДАМЕНТ ДЛЯ АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ..... 243

***І.О. Самборський***
ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ НЕСКІНЧЕННОГО СПУСКУ, МЕТОДУ ЧАКРАВАЛИ ТА ЧИСЕЛ ПЕЛЛЯ..... 244

***В.І. Чугунов***
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ТИПОГРАФСЬКІЙ СПРАВІ: ВІД ДРУКАРСЬКОГО ВЕРСТАТА ЙОГАННЕСА ГУТЕНБЕРГА ДО СУЧАСНОСТІ..... 246

***Р. М. Шмигельський, Н. В. Валага***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В АВТОМОБІЛЬНІЙ БЕЗПЕЦІ: ЕВОЛЮЦІЯ СИСТЕМ ЗАХИСТУ ЖИТТЯ..... 250

***А. Р. Селіверстова, Ю. О. Тимочко***
МЕЖІ МАТЕМАТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ: ЯК ЛОГІКА ХАОСУ ДОПОМАГАЄ ЗАПОБІГАТИ КАТАСТРОФАМ..... 252

***А. А. Прочий***
МАТЕМАТИЧНИЙ БАЗИС КІБЕРФІЗИЧНИХ СИСТЕМ: МОДЕЛЮВАННЯ АЛГОРИТМІВ, ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ТА КРИПТОГРАФІЧНОГО ЗАХИСТУ В СМАРТФОНАХ..... 254

***Р. С. Коробка***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АЛГОРИТМІЧНІ ОСНОВИ ФУНКЦІОНУВАННЯ СУЧАСНИХ СОЦІАЛЬНИХ ПЛАТФОРМ..... 257

***Д. О. Легкун, В. П. Притула***
ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ ВЕДЕННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОГО ВОГНЮ..... 260

***В. О. Балдін, Ю.-С. П. Сало***
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИБОРУ ВОГНЕВИХ ПОЗИЦІЙ АРТИЛЕРІЇ НА ОСНОВІ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ..... 262

***В. Ю. Орлянська***
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСОВИХ ВІКОН РАДІОЗВ'ЯЗКУ В УМОВАХ СКЛАДНОГО РЕЛЬЄФУ..... 264

***В. Ю. Орлянська***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ВОГНЕВИХ РЕСУРСІВ У ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ РОЄМ БПЛА..... 266

***Є. О. Сліпець***
РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ ЯК МАТЕМАТИЧНА ОСНОВА НАВІГАЦІЇ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ..... 268

***М. А. Пилип'як***
ЯК МАТЕМАТИКА ДОЗВОЛЯЄ ДРОНАМ «БАЧИТИ» КРІЗЬ ДИМ..... 269

***В. В. Дога***
СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАСЛІДКІВ НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ В УКРАЇНІ..... 271

***А. В. Пастух***
ІМОВІРНІСТЬ У ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ: ЯК МИ ОЦІНЮЄМО РИЗИКИ..... 273

***А. С. Мурженко***
МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПОВСЯКДЕННОСТІ: МОДЕЛЮВАННЯ ПОБУТОВИХ, ФІНАНСОВИХ ТА ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДИНИ..... 274

***Д. О. Деркач***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДАНИХ У СУЧАСНІЙ МЕДИЦИНІ: ВІД ТЕОРІЇ ДО КЛІНІЧНОЇ ПРАКТИКИ..... 277

***А. В. Гордієнко***
ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ: ДИЛЕМА СИНЕРГІЇ ТА ЗАМІЩЕННЯ КОГНІТИВНИХ ФУНКЦІЙ..... 280

***В. М. Торган***
МАТЕМАТИКА В МАРКЕТИНГУ: ЯК БРЕНДИ ПЕРЕДБАЧАЮТЬ ПОВЕДІНКУ ПОКУПЦІВ..... 283

***С. О. Пащук***
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ У МЕНЕДЖМЕНТІ..... 285

***О. В. Галайко***
МАТЕМАТИКА В АЛГОРИТМАХ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ: СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ..... 286

***А. Р. Байдюк***
ЗАСТОСУВАННЯ ДЕФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛЮВАННІ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ..... 288

***М. О. Мудра***
АЛГЕБРА ТА ЙМОВІРНОСТІ ЯК ОСНОВА СУЧАСНИХ АЛГОРИТМІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ..... 290

***М. С. Костомарова***
ЗАКОН МАЛИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ВПЛИВ НА СОЦІАЛЬНІ ПРОЦЕСИ..... 292

***Є. І. Куприч***
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ..... 294

***Є. Цітковський***
ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ..... 295

***С. Марусяк***
АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРИ У ТЕОРІЇ ГРАФІВ..... 297

***А. Басюк***
ФРАКТАЛИ ТА ЇХ МАТЕМАТИЧНА ПРИРОДА..... 299

***В. Варивода***
МАТЕМАТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ БЕЗПЕЧНОЇ ЕВАКУАЦІЇ З НАВЧАЛЬНИХ КОРПУСІВ: ВІД РОЗРАХУНКУ ДО ПРАКТИКИ..... 301

***В. Татулич***
ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ПЕРКОЛЯЦІЙНІ МОДЕЛІ В ПРОГНОЗУВАННІ ДИНАМІКИ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ..... 303